Série Schaum

Ranald V. Giles, Jack B. Evett, Cheng Liu

Mécanique des fluides et hydraulique

Cours et problèmes

2e édition

622 problèmes résolus

Série *Schaum*

Le bon réflexe pour comprendre les éléments fondamentaux du cours et pour réussir aux examens

- ***une série unique, de renommée mondiale, disponible en 15 langues***
- ***plus de 45 000 exercices résolus introduits par de nombreux rappels de cours***
- ***des ouvrages spécialement conçus pour l'étudiant***

BIOLOGIE
Anatomie et physiologie humaines
Génétique 2e éd.

CHIMIE
Biochimie, 2 vol.
Chimie analytique
Chimie générale 7e éd.
Chimie organique
Chimie physique, 2 vol.

ÉCONOMIE
Macroéconomie 2e éd.
Mathématiques pour l'économiste
Microéconomie 2e éd.
Principes d'économie

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTRONIQUE
Circuits électriques
Communications analogiques et numériques
Électronique, 2 vol.
Microprocesseurs, 2 vol.
Systèmes asservis 2e éd.
Techniques numériques

GESTION, COMPTABILITÉ
Gestion de la production et des opérations
Statistiques de la gestion
Technique comptable approfondie
Technique comptable de base

INFORMATIQUE
Infographie
Introduction à l'informatique
Mathématiques pour informaticiens
Programmation Basic
Programmation en assembleur
Programmation en C
Programmation en C++
Programmation en Cobol structuré
Programmation Fortran
Programmation Pascal
Structures de données
Traitement de l'information

MATHÉMATIQUES
Algèbre linéaire 2e éd.
Algèbre moderne
Analyse
Analyse de Fourier
Analyse numérique
Analyse vectorielle
Calcul différentiel et intégral 2e éd.
Calcul matriciel
Équations différentielles
Équations différentielles - Méthodes et applications
Formules et tables de mathématiques
Géométrie analytique
Introduction au calcul différentiel et intégral
Mathématiques de base 2e éd.
Mathématiques discrètes
Matrices
Probabilités
Probabilités et statistique
Statistique 2e éd.
Topologie
Transformées de Laplace
Trigonométrie
Variables complexes

PHYSIQUE
Électromagnétisme
Mécanique générale
Optique
Physique appliquée
Physique générale
Physique générale et appliquée
Physique de l'ingénieur
Physique moderne
Thermodynamique

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
Mécaniques des fluides et hydraulique 2e éd.
Résistance des matériaux, 2 vol.



Pour tous renseignements concernant les ouvrages de la série Schaum en français, s'adresser à :
Ediscience international,
28, rue Beaunier
75014 Paris

ISBN : 2-7042-1285-6
ISSN : 0768-2727



Série **Schaum**

Le bon réflexe pour comprendre les éléments fondamentaux du cours et pour réussir aux examens

- ***une série unique, de renommée mondiale, disponible en 15 langues***
- ***plus de 45 000 exercices résolus introduits par de nombreux rappels de cours***
- ***des ouvrages spécialement conçus pour l'étudiant***

BIOLOGIE
Anatomie et physiologie humaines
Génétique 2e éd.

CHIMIE
Biochimie, 2 vol.
Chimie analytique
Chimie générale 7e éd.
Chimie organique
Chimie physique, 2 vol.

ÉCONOMIE
Macroéconomie 2e éd.
Mathématiques pour l'économiste
Microéconomie 2e éd.
Principes d'économie

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTRONIQUE
Circuits électriques
Communications analogiques et numériques
Électronique, 2 vol.
Microprocesseurs, 2 vol.
Systèmes asservis 2e éd.
Techniques numériques

GESTION, COMPTABILITÉ
Gestion de la production et des opérations
Statistiques de la gestion
Technique comptable approfondie
Technique comptable de base

INFORMATIQUE
Infographie
Introduction à l'informatique
Mathématiques pour informaticiens
Programmation Basic
Programmation en assembleur
Programmation en C
Programmation en C++
Programmation en Cobol structuré
Programmation Fortran
Programmation Pascal
Structures de données
Traitement de l'information

MATHÉMATIQUES
Algèbre linéaire 2e éd.
Algèbre moderne
Analyse
Analyse de Fourier
Analyse numérique
Analyse vectorielle
Calcul différentiel et intégral 2e éd.
Calcul matriciel
Équations différentielles
Équations différentielles - Méthodes et applications
Formules et tables de mathématiques
Géométrie analytique
Introduction au calcul différentiel et intégral
Mathématiques de base 2e éd.
Mathématiques discrètes
Matrices
Probabilités
Probabilités et statistique
Statistique 2e éd.
Topologie
Transformées de Laplace
Trigonométrie
Variables complexes

PHYSIQUE
Électromagnétisme
Mécanique générale
Optique
Physique appliquée
Physique générale
Physique générale et appliquée
Physique de l'ingénieur
Physique moderne
Thermodynamique

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
Mécaniques des fluides et hydraulique 2e éd.
Résistance des matériaux, 2 vol.



*Pour tous renseignements concernant les ouvrages de la série Schaum en français, s'adresser à :
Ediscience international,
28, rue Beaunier
75014 Paris*

ISBN : 2-7042-1285-6
ISSN : 0768-2727



Série Schaum

Mécanique des fluides et hydraulique

Cours et problèmes



2e édition

Deuxième tirage

Ranald V. Giles
Drexel Institute of Technology

Jack B. Evett
University of North Carolina, Charlotte

Cheng Liu
University of North Carolina, Charlotte

Traduit par Michel LOBENBERG
Revu et mis à jour par Joseph LEBRETON
et Monique MOTTET

McGRAW-HILL

New York – St. Louis – San Francisco – Auckland
Bogotá – Caracas – Lisbonne – Londres – Madrid – Mexico
Milan – New Delhi – Panama – San Juan
São Paulo – Singapour – Sydney – Tokyo – Toronto

Ranald V. GILES était professeur de Génie Civil à l'Institut de Technologie Drexel de Philadelphie en Pennsylvanie. Il est l'auteur des première et deuxième éditions de cet ouvrage.

Jack B. EVETT a obtenu sa Maîtrise de Sciences à l'Université de Caroline du Sud, et son Ph. D. à l'Université A. & M. du Texas. Ingénieur, géomètre-expert agréé, Professeur à l'Université de Caroline du Nord, à Charlotte, dont il fut le vice-doyen du Département d'Ingénierie. Il est l'auteur et co-auteur de onze livres parmi lesquels *Fundamentals of Fluid Mechanics* et *Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics.*

Cheng LIU est diplômé de l'Université de Virginie Occidentale, ingénieur agréé et professeur de technologie en génie civil à l'Université de Caroline du Nord, à Charlotte. Co-auteur de sept ouvrages dont *Fundamentals of Fluid Mechanics* et *Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics.*

Maquette de couverture : Françoise Rojare

ISBN : 2-7042-1285-6
ISSN : 0768-2727

Ce livre est une traduction de la 3e édition américaine de Schaum's Outline of *Theory and Problems of Fluids Mechanics and Hydraulics*

ISBN : 0-07-023316-0

Avant-propos

Cet ouvrage a été conçu principalement pour servir de complément aux traités classique de mécanique des fluides et d'hydraulique. L'idée qui en a guidé l'élaboration est la conviction des auteurs que la résolution de nombreux problèmes d'application permet de clarifier et de comprendre plus aisément les principes fondamentaux de n'importe quelle branche de la mécanique. Les éditions précédentes de ce livre ont été accueillies très favorablement. Cette nouvelle édition comprend deux chapitres nouveaux consacrés l'un à la statique des fluides, l'autre à l'écoulement des fluides compressibles. En outre de nombreux chapitres ont été revus et complétés pour se conformer aux conceptions, méthodes et terminologie actuelles. Une autre particularité très importante de cette nouvelle édition est l'emploi des unités du Système International (SI).

Le contenu de cet ouvrage a été divisé en chapitre couvrant des domaines bien établis de théorie et d'étude. Chaque chapitre débute par la formulation de définitions, de principes et de théorèmes accompagnés d'exemples et de descriptions. Suit une série de problèmes résolus, de difficulté croissante, auxquels s'ajoutent des problèmes supplémentaires. Ces problèmes résolus illustrent et élargissent la théorie, présentent des méthode d'analyse, constituent des exemples pratiques et éclairent dans le détail les points délicats, ce qui permet à l'étudiant d'appliquer correctement et en toute assurance, les principes de base. L'analyse des systèmes en équilibre, les diagrammes vectoriels, les principes relatifs au travail, à l'énergie, à la quantité de mouvement et les lois de Newton se rapportant au mouvement ont été utilisés tout au long de ce livre. On trouvera des problèmes originaux conçus par les auteurs au cours de leurs nombreuses années d'enseignement de cette discipline. Les problèmes résolus comportent de nombreuses démonstrations de théorèmes et de formules. Le grand nombre de problèmes supplémentaires permet la révision complète du contenu de chaque chapitre.

Outre son utilité pour les élèves des écoles d'ingénieurs en mécanique des fluides et hydraulique, ce livre devrait être précieux comme ouvrage de référence, pour les ingénieurs en exercice. Ils y trouveront les solutions détaillées de beaucoup de problèmes pratiques et, au besoin, pourront se référer au résumé de la théorie. Ce manuel devrait servir également aux personnes appelées à revoir en détail le sujet en vue par exemple de faire passer des examens ou pour toute autre raison.

Nous espérons que vous aurez du plaisir à utiliser ce livre et qu'il vous aidera efficacement dans vos études de mécanique et d'hydraulique. Nous accueillerons avec intérêt vos commentaires, vos suggestions et/ou vos critiques.

Jack B. Evett
Cheng Liu

Table des matières

Symboles et abréviations

La table suivante donne la liste alphabétique des symboles employés dans cet ouvrage. L'alphabet étant limité, on ne peut éviter d'employer la même lettre pour désigner plusieurs notions. Chaque symbole étant défini lorsqu'il est employé pour la première fois, il ne devrait pas en résulter de confusion.

a	accélération en m/s^2, aire en m^2
A	aire en m^2
b	largeur d'un déversoir en m, largeur d'une surface d'eau en m, largeur du lit d'un canal ouvert en m.
c	coefficient de débit, vitesse de l'onde de pression en m/s (vitesse du son)
c_c	coefficient de contraction
c_v	coefficient de vitesse
C	coefficient (Chezy), constante d'intégration
CG	centre de gravité
CP	centre de poussée
C_p	centre de pression, coefficient de puissance d'une hélice
C_D	coefficient de traînée
C_F	coefficient de poussée d'une hélice
C_L	coefficient de portance
C_T	coefficient de moment d'une hélice
C_1	coefficient de Hazen-Williams
ch	cheval vapeur = 735,5 W
d, D	diamètre en m
D_1	diamètre unitaire en m
D	densité
e	rendement
E	module cubique d'élasticité en Pa ou N/m^2, énergie spécifique ou pondérale en m
f	coefficient de frottement (Darcy) pour l'écoulement dans les tuyaux
G	débit pondéral (N/s)
F	force en N, poussée en N
g	accélération de la pesanteur en m/s^2 = 9,807 $\approx$ 9,81 m/s^2
h	hauteur due à la pression en m, hauteur ou profondeur en m, charge en m
H	charge totale (énergie pondérale) en m ou en J/N
H_L, h_L	perte de charge en m
I	moment d'inertie en m^4
I_{xy}	produit d'inertie en m^4
k	rapport des chaleurs spécifiques, exposant isentropique (adiabatique), constante de Von Karman
K	facteur de débit pour les canaux trapézoïdaux coefficient de perte de charge pour les divergents, constante quelconque
K_c	coefficient de perte de charge d'un convergent
l	longueur de mélange en m
L	longueur en m
L_E	longueur équivalente, en m
m	coefficient de rugosité dans la formule de Bazin, coefficient de déversoir pour les barrages
M	masse en kg, masse moléculaire
n	coefficient de rugosité, exposant, coefficient de rugosité dans les formules de Kutter et de Manning
N	vitesse de rotation en Hz, en tours/min.
N_s	vitesse spécifique en Hz, en tours/min.
N_u	vitesse unitaire en Hz, en tours/min.
N_F	nombre de Froude
N_M	nombre de Mach
N_W	nombre de Weber
p	pression en Pa, périmètre mouillé en m
P	force ou poussée en N, puissance en W (ou kW)
P_u	puissance unitaire en W
q	débit unitaire en m^3/s par unité de largeur
Q	débit volumique en m^3/s
Q_u	débit unitaire en m^3/s
r	rayon quelconque en m, constante massique des gaz parfaits
r_0	rayon d'un tuyau en m
R	constante molaire des gaz parfaits, rayon hydraulique en m

R_E	nombre de Reynolds
S	pente de la ligne piézométrique, pente de la ligne de charge
S_O	pente du lit d'un canal
t	temps en s, épaisseur en m, viscosité cinématique en secondes Saybolt
T	température, moment en $N \cdot m$, temps en s
u	vitesse à la périphérie d'un élément tournant en m/s
u, v, w	composantes d'une vitesse dans les directions X, Y et Z
v	volume en m^3, vitesse locale en m/s, vitesse relative dans les machines hydrauliques en m/s
v_s	volume spécifique ou massique $= \frac{1}{\rho} = m^3/kg$
v_*	vitesse de frottement en m/s $= \sqrt{\tau/\rho}$
V	vitesse moyenne en m/s (ou exprimée dans l'unité choisie)
V_c	vitesse critique en m/s
V_d	volume de fluide déplacé
w	poids spécifique ou volumique en N/m^3
W	poids en N, débit en poids en N/s $= wQ$
x	distance en m
y	profondeur en m, distance en m
y_c	profondeur critique en m
y_N	profondeur normale en m
Y	coefficient de détente pour l'écoulement d'un fluide compressible.
z	cote (charge) en m
Z	hauteur du seuil d'un déversoir au-dessus du lit du canal, en m

α (alpha)	angle, coefficient de l'énergie cinétique
β (bêta)	angle, coefficient de la quantité de mouvement
δ (delta)	épaisseur de la couche limite en m
Δ (delta)	terme correcteur du débit
ε (epsilon)	hauteur des aspérités superficielles, en m
η (êta)	viscosité de turbulence
θ (thêta)	angle quelconque
μ (mu)	viscosité absolue en $Pa \cdot s$ (ou poises)
ν (nu)	viscosité cinématique en m^2/s (stokes) $= \mu/\rho$
π (pi)	paramètre sans dimension
ρ (rhô)	masse volumique (ou spécifique) $\rho = w/g$ en kg/m^3
σ (sigma)	tension superficielle en N/m, intensité de la contrainte de tension en N/m^2
τ (tau)	contrainte tangentielle visqueuse en N/m^2 ou Pa
ϕ (phi)	coefficient de vitesse, potentiel de vitesse, rapport, diamètre
ψ (psi)	fonction de courant
ω (oméga)	vitesse angulaire en rad/s

FACTEURS DE CONVERSION

1 pied-cube = 7,481 gallon U.S. = 28,32 litres

1 atmosphère normale = 101 325 Pa = 1,013 25 bar

= 14,696 psi = 760,00 mmHg (à 0 °C)

1 cheval vapeur (ch) = 735 W

1 seconde Saybolt = $10^{-6}\ m^2 \cdot s^{-1}$

Chapitre 1

Propriétés des fluides

MÉCANIQUE DES FLUIDES ET HYDRAULIQUE

La mécanique des fluides et l'hydraulique constituent la branche de la mécanique appliquée traitant du comportement des fluides au repos et en mouvement. Dans l'établissement des principes de la mécanique des fluides, certaines propriétés des fluides jouent un rôle important, d'autres un rôle seulement mineur ou pas de rôle du tout. En hydrostatique, c'est le poids spécifique ou volumique qui est la propriété la plus importante, tandis qu'en hydrodynamique, la densité et la viscosité sont les propriétés dominantes. Quand le fluide est compressible, on doit tenir compte des principes de la thermodynamique. La pression de vapeur prend de l'importance quand interviennent des pressions manométriques négatives et que la tension superficielle influe sur les conditions statiques et dynamiques dans les conduits étroits.

DÉFINITION D'UN FLUIDE

Les fluides sont des substances susceptibles de s'écouler et de prendre la forme du récipient qui les contient. Lorsqu'ils sont en équilibre, les fluides ne peuvent opposer de résistance aux forces tangentielles ou transverses. Tous les fluides présentent un certain degré de compressibilité et n'offrent aucune résistance aux changements de forme.

On peut répartir les fluides en liquides et en gaz. Les principales différences existant entre les liquides et les gaz sont : (*a*) les liquides sont pratiquement incompressibles tandis que les gaz sont compressibles et doivent être souvent traités comme tels et, (*b*) les liquides occupent des volumes bien définis et présentent des surfaces libres tandis qu'une masse donnée de gaz se dilate jusqu'à occuper toutes les parties du récipient qui la contient.

SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS (SI)

Dans le système international, les dimensions mécaniques fondamentales sont : *la longueur, la masse et le temps*. Les unités fondamentales correspondantes sont : le mètre (m), le kilogramme (kg) et la seconde (s).

En conséquence, l'unité de volume est le mètre-cube (m^3), l'unité d'accélération le mètre par seconde carré (m/s^2), l'unité de masse volumique ρ le kilogramme par mètre-cube (kg/m^3).

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad (kg/m^3) \tag{1}$$

Le newton (N), unité de force, est dérivé de la deuxième loi de Newton :

$$\text{Force (en N)} = \text{masse (en kg)} \times \text{accélération (en m/s}^2\text{)} \tag{2}$$

$1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$. L'unité de travail est le joule (J) : 1 J = 1 N · m. Le pascal (Pa) est l'unité de pression ou de contrainte : $1\text{ Pa} = 1\text{N/m}^2$. En SI, les températures sont souvent reportées en °C mais l'unité de température (absolue) est le kelvin (K) :

$$t(°\text{C}) = T(\text{K}) - 273{,}15 \approx T(\text{K}) - 273$$

MASSE VOLUMIQUE ρ, POIDS VOLUMIQUE w

La masse volumique ou spécifique est définie par la relation (*1*). La masse volumique de l'eau est voisine de 1 000 kg/m^3 à la température ordinaire. La table 1 (*C*) indique ses faibles variations en fonction de la température. La masse volumique d'un gaz est calculable à partir de son *équation d'état* :

$$\frac{pv_s}{T} = r \qquad (3)$$

dans laquelle p est la pression absolue, v_s est le volume *massique*, T la température absolue, r la constante massique du gaz étudié :

$$r \approx \frac{R}{M} = \frac{\text{cte molaire des gaz parfaits}}{\text{masse molaire}} = \frac{8{,}314\ J\cdot K^{-1}}{M\ (\text{kg})} \qquad (4)$$

Comme $\rho = 1/v_s$, l'équation (3) peut encore s'écrire :

$$\rho = \frac{p}{rT} \qquad (5)$$

Le poids volumique ou spécifique w est le poids de l'unité de volume : $w = \rho g$. Le poids volumique de l'eau, à la température ordinaire est voisin de 9 797 N/m^3. En effet, d'après la table 1(*C*), $\rho = 999$ kg/m^3; donc :

$$w = \rho g = 999 \times 9{,}8067 \approx 9\,797\ \text{N/m}^3$$

DENSITÉ D'UN CORPS

La densité d'un corps est le nombre sans dimension qui exprime le rapport de la masse du corps à la masse d'un volume égal d'une substance de référence. Les solides et les liquides sont comparés à l'eau (à 4 °C) prise comme référence, tandis que les gaz sont souvent comparés à l'air (sans gaz carbonique et sans hydrogène) pris comme référence (à 0 °C et 1 atmosphère = $1{,}013 \times 10^5$ Pa). Par exemple,

$$\text{densité d'une substance} = \frac{\text{masse de la substance}}{\text{masse d'un égal volume d'eau}} = \frac{\text{masse spécifique de la substance}}{\text{masse spécifique de l'eau}} \qquad (6)$$

Ainsi, si la densité d'un produit donné est de 0,750, sa masse volumique est de $0{,}750 \times 10^3$ kg/m^3.

La densité de l'eau est de 1,00 et celle du mercure de 13,57. La densité d'une substance est la même dans tous les systèmes d'unités. Voir l'annexe, table 2.

VISCOSITÉ D'UN FLUIDE

La viscosité d'un fluide est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle. La viscosité est due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide.

En se reportant à la figure 1-1, considérons deux grandes plaques parallèles à une faible distance l'une de l'autre y, l'espace entre les plaques étant rempli d'un fluide donné.

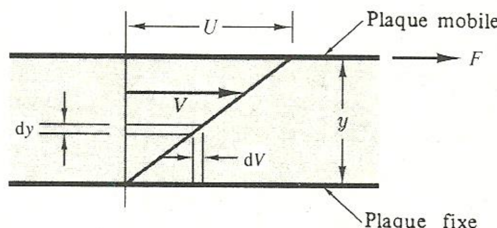


Fig. 1-1

Pour que la plaque supérieure garde une vitesse constante U, il faut lui appliquer une force constante F. Il existe donc une interaction visqueuse entre la plaque et le fluide, qui se manifeste sous forme de traînée sur la première et de force de cisaillement sur le fluide. Le fluide au contact de la plaque supérieure va adhérer à celle-ci et se mouvoir à la vitesse U, tandis que le fluide au contact de la plaque fixe aura une vitesse nulle. L'expérience montre que la force de cisaillement F est proportionnelle à l'aire A de la plaque, à la vitesse U et inversement proportionnelle à la distance y.

À partir des triangles semblables, on a la relation $U/y = \mathrm{d}V/\mathrm{d}y$, donc :

$$\text{la force } F \quad \text{est proportionnelle à} \quad \left(\frac{AU}{y} = A\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$\text{ou } \left(\frac{F}{A} = \tau\right) \text{ est proportionnel à } \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}.$$

τ est la contrainte de cisaillement. Si on introduit la constante de proportionnalité μ appelée *viscosité absolue (ou dynamique)*, on a :

$$\tau = \mu\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{\tau}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}y} \tag{7}$$

Il en résulte que l'unité de viscosité absolue μ est le pascal · seconde (Pa · s). Les fluides obéissant à la relation (7) sont appelés *fluides newtoniens* (voir le problème 1.10).

On définit un deuxième coefficient de viscosité, le *coefficient de viscosité cinématique* par

$$\text{coefficient de viscosité cinématique } \nu \text{ (nu)} = \frac{\text{viscosité absolue } \mu}{\text{masse volumique } \rho}$$

ou

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{w/g} = \frac{\mu g}{w} = \frac{\mathrm{L^{-1}MT^{-1}}}{\mathrm{ML^{-3}}} = \mathrm{L^2T^{-1}} \tag{8}$$

D'après (8), ν s'exprime en $\mathrm{m^2/s}$ (ou $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$).

Les viscosités sont parfois indiquées dans les manuels en poises et les viscosités cinématiques en secondes saybolt d'après les mesures au viscosimètre.

Les conversions en système technique sont illustrées par les problèmes 1.7 à 1.9. On a donné dans les tables 1 et 2 de l'annexe diverses valeurs de viscosités.

La viscosité des liquides décroît avec la température mais n'est pas affectée de manière appréciable par les variations de pression. Puisque la masse spécifique des gaz varie avec la pression (à température constante), la viscosité cinématique est inversement proportionnelle à la pression.

PRESSION DE VAPEUR

Quand il se produit un phénomène d'évaporation dans une enceinte fermée, on appelle pression de vapeur la pression partielle créée par les molécules de vapeur. La pression de vapeur dépend de la température et augmente avec elle. Voir la table 1(C) pour les valeurs relatives à l'eau.

TENSION SUPERFICIELLE

Une molécule située à l'intérieur d'un liquide est soumise à des forces d'attraction agissant dans toutes les directions, et la somme vectorielle de ces forces est nulle. Cependant, une molécule située à la surface d'un liquide est soumise à une force de cohésion bien déterminée, dirigée vers l'intérieur et perpendiculaire à la surface. Ainsi, pour déplacer les molécules vers la surface, il faut fournir un travail résistant contre cette force; les molécules de la surface ont donc plus d'énergie que les molécules internes.

La tension superficielle σ (sigma) d'un liquide est égale au travail que l'on doit fournir pour apporter des molécules en quantité suffisante de l'intérieur du liquide vers la surface, pour former une nouvelle unité d'aire de cette même surface. (σ peut s'exprimer en J/m^2 homogène au N/m).

Autrement dit, les molécules en surface ayant acquis de l'énergie, se comportent comme si elles formaient une feuille étirée et

$$\sigma = \Delta F / \Delta L \tag{9}$$

Dans cette formule ΔF est la force élastique perpendiculaire à tout élément ΔL de la surface. D'après la définition 9, l'unité de tension superficielle est bien le newton par mètre (N/m). La valeur pour l'eau à 0 °C est 0,075 6 N/m. La table 1(C) donne les valeurs de σ pour diverses températures.

CAPILLARITÉ

L'ascension ou la dépression d'un liquide dans un tube capillaire (ou un milieu poreux) est provoquée par la tension superficielle et dépend des grandeurs relatives de la cohésion du liquide et de son adhésion aux parois du récipient qui le contient. Les liquides s'élèvent dans les tubes qu'ils mouillent (adhésion > cohésion) et s'enfoncent dans les tubes qu'ils ne mouillent pas (cohésion > adhésion). La capillarité est importante lorsqu'on utilise des tubes de diamètre inférieur à 10 mm. Pour les tubes de diamètre supérieur à 12 mm, les effets de capillarité sont négligeables.

La figure 1-2 illustre l'ascension h (ou la dépression) dans un tube. On a approximativement :

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r} = \frac{2\sigma \cos\theta}{w r} \tag{10}$$

h : hauteur d'ascension (ou de dépression) capillaire
σ : tension superficielle
θ : angle de raccordement ou de mouillage (voir fig. 1-2)
ρ : masse volumique du liquide
r : rayon du tube

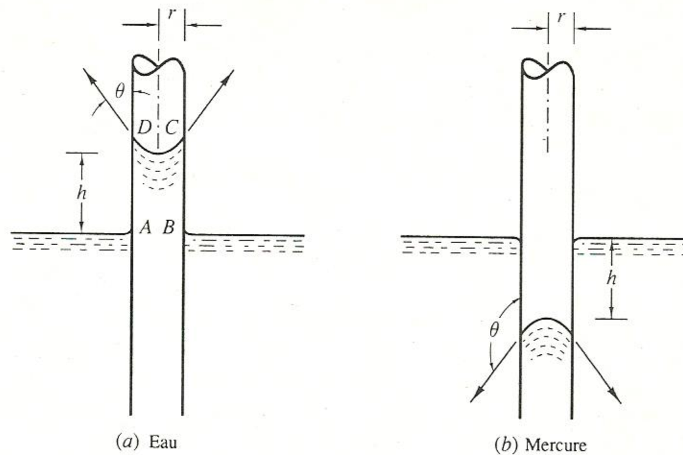


Fig. 1-2

Si le tube est propre, θ vaut 0° pour l'eau et environ 140° pour le mercure.

MODULE D'ÉLASTICITÉ (E)

Le module cubique d'élasticité E est lié à la compressibilité du fluide. C'est le rapport de la variation de pression à la variation relative de volume.

$$E = \frac{\mathrm{d}p}{-\mathrm{d}v/v} \tag{11}$$

L'augmentation de pression entraînant une diminution de volume, il est nécessaire d'introduire le signe moins pour que E reste positif. E s'exprime évidemment en pascal (Pa) ou en multiple, le bar (10^5 Pa).

CONDITIONS ISOTHERMES

Si la température reste invariable lors d'une transformation 1 → 2, la loi des gaz parfaits (équations 3 ou 5) implique

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = \text{constante} \tag{12}$$

Il en résulte que le module cubique vaut :

$$E = p \tag{13}$$

CONDITIONS ADIABATIQUES OU ISENTROPIQUES

S'il n'y a aucun échange de chaleur entre le gaz et l'enceinte (extérieur), les équations (*12*) et (*13*) sont ainsi modifiées :

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \quad \text{ou} \quad \frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k} = \text{constante} \tag{14}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} \tag{15}$$

On a alors :

$$E = kp \tag{16}$$

k est le rapport de la chaleur massique à pression constante (C_p), à la chaleur massique à volume constant (C_v) (voir la table 1(A)).

PERTURBATIONS DE PRESSION

Les perturbations de pression, imposées à un fluide se déplaçant en train d'ondes progressent à la vitesse c :

$$c = \sqrt{E/\rho} \tag{17}$$

Pour les gaz, la célérité acoustique est :

$$c = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{krT} \tag{18}$$

Problèmes résolus

1.1 Calculer le poids spécifique w, le volume massique v_s, la masse volumique ρ du méthane à 38 °C à 8,30 bar de pression absolue.

Solution

D'après la table 1(A) de l'annexe, $r = 518{,}5\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$\text{Masse volumique } \rho = \frac{p}{rT} = \frac{8{,}30 \times 10^5}{518{,}5(273 + 38)} = 5{,}15\ \text{kg/m}^3$$

$$\text{Volume massique } v_s = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5{,}15} = 0{,}194\ \text{m}^3/\text{kg}$$

$$\text{Poids volumique } w = \rho g = 5{,}15 \times 9{,}81 = 50{,}5\ \text{N/m}^3$$

1.2 Si 6 m^3 d'huile de pétrole pésent 47 kN, calculer son poids volumique w, sa masse volumique ρ et sa densité.

Solution

$$w = \text{poids volumique} = \frac{47 \times 10^3}{6\ \text{m}^3} = 7\,830\ \text{N/m}^3$$

$$\text{masse volumique } \rho = \frac{w}{g} = \frac{7\,830}{9{,}81} = 798\ \text{kg/m}^3$$

$$\text{densité } = \frac{\rho_{\text{huile}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{798}{1\,000} = 0{,}798 \approx 0{,}80$$

1.3 À 32 °C et sous 2,07 bar de pression absolue, le volume massique v_s d'un certain gaz est de 0,71 m^3/kg. Déterminer la constante du gaz r et sa densité ρ.

Solution

$$\text{Puisque } \rho = \frac{p}{rT}, \text{ alors } r = \frac{p}{\rho T} = \frac{p v_s}{T} = \frac{(2{,}07 \times 10^5)(0{,}71)}{273 + 32} = 482 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{Masse volumique } \rho = \frac{1}{v_s} = \frac{1}{0{,}71} = 1{,}41 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

1.4 (*a*) Trouver la variation de volume de 28,32 dm^3 d'eau à 27 °C pour une augmentation de pression de 20,7 bar.
(*b*) D'après les données expérimentales suivantes, déterminer le module d'élasticité cubique de l'eau : à 34,5 bar le volume est de 28,32 dm^3 et à 241,3 bar de 28,05 dm^3.

Solution

(*a*) D'après la table 1(*C*) de l'annexe, E à 27 °C est de $2{,}24 \times 10^9$ Pa. D'après la formule (11)

$$dv = -\frac{v\,dp}{E} = -\frac{28{,}32 \times 10^{-3} \times 20{,}7 \times 10^5}{2{,}24 \times 10^9} = -2{,}61 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

(*b*) La définition accompagnant la formule (11) indique qu'on doit considérer des variations de pression et de volume qui se *correspondent*. Ici une augmentation de pression correspond à une diminution de volume.

$$E = -\frac{dp}{dv/v} = \frac{(241{,}3 - 34{,}5) \times 10^5}{(28{,}32 - 28{,}05)/28{,}32} = 2{,}17 \times 10^9 \text{ Pa} = 2{,}17 \text{ GPa}$$

1.5 Dans les profondeurs de l'océan, on mesure une pression de 80 MPa. En supposant que le poids volumique w_1 à la surface est de 10 kN/m^3 et que le module cubique d'élasticité moyen E vaut 2,340 GPa, trouver : (*a*) la variation dv_s du volume massique; (*b*) le volume massique $(v_s)_2$ en profondeur; (*c*) le poids volumique w_2 en profondeur.

Solution

(*a*)

$$(v_s)_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{g}{w_1} = \frac{9{,}81}{10 \times 10^3} = 9{,}81 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$E = \frac{dp}{-dv_s/v_s}$$

$$2{,}340 \times 10^9 = \frac{(80 \times 10^6) - 0}{dv_s/(9{,}81 \times 10^{-4})}$$

$$dv_s = -0{,}335 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

(*b*)

$$(v_s)_2 = (v_s)_1 + dv_s = (9{,}81 - 0{,}335) \times 10^{-4} = 9{,}475 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

(*c*)

$$w_2 = g/(v_s)_2 = 9{,}81/(9{,}475 \times 10^{-4}) = 10{,}35 \text{ kN/m}^3$$

1.6 Un cylindre contient 354 dm^3 d'air à 49 °C à la pression absolue de 2,76 bar. On comprime l'air jusqu'à ce qu'il occupe 71 dm^3. (*a*) En admettant que la compression soit isotherme, quelle est la température et la pression finale et que vaut le module d'élasticité cubique ? (*b*) En supposant la compression adiabatique, donner les température et pression finales.

Solution

(*a*) Dans des conditions isothermes, $p_1 v_1 = p_2 v_2$

Donc, $2,76 \times 10^5 \times 0,354 = p_2 \times 10^5 \times 0,071$ et $p_2 = 13,76$ bar (absolue)

Le module cubique d'élasticité $E = p = 13,76$ bar.

(*b*) Dans des conditions adiabatiques, $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ et la table 1(*A*) de l'annexe donne $k = 1,40$. Alors

$$2,76 \times 10^5 (0,354)^{1,40} = p_2 \times 10^5 (0,071)^{1,40} \text{ et } p_2 = 26,2 \text{ bar} \quad \text{(absolue)}$$

La température finale s'obtient à l'aide de l'équation (*15*) :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}, \quad \frac{T_2}{273+49} = \left(\frac{26,2}{2,76}\right)^{0,40/1,40}, \quad T_2 = 612 \text{ K} \quad \text{d'où} \quad t = 339\ °\text{C}.$$

Le module d'élasticité global $E = kp = 1,40 \times 26,2 = 36,7$ bar $= 3,67$ MPa.

1.7 D'après les *International Critical Tables*, la viscosité de l'eau à 20 °C est de 0,010 08 poises. Calculer (*a*) la viscosité absolue en Pa · s. (*b*) Si la densité à 20 °C est de 0,998, calculer la valeur de la viscosité cinématique en m²/s.

Solution

En utilisant

$$1 \text{ poise} = \frac{10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \frac{10^{-1} \text{ N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

(*a*) μ (en Pa · s) $= 0,010\,08 \times 0,1 = 1,008 \times 10^{-3}$ Pa · s

(*b*) $\nu \text{ en m}^2/\text{s} = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{1,008 \times 10^{-3}}{0,998 \times 1\,000} = 1,01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

1.8 Exprimer en m²/s la viscosité cinématique d'un liquide dont la viscosité absolue est 15,14 poises et dont la densité est 0,964.

Solution

En procédant comme dans le problème 1.7,

$$\nu = \frac{15,14 \times 0,1}{964} = 1,57 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

1.9 Convertir une viscosité de 510 secondes Saybolt à 15,5 °C en viscosité cinématique ν en m²/s.

Solution

Quand on utilise un viscosimètre universel, on se sert de deux séries de formules pour effectuer la conversion :

(*a*) pour $t \leqslant 100$, μ en poises $= (0,002\,26\, t - 1,95/t) \times$ densité
pour $t > 100$, μ en poises $= (0,002\,20\, t - 1,35/t) \times$ densité

(*b*) pour $t \leqslant 100$, ν en stokes $= (0,002\,26\, t - 1,95/t)$
pour $t > 100$, ν en stokes $= (0,002\,20\, t - 1,35/t)$
où t = (secondes Saybolt). Pour convertir les stokes (cm²/s) en m²/s, il suffit de diviser par 10^4.

D'après le groupe (*b*) et puisque $t > 100$, $\nu = (0,002\,20 \times 510 - \dfrac{1,35}{510}) \times 10^{-4} = 1,119 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

1.10 Étudier les caractéristiques de résistance aux forces tangentielles des fluides pour lesquelles on a tracé les courbes de la figure 1-3.

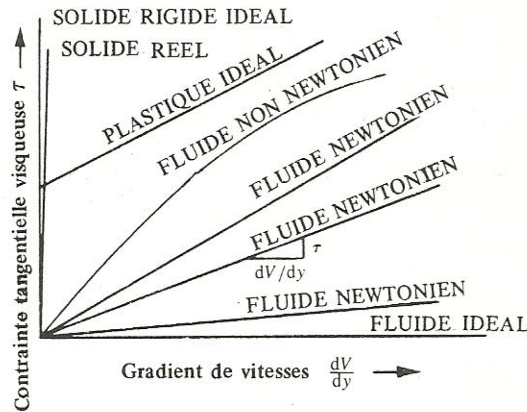


Fig. 1-3

Solution

(*a*) Les fluides newtoniens suivent la loi $\tau = \mu(\mathrm{d}V/\mathrm{d}y)$, c'est-à-dire que la contrainte imposée par la force tangentielle est proportionnelle au gradient des vitesses ou au taux de déformation tangentielle. Ainsi pour ces fluides, le tracé de la contrainte tangentielle en fonction du gradient des vitesses donne une droite passant par l'origine. La pente de la droite détermine la viscosité.

(*b*) Pour le fluide «idéal», la résistance à une déformation tangentielle est nulle et, par conséquent, le tracé coïncide avec l'axe des x. Bien que les fluides idéaux n'existent pas, dans certaines analyses, la supposition que le fluide est idéal est utile et justifiée.

(*c*) Pour le solide «idéal» ou élastique, il n'y aura aucune déformation quelle que soit la charge, et le tracé coïncide avec l'axe y. Les solides réels présentent une certaine déformation, et dans le domaine où elle est proportionnelle (loi de Hooke), le tracé est une ligne droite presque verticale.

(*d*) Les fluides non newtoniens se déforment de telle manière que la contrainte tangentielle n'est pas proportionnelle au taux de la déformation tangentielle, sauf peut-être pour des forces tangentielles faibles. On pourrait qualifier la déformation de ces fluides de plastique.

(*e*) Le matériau plastique «idéal» peut résister à une certaine quantité de contrainte tangentielle sans déformation, mais ensuite, il se déforme proportionnellement à la contrainte tangentielle.

1.11 Reportons-nous à la figure 1-4. Un fluide a une viscosité absolue de 0,048 Pa · s et une densité de 0,913. Calculer le gradient des vitesses et l'intensité de la contrainte tangentielle à la paroi et aux points situés à 25 mm, 50 mm et 75 mm de celle-ci, en admettant (*a*) une distribution de vitesse linéaire, (*b*) une distribution de vitesse parabolique. La parabole de la figure a son sommet en A. L'origine est en B.

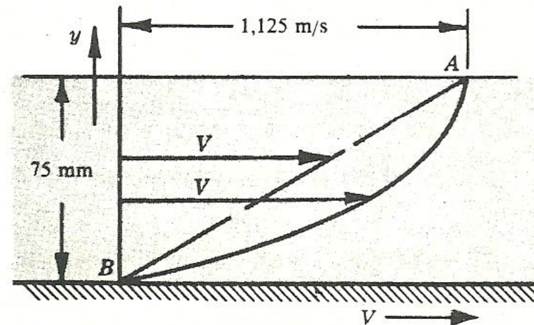


Fig. 1-4

Solution

(*a*) Dans l'hypothèse d'une distribution linéaire, la relation entre la vitesse et la distance y est : $V = 15y$. Alors $\mathrm{d}V = 15\,\mathrm{d}y$, c'est-à-dire que le gradient des vitesses est $\mathrm{d}V/\mathrm{d}y = 15 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
Pour $y = 0$, $V = 0$, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}y = 15\ \mathrm{s}^{-1}$ et $\tau = \mu(\mathrm{d}V/\mathrm{d}y) = 0{,}048 \times 15 = 0{,}72$ Pa.
De manière analogue, pour d'autres valeurs de y, on obtient aussi $\tau = 0{,}72$ Pa.

(*b*) L'équation de la parabole doit vérifier l'hypothèse que la vitesse est nulle au bord B. L'équation de la parabole est $V = 1{,}125 - 200(0{,}075 - y)^2$. Alors $\mathrm{d}V/\mathrm{d}y = 400(0{,}075 - y)$ et les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

$y \times 10^3$	V	$\mathrm{d}V/\mathrm{d}y$	$\tau = 4{,}80 \times 10^{-2}(\mathrm{d}V/\mathrm{d}y)$
0	0	30	1,44 Pa
25	0,625	20	0,96 Pa
50	1,000	10	0,48 Pa
75	1,125	0	0

On observera que là où le gradient de vitesse est nul (ce qui se produit à la ligne médiane d'une conduite sous pression), la contrainte tangentielle est nulle aussi.

Notons que l'unité de gradient de vitesse est la s^{-1}, et qu'ainsi le produit $\mu(\mathrm{d}V/\,dy) = (\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}) \times \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Pa}$, dimension correcte de la contrainte tangentielle τ.

1.12 Un cylindre de 12,2 cm de rayon tourne à l'intérieur d'un cylindre fixe de même axe et de 12,8 cm de rayon. Les deux cylindres ont 30 cm de long. Déterminer la viscosité du liquide qui remplit l'espace entre les deux cylindres s'il est nécessaire d'appliquer un couple de 0,881 N · m pour maintenir la vitesse angulaire à 2π rad/s.

Solution

(*a*) Le couple est transmis du cylindre externe à travers les couches du liquide. Puisque l'espace entre les cylindres est réduit, on peut mener le calcul sans faire d'intégration.

$$\text{vitesse tangentielle du cylindre intérieur} = r\omega = (0{,}122\ \mathrm{m})(2\pi\ \mathrm{rad/s}) = 0{,}766\ \mathrm{m/s}.$$

Vu que l'intervalle entre les cylindres est petit, on peut admettre que le gradient est rectiligne et on peut utiliser le rayon moyen. Alors $\mathrm{d}V/\mathrm{d}y = 0{,}766/(0{,}128 - 0{,}122) = 128\ (\mathrm{m/s}) \cdot \mathrm{m}$ ou s^{-1}.

$$\text{couple appliqué} = \text{couple résistant.}$$

$$0{,}881 = \tau\ (\text{surface})\ (\text{bras de levier}) = \tau(2\pi \times 0{,}125 \times 0{,}30)(0{,}125)$$

et $\tau = 29{,}9$ Pa.
Alors $\mu = \dfrac{\tau}{(\mathrm{d}V/\mathrm{d}y)} = \dfrac{29{,}9}{128} = 0{,}233\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$

(*b*) Dans un traitement mathématique plus précis, on utilise le calcul infinitésimal, comme suit. Comme auparavant,

$$0{,}881 = \tau(2\pi r \times 0{,}30)r,\ \text{d'où}\ \tau = 0{,}467/r^2.$$

À présent $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\tau}{\mu} = \dfrac{0{,}467}{\mu r^2}$, où les variables sont la vitesse V et le rayon r. La vitesse est de 0,766 m/s au rayon intérieur et zéro au rayon extérieur.
Réarrangeant l'expression ci-dessus et substituant $-\mathrm{d}r$ à $\mathrm{d}y$ (le signe moins indique que r décroît quand y croît), nous obtenons

$$\int_{V_{\mathrm{ex}}}^{V_{\mathrm{in}}} \mathrm{d}V = \frac{0{,}467}{\mu}\int_{0{,}128}^{0{,}122} \frac{-\mathrm{d}r}{r^2} \quad \text{et} \quad V_{\mathrm{in}} - V_{\mathrm{ex}} = \frac{0{,}467}{\mu}\left[\frac{1}{r}\right]_{0{,}128}^{0{,}122}$$

$$\text{Alors, } (0{,}766 - 0) = \frac{0{,}467}{\mu}\left(\frac{1}{0{,}122} - \frac{1}{0{,}128}\right), \text{ d'où } \mu = 0{,}234 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

1.13 Trouver une expression de la relation entre la pression manométrique p à l'intérieur d'une gouttelette de liquide et la tension superficielle σ.

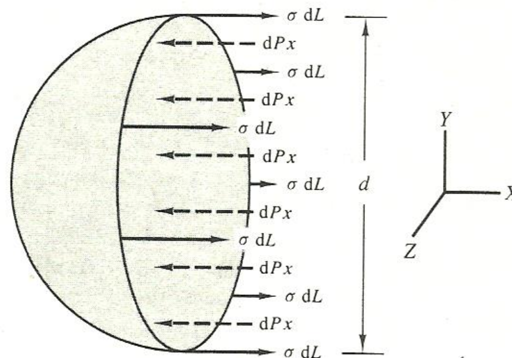


Fig. 1-5

Solution

La tension superficielle à la surface d'une petite goutte de liquide rend la pression régnant à l'intérieur de la goutte supérieure à la pression extérieure.

La figure 1-5 représente les forces assurant l'équilibre dans la direction X de la moitié d'une petite goutte de diamètre d. Les forces $\sigma \mathrm{d}L$ sont dues à la tension superficielle s'exerçant sur le périmètre et les forces $\mathrm{d}P_x$ sont les composantes selon X des forces $p\,\mathrm{d}A$ (voir le chapitre 3). Alors, d'après $\Sigma X = 0$,

somme des forces dirigées vers la droite = somme des forces dirigées vers la gauche

$$\sigma \int \mathrm{d}L = \int \mathrm{d}P_x$$

tension superficielle × périmètre = pression × projection de la surface

$$\sigma(\pi d) = p(\pi d^2/4)$$

ou $p = 4\sigma/d$ en Pa (man.) L'unité de tension superficielle est le N/m.

On doit noter que plus petite est la goutte, plus grande est la pression.

1.14 Une petite goutte d'eau à 27 °C en contact avec l'air a un diamètre de 0,50 mm. Si la pression à l'intérieur de la gouttelette est de 575 Pa, supérieure à celle de l'atmosphère, quelle est la tension superficielle σ ?

Solution

D'après 1.13 :

$$\sigma = \frac{1}{4}pd = \frac{1}{4}(575 \text{ Pa} \times (0{,}5 \times 10^{-3}) \text{ m} = 71{,}8 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

1.15 Une aiguille d'une longueur de 35 mm est posée sur la surface d'une eau à 20 °C. Quelle force supplémentaire, par rapport à son poids, faut-il lui appliquer pour la sortir de l'eau ?

Solution

À partir de la table 1(C), on obtient $\sigma = 0{,}072\,8$ N/m :

$$\sigma = F/L$$

$$0{,}072\,8 = F/(2 \times 0{,}035)$$

$$F = 0{,}005\,10 \text{ N}.$$

1.16 Calculer la hauteur approximative à laquelle s'élève un liquide qui mouille le verre dans un tube capillaire exposé à l'atmosphère, cf. équation (10).

Solution

On peut calculer approximativement la hauteur à laquelle s'élève le liquide dans un tube de faible diamètre en considérant la masse de liquide $ABCD$ de la figure 1.2a comme un système soumis à une résultante de forces nulle. Puisque ΣY doit être égal à 0, nous obtenons :

composantes de la force due à la tension superficielle (vers le haut) − poids du volume $ABCD$ (vers le bas) + force de pression en AB (vers le haut) − force de pression en CD (vers le bas) = 0

ou
$$+(\sigma \int \mathrm{d}L)\sin\theta - w(\frac{\pi d^2}{4}h) + p(\text{surface de } AB) - p(\text{surface de } CD) = 0.$$

On voit que les pressions aux niveaux AB et CD sont toutes les deux égales à la pression atmosphérique. Ainsi les deux derniers termes du membre gauche de l'équation s'annulent, et puisque $\sigma \int \mathrm{d}L = \sigma(\pi d)$, nous obtenons

$$h = \frac{4\sigma \sin\theta}{wd} \text{ en mètres}$$

1.17 Calculer approximativement la dépression du mercure à 20 °C dans un tube capillaire de 1,5 mm de rayon. La tension superficielle σ du mercure à 20 °C vaut 0,514 N/m; son poids spécifique w est de 133,1 kN/m^3 (Fig. 1-2b).

Solution

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{wr} = \frac{2 \times 0{,}514 \cos 140°}{133{,}1 \times 10^3 \times 1{,}5 \times 10^{-3}} = -3{,}94 \times 10^{-3} \text{ m} = -3{,}94 \text{ mm}$$

1.18 Estimer la hauteur à laquelle s'élève l'eau à 21 °C dans un tube capillaire de 3,00 mm de diamètre.

Solution

D'après la table 1(C), $\sigma = 0{,}072\,5$ N/m. Supposons l'angle $\theta = 0°$, pour un tube propre.

$$w = pg$$

$$h = \frac{4\sigma}{wd} = \frac{4 \times 0{,}072\,5}{1\,000 \times 9{,}81 \times 3 \times 10^{-3}} = 0{,}009\,9 \text{ m} = 9{,}9 \text{ mm.}$$

Problèmes supplémentaires

1.19 Si la masse spécifique d'un liquide est de 837 kg/m^3, déterminer son poids spécifique et sa densité. *Rép.* 8 210 N/m^3; 0,837.

1.20 Vérifier les valeurs de la densité et du poids spécifique de l'air à 30 °C données dans la table 1(B).

1.21 Vérifier les valeurs des poids spécifiques du gaz carbonique et de l'azote de la table 1(A).

1.22 À quelle pression l'air à 50 °C pèsera-t-il 18,7 N/m^3 ? *Rép.* 1,76 bar (abs.).

1.23 On comprime deux mètres cube d'air, initialement à la pression atmosphérique jusqu'à ce qu'ils occupent 0,500 m^3. Pour une compression isotherme, quelle est la pression finale? *Rép.* 4,05 bar (abs.).

1.24 Dans le problème précédent, quelle serait la pression finale, si aucune dépense de chaleur n'était effectuée pendant la compression? *Rép.* 7,06 bar (abs.).

1.25 Déterminer la viscosité absolue du mercure en Pa · *s* si la viscosité en poises vaut 0,015 8, *Rép.* 0,001 58 Pa · s.

1.26 Si une huile a une viscosité absolue de 510 poises, quelle est sa viscosité dans le système SI? *Rép.* 51 Pa · s.

1.27 Quelles sont les valeurs de la viscosité absolue et cinématique en SI d'une huile ayant une viscosité Saybolt de 155 s, si la densité de l'huile est 0,932? *Rép.* 0,031 Pa · s et $33{,}3 \times 10^{-6}$ $m^2 \cdot s^{-1}$.

1.28 Deux grandes surfaces planes sont placées à 25 mm l'une de l'autre et l'espace entre elles est rempli d'un liquide de viscosité absolue 0,958 Pa · s. En supposant que le gradient des vitesses est une droite, quelle est la force nécessaire pour tirer une plaque très fine de 37 dm^2 de surface à la vitesse constante de 30 cm/s, si la plaque est située à 8,4 mm d'une des surfaces? *Rép.* 19,2 N.

1.29 Quelle est la force nécessaire pour arracher un anneau de fil fin de 45 mm de diamètre d'une surface d'eau à 20 °C? Négliger le poids du fil. *Rép.* 0,020 6 N.

1.30 Quel est le diamètre minimal d'un tube de verre rempli d'eau à 20 °C et dont l'ascension capillaire reste inférieure à 0,9 mm? *Rép.* 32,9 mm.

1.31 Un volume d'eau à 27 °C, égal à 283,2 l est soumis à une augmentation de pression de 34,5 bar. Quel est le changement de volume de l'eau? À cette température, le module d'élasticité de l'eau vaut sensiblement 22 410 bar. *Rép.* −0,436 l.

1.32 Quelle pression doit-on appliquer à l'eau pour réduire son volume de 1,25 %? On donne le module d'élasticité $E = 2{,}19$ GPa. *Rép.* 0,027 4 GPa.

Chapitre 2

Statique des fluides

INTRODUCTION

Le terme de *pression* s'applique aux effets d'une force agissant sur l'ensemble d'une surface. La force peut être exercée par un solide, un liquide ou un gaz. Souvent, la force, à l'origine de la pression, est tout simplement le poids d'un matériau.

La pression est un facteur très important dans bien des problèmes de mécanique des fluides et d'hydraulique. Comme il est précisé plus loin dans ce chapitre, la pression exercée par un fluide est proportionnelle à la profondeur. Il en résulte que la pression, au fond d'un barrage, est bien plus grande qu'au voisinage de la surface; ainsi, des pressions considérables agissent sur un sous-marin au fond de l'océan. Bien entendu, ces effets de pression doivent être pris en compte lors de la conception de telles structures (barrages et sous-marins).

PRESSION D'UN FLUIDE

En un point donné, un fluide transmet la pression, avec la même intensité, dans toutes les directions; le vecteur pression est normal à tout plan passant par ce point. Dans un liquide, l'intensité de la pression est la même en tout point d'un plan horizontal. On mesure les pressions à l'aide de manomètres de différentes formes. Sauf mention contraire, les pressions manométriques ou relatives seront utilisées tout au long de ce livre. Les pressions manométriques ont des valeurs supérieures ou inférieures à la pression atmosphérique.

UNITÉS DE PRESSION

La pression se définit comme le quotient d'une force par une surface :

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

La pression est généralement donnée en Pa (N/m^2) ou en bar (10^5 Pa).

Lorsque la force F est uniformément distribuée sur la surface d'aire A, on a :

$$p = \frac{F}{A}$$

DIFFÉRENCE DE PRESSION

La différence de pression entre deux points situés à des niveaux différents d'un liquide est donnée par :

$$p_2 - p_1 = w(h_2 - h_1) \quad \text{en Pa} \qquad (1)$$

où w = poids spécifique du liquide (N/m^3) et $h_2 - h_1$ = différence de hauteur (m).

Si le point 0 représente la surface libre du liquide, et h est mesurée vers le bas, l'équation ci-dessus devient :

$$p = wh \quad \text{(en Pa au manomètre)} \tag{2}$$

Ces équations s'appliquent tant que w est constant (ou varie si peu avec h, qu'il ne provoque pas d'erreur appréciable dans le résultat).

HAUTEUR DUE À LA PRESSION

La hauteur h due à la pression représente la hauteur d'une colonne de fluide homogène produisant une intensité donnée de pression. Alors,

$$h \text{ (m de fluide)} = \frac{p(\text{Pa})}{w(\text{N/m}^3)} \tag{3}$$

VARIATIONS DE PRESSION DANS UN FLUIDE COMPRESSIBLE

Les variations de pression dans un fluide compressible sont habituellement très faibles à cause des faibles poids spécifiques et des faibles dénivellations considérées dans les calculs d'hydraulique. Là où de telles différences doivent être mises en évidence pour de petites variations de hauteur dh, la loi de la variation de la pression peut s'écrire :

$$\mathrm{d}p = -w\,\mathrm{d}h \tag{4}$$

Le signe négatif indique que la pression décroît lorsque la hauteur augmente, en comptant positivement vers le haut. Pour ce qui concerne les applications, voir les problèmes 2.23 à 2.25.

VIDE ET PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

Quand on parle de pression, le terme de *vide* s'emploie pour désigner un espace où règne une pression inférieure à la pression atmosphérique. Cette dernière est naturellement la pression habituelle de l'air environnant. Elle varie quelque peu avec les conditions météorologiques et décroît avec l'altitude. Au niveau de la mer, la pression atmosphérique vaut en moyenne 101 300 Pa ou 1,013 bar (760 mm de mercure). Elle est souvent appelée «pression atmosphérique normale».

Un «vide» se mesure par l'écart qui existe entre sa propre pression et la pression atmosphérique. Par exemple, si on pompe l'air d'un récipient jusqu'à ce que la pression interne devienne 0,690 bar et que la pression atmosphérique soit normale (1,013 bar), la pression dans le récipient est indiquée comme «vide» de $1{,}013 - 0{,}690 = 0{,}323$ bar.

PRESSION ABSOLUE ET PRESSION MANOMÉTRIQUE

Les mesures de pression sont généralement données en *pression absolue* ou en *pression manométrique*. La pression absolue a pour référence le zéro absolu qui est la pression la plus faible possible, celle qui existerait dans un vide parfait pris comme base. La pression manométrique est déterminée en prenant pour référence la pression atmosphérique. Ainsi, si la pression du fluide est supérieure de 5,5 kPa à la pression atmosphérique normale (101,3 kPa), sa pression manométrique vaudra 5,5 kPa tandis que sa pression absolue sera de $5{,}5 + 101{,}3 = 106{,}8$ kPa. Les pressions portent parfois les indices «a» et «g» pour signifier qu'il s'agit respectivement de pressions absolues et de pressions manométriques.

BAROMÈTRES

Un baromètre est un appareil servant à mesurer la pression atmosphérique. Un baromètre simple est constitué d'un tube d'au moins 762 mm, renversé sur un récipient ouvert contenant du mercure, fermé au sommet et ouvert à sa base pour permettre au mercure de monter. Au niveau de la mer, le mercure s'élève dans le tube à une hauteur voisine de 762 mm. Si le tube a une longueur supérieure à 762 mm, le vide existe au-dessus du mercure contenu dans le tube. Seule la pression atmosphérique crée l'ascension du mercure dans le tube; et bien évidemment, celle-ci dépend de la pression atmosphérique environnante. Le niveau du mercure monte et descend en fonction des variations de pression; une lecture directe du niveau du mercure donne la pression atmosphérique en hauteur (de mercure) qui peut être convertie, si on le désire, en unités usuelles (Pa ou bar) grâce à l'équation (*2*).

PIÉZOMÈTRES ET MANOMÈTRES

Si le baromètre peut être utilisé pour mesurer la pression de l'atmosphère, il est souvent nécessaire de mesurer également la pression d'autres fluides. Pour ce faire, il y a plusieurs méthodes. Pour les liquides, un tube est relié aux parois du récipient (ou du conduit) dans lequel se trouve le liquide; ce dernier peut ainsi monter dans le tube. En déterminant la hauteur à laquelle le liquide s'élève, on obtient, grâce à l'équation (*2*), la pression dans le récipient (ou le conduit). Un tel appareil est connu sous le nom de *piézomètre*. Pour éviter les effets de capillarité, le diamètre du tube piézométrique doit être d'environ 13 mm ou plus. Pour les applications, voir les problèmes 2.11 et 2.12.

Un appareil un peu plus compliqué, pour mesurer les pressions des fluides, est composé d'un ou plusieurs tube(s) recourbé(s) rempli(s) d'un ou plusieurs liquide(s) de densité différente; c'est un *manomètre*. Lorsqu'on l'utilise, on a généralement à une extrémité du tube une pression connue (qui peut être la pression atmosphérique) et on mesure la pression inconnue appliquée à l'autre extrémité. Dans certains cas, cependant, on désire connaître uniquement la différence de pression entre les deux extrémités du tube manométrique plutôt que chacune d'entre elles. Le manomètre donnant cette différence de pression se nomme *manomètre différentiel*. Dans un manomètre, les liquides montent ou descendent en fonction des pressions aux extrémités du tube.

On détermine la pression dans un récipient (ou dans un conduit) muni d'un manomètre en transformant les hauteurs de liquides dans les tubes à l'aide de la relation (*2*). La procédure générale de calcul consiste à commencer celui-ci à une extrémité des tubes manométriques et à le continuer en passant d'un niveau de fluide au niveau suivant. On additionne les pressions quand le niveau baisse, on les soustrait lorsqu'il monte. Chaque pression est déterminée à l'aide de l'équation (*2*) prenant en compte les densités des liquides manométriques. Pour les applications, voir les problèmes 2.14 à 2.22.

Problèmes résolus

2.1 Démontrer que la pression en un point est la même dans toutes les directions.

Solution

Considérons un petit prisme triangulaire de liquide au repos, soumis à l'action du fluide qui l'entoure. Les valeurs moyennes des pressions sur les trois surfaces sont p_1, p_2, p_3. Dans la direction z, les forces sont égales et opposées et s'annulent mutuellement (Fig. 2-1).

Ajoutons les forces dans les directions x et y, nous obtenons

$$\Sigma X = 0, \quad F_2 - F_3 \sin\theta = 0$$

ou

$$p_2(\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y) - p_3(\mathrm{d}s\ \mathrm{d}z)\sin\theta = 0$$

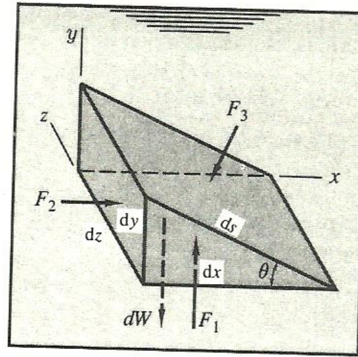


Fig. 2-1

$$\Sigma Y = 0, \quad F_1 - F_3 \cos\theta - \mathrm{d}W = 0$$

ou

$$p_1(\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y) - p_3(\mathrm{d}s\ \mathrm{d}z)\cos\theta - w(\frac{1}{2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z) = 0$$

Puisque $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\ \sin\theta$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\ \cos\theta$; les équations se ramènent aux suivantes :

$$p_2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - p_3\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = 0 \quad \text{ou} \quad p_2 = p_3 \qquad (1)$$

et

$$p_1 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - p_3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - w(\frac{1}{2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z) = 0 \quad \text{ou} \quad p_1 - p_3 - w(\frac{1}{2}\ \mathrm{d}y) = 0 \qquad (2)$$

Quand le prisme triangulaire tend vers un point, $\mathrm{d}y$ tend vers zéro et les pressions deviennent des pressions «ponctuelles». Alors, portant $\mathrm{d}y = 0$ dans l'équation (2) nous obtenons $p_1 = p_3$ et par conséquent $p_1 = p_2 = p_3$.

2.2 Démontrer l'expression $p_2 - p_1 = w(h_2 - h_1)$.

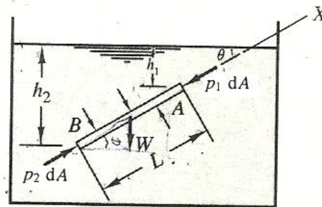


Fig. 2-2

Solution

Considérez la partie AB du liquide de la figure 2-2 comme un corps libre de surface transversale $\mathrm{d}A$, en équilibre sous l'effet de son propre poids et de l'effet des autres particules de liquide agissant sur le corps AB.

En A la force agissante est $p_1 \mathrm{d}A$ (la pression Pa), en B, elle vaut $p_2\ \mathrm{d}A$. Le poids du corps libre AB est $W = wv = wL\ \mathrm{d}A$. Les autres forces agissant sur le corps libre AB sont normales à ses côtés, et seules quelques-unes d'entre elles ont été représentées sur la figure. En prenant $\Sigma X = 0$, de telles forces normales ne figurent pas dans l'équation. Par conséquent

$$p_2\ \mathrm{d}A - p_1\ \mathrm{d}A - wL\ \mathrm{d}A \sin\theta = 0$$

Puisque $L \sin\theta = h_2 - h_1$, l'équation ci-dessus se ramène à $(p_2 - p_1) = w(h_2 - h_1)$.

2.3 Calculer la pression en Pa à une profondeur de 6 m au-dessous de la surface libre d'une masse d'eau.

Solution

En utilisant la valeur de 9 807 N/m³ pour w comme $(w = \rho g)$:

$$p = wh = 9\,807 \times 6 = 58\,840 \text{ Pa}$$

2.4 Déterminer la pression en bar à une profondeur de 9 m dans une huile de pétrole de densité 0,750.

Solution

$$p = \rho g h = 750 \times 9{,}807 \times 9 = 66\,200 \text{ Pa} = 0{,}662 \text{ bar}$$

2.5 Trouver la pression absolue en Pa du problème 2.3 quand le baromètre affiche 760 mm de mercure (densité 13,57).

Solution

$$\begin{aligned}\text{pression absolue} &= \text{pression atmosphérique} + \text{pression due à 6 m d'eau}\\ &= (13\,570 \times 9{,}807)(0{,}760) + (9\,807 \times 6) = 160\,000 \text{ Pa (abs.)}\end{aligned}$$

2.6 Quelle profondeur d'huile de pétrole de densité 0,750 produit une pression de 2,75 bar ? Quelle profondeur d'eau produit la même pression ?

Solution

$$h_{\text{huile}} = \frac{p}{w_{\text{huile}}} = \frac{2{,}75 \times 10^5}{750 \times 9{,}807} = 37{,}4 \text{ m}, \quad h_{\text{eau}} = \frac{p}{w_{\text{eau}}} = \frac{2{,}75 \times 10^5}{9\,807} = 28{,}0 \text{ m}$$

2.7 Trouver la pression au fond d'un réservoir contenant de la glycérine sous pression (voir la figure 2-3)

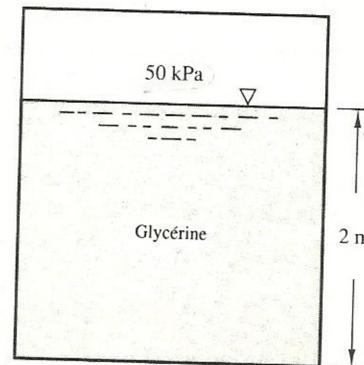


Fig. 2-3

Solution

Densité de la glycérine : 1,262 (cf. table 2)

$$\begin{aligned}p = \text{pression au fond} &= 50 + wh = 50 + (1{,}262 + 9{,}807 \times 2) \text{ en kPa}\\ &= 50 + (12{,}37)(2) = 74{,}7 \text{ kPa} = 0{,}747 \text{ bar}\end{aligned}$$

2.8 (*a*) Convertir une hauteur de 4,60 m d'eau en hauteur d'huile, de densité 0,750.
(*b*) Convertir une hauteur de mercure de 60 cm en hauteur d'huile, de densité 0,750.

Solution

$$(a) \quad h_{\text{huile}} = \frac{h_{\text{eau}}}{\text{dens.}_{\text{huile}}} = \frac{4{,}6}{0{,}750} = 6{,}13 \text{ m} \qquad (b)\ h_{\text{huile}} = \frac{h_{\text{eau}}}{\text{dens.}_{\text{huile}}} = \frac{13{,}57 \times 0{,}60}{0{,}750} = 10{,}85 \text{ m}$$

2.9 Concevoir un graphique sur lequel on puisse comparer facilement la pression absolue et celle qu'affiche le manomètre, en indiquant les limites.

Solution

Supposons que A dans la figure 2-4 représente une pression absolue de 3,770 bar. La pression lue sur le manomètre dépend de la pression atmosphérique régnante. Si cette pression est la pression atmosphérique normale au niveau de la mer (1,013 bar), la pression lue sur le manomètre en A est $3{,}770 - 1{,}013 = 2{,}757$ bar. Si la pression lue sur le baromètre était de 1,00 bar alors la pression lue au manomètre serait de $3{,}77 - 1{,}00 = 2{,}770$ bar (man).

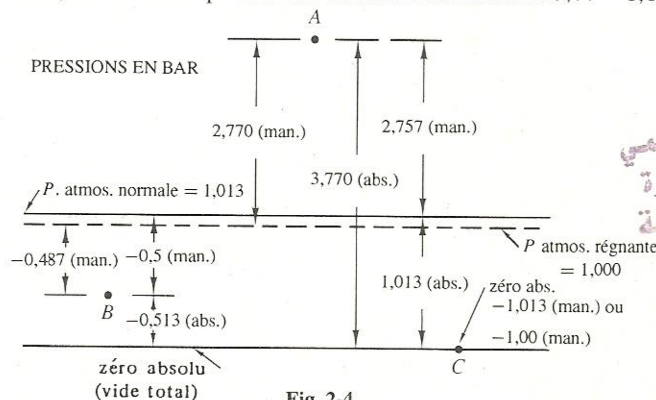


Fig. 2-4

Supposons que B représente une pression de 0,513 bar. Cette valeur apparaît sur le graphique comme inférieure à la pression atmosphérique normale de 1,013 bar et la pression lue au manomètre en B est de $0{,}513 - 1{,}013 = -0{,}500$ bar (man.). Si la pression atmosphérique régnante est de 1,000 bar, la pression lue au manomètre va être de $0{,}513 - 1{,}000 = -0{,}487$ bar (man.).

Soit C le point représentatif de la pression absolue nulle. Cette condition équivaut à la lecture au manomètre de l'opposé de la pression atmosphérique normale ($-1{,}013$ bar) ou à l'opposé de la pression atmosphérique courante de $-1{,}000$ bar.

Les conclusions à en tirer sont importantes. Les pressions négatives lues au manomètre ne peuvent dépasser la limite théorique de la pression atmosphérique courante ou la pression atmosphérique normale de $-1{,}013$ bar. Les pressions absolues ne peuvent pas être négatives.

2.10 Que vaut la pression atmosphérique en kPa quand le baromètre à mercure indique 742 mm ?

Solution

$$p = wh = 13\,540 \times 9{,}81 \times 0{,}742 = 98\,560 \text{ Pa} = 98{,}56 \text{ kPa} = 0{,}985\,6 \text{ bar}$$

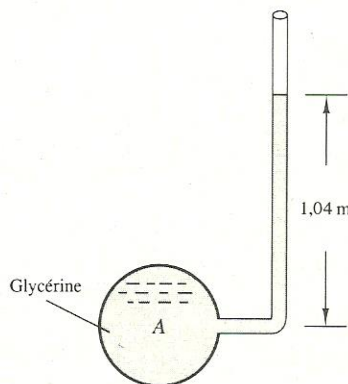


Fig. 2-5

2.11 Le récipient de la figure 2-5 contient de la glycérine sous pression. Trouver la pression au point A.

Solution

La densité de la glycérine est donnée dans la table 2 : $d = 1{,}262 \Longleftrightarrow \rho = 1\,262$ kg/m^3

$$p = wh = \rho g h = 1\,262 \times 9{,}81 \times 1{,}04 = 12\,875 \text{ Pa}$$

2.12 Le réservoir ouvert de la figure 2-6 possède deux piézomètres A et B et contient deux liquides non miscibles. Trouver :
(a) la hauteur de la surface liquide dans le piézomètre A;
(b) la hauteur de la surface liquide dans le piézomètre B;
(c) la pression totale dans le fond du réservoir.

Solution

(a) Le liquide A s'élèvera, dans le piézomètre A, à la même hauteur que le liquide A dans le réservoir ($h = 2$ m).

(b) Le liquide B s'élèvera, dans le piézomètre B, à la hauteur de 0,3 m (pression exercée par le liquide B) plus une hauteur additionnelle h_A due à la pression p_A du liquide A :

$$p_A = w_A h_A = 720 \times 9{,}81 \times 1{,}7 = 12\,007 \text{ Pa}$$

$$h_A = p_A / w_A = \frac{12\,007}{2\,360} : 9{,}81 = 0{,}519 \text{ m}$$

Le liquide B s'élève donc dans le piézomètre B à la hauteur $0{,}3 + 0{,}519 = 0{,}819$ m.

(c) La pression au fond vaut P :

$$P = (2\,360 \times 9{,}81 \times 0{,}3) + (720 \times 9{,}81 \times 1{,}7) \approx 18\,950 \text{ Pa} = 18{,}95 \text{ kPa}$$

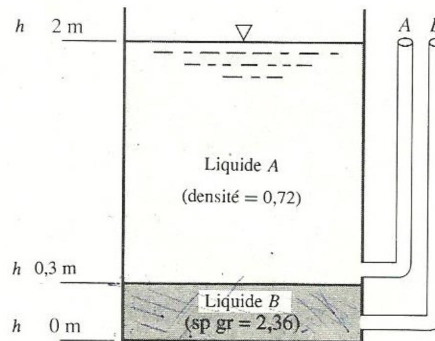


Fig. 2-6

2.13 Dans la figure 2-7, les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de 40 et 4 000 cm^2 et B a une masse de 4 000 kg. Le récipient et les conduits sont remplis d'huile de densité 0,750. Quelle force F assurera l'équilibre, en négligeant le poids de A ?

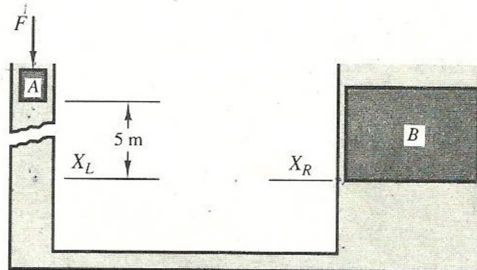


Fig. 2-7

Solution

Déterminons d'abord la pression agissant sur le piston A. Puisque X_L et X_R sont au même niveau dans le même liquide, alors

$$\text{pression en } X_L = \text{pression en } X_R$$

ou

$$\text{pression sous } A + \text{pression due à 5 m d'huile} = \frac{\text{poids de } B}{\text{surface de } B}$$

En substituant

$$p_A + wh = \frac{4\,000 \times 9{,}807\ (\text{N})}{0{,}4\ \text{m}^2}$$
$$p_A + 750 \times 5 \times 9{,}807 = 98\,070\ \text{Pa}$$

d'où $p_A = 61\,300$ Pa

$$\text{Force } F = \text{pression uniforme} \times \text{surface} = 61\,300\ \text{Pa} \times 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 = 245\ \text{N}$$

2.14 Calculer la pression manométrique en A (en bar) due à la dénivellation du mercure, de densité 13,57 dans le manomètre en U représenté dans la figure 2-8.

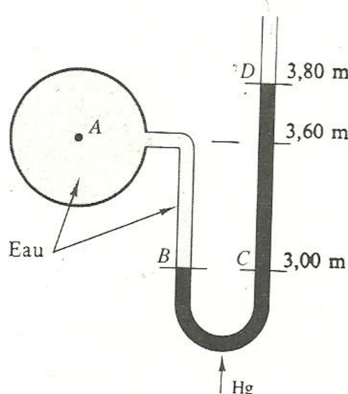


Fig. 2-8

Solution

B et C sont au même niveau dans le même liquide, le mercure, ainsi nous égalons les pressions en B et C exprimées en pression manométrique en Pa.

$$\text{pression en } B = \text{pression en } C$$
$$p_A + wh\ (\text{pour l'eau}) = p_D + wh\ (\text{pour le mercure})$$
$$p_A + 9{,}807(3{,}60 - 3{,}00) = 0 + (13{,}57 \times 9{,}807)(3{,}80 - 3{,}00)$$

En résolvant $p_A = 100\,580\ \text{Pa} = 100\,580/10^5 = 1{,}005\,8$ bar (man.)

Une autre méthode de résolution utilisant les hauteurs d'eau en m. demande en général moins de calculs, comme suit :

$$\text{hauteur de pression en } B = \text{hauteur de pression en } C$$
$$p_A/w + 0{,}60\ \text{m d'eau} = 0{,}80 \times 13{,}57\ \text{m d'eau}$$

En résolvant, $p_A/w = 10{,}256$ m d'eau et $p_A = (1\,000 \times 9{,}807 \times 10{,}256)/10^5 = 1{,}005\,8$ bar (man.) comme auparavant.

2.15 Un manomètre est relié à un réservoir contenant trois fluides différents (Fig. 2-9). Trouver la différence de hauteur de la colonne de mercure du manomètre.

Solution

$$\text{pression en } A = \text{pression en } B$$

$$30\,000 + (820 \times 9{,}81 \times 3) + (1\,000 \times 9{,}81 \times 3) = 13\,600 \times 9{,}81y$$

$$y = 0{,}626 \text{ m}$$

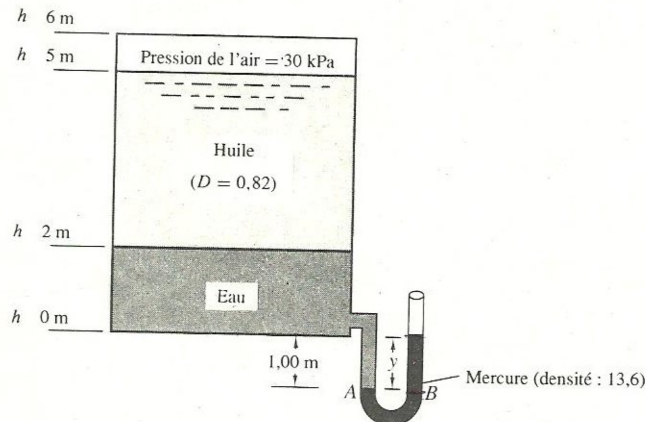


Fig. 2-9

2.16 De l'huile de densité 0,750 coule à travers la buse représentée dans la figure 2-10 ci-dessous et fait monter le mercure dans le manomètre en U. Calculer la valeur de h si la pression en A est de 1,38 bar.

Solution

Pression en B = pression en C utilisant comme unité le bar,

$$p_A + \frac{wh}{10^5}(\text{huile}) = p_D + \frac{wh}{10^5}(\text{mercure})$$

$$1{,}38 + \frac{(0{,}750 \times 9\,810)(0{,}8 + h)}{10^5} = \frac{(13{,}57 \times 9\,810)}{10^5}$$

et $$h = 1{,}14 \text{ m.}$$

Autre méthode : en utilisant l'unité commode qu'est le «m» d'eau,

$$\text{hauteur de pression en } B = \text{hauteur de pression en } C$$

$$\frac{1{,}38 \times 10^5}{9\,810} + (0{,}8 + h)0{,}750 = 13{,}57h$$

et $$h = 1{,}14 \text{ m, comme auparavant}$$

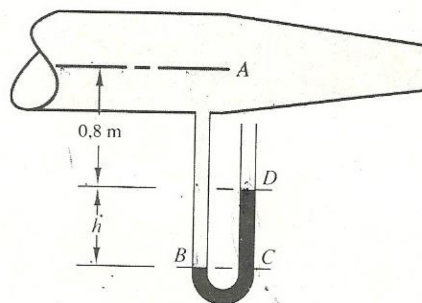


Fig. 2-10

2.17 Pour une pression manométrique en A de $-0,110$ bar, trouver la densité du liquide B contenu dans le manomètre de la figure 2-11.

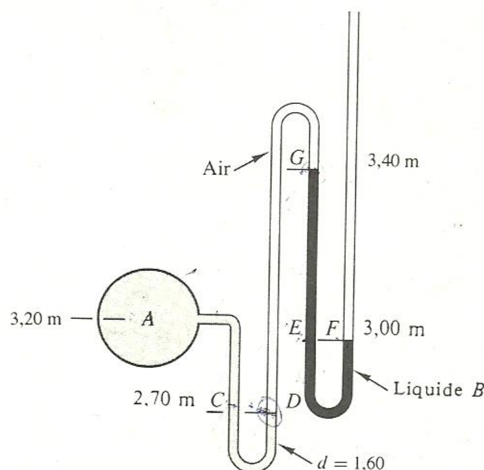


Fig. 2-11

Solution

$$\text{Pression en } C = \text{pression en } D$$

ou, en Pa,

$$p_A + wh = p_D$$
$$-0,11 \times 10^5 + (1,60 \times 9\,810)0,5 = p_D = -3\,150 \text{ Pa}$$

À présent, $p_G = p_D = -3\,150$ Pa puisque le poids de 0,7 m d'air peut être négligé sans introduire d'erreur appréciable. Aussi $p_E = p_F = 0$ en N (man.)

Ainsi, pression en G = pression en E − pression de (3,4 − 3,00) m de liquide manométrique ou

$$p_G = p_E - (d \times 9\,810)(3,4 - 3,00)$$
$$-3\,150 = 0 - (d \times 9\,810)0,4 \text{ et } d = 0,80$$

2.18 Pour un manomètre affichant en A − 17 650 Pa, déterminer (*a*) la hauteur des liquides dans les colonnes ouvertes du piézomètre E, F et G et (*b*) la hauteur de mercure dans le manomètre en U de la figure 2-12.

Solution

(*a*) Puisque le poids spécifique de l'air (environ 12 N/m^3) est très petit par rapport à celui des liquides, la pression à la hauteur de 15 m peut être considérée comme étant égale à $-17,65$ kPa sans introduire d'erreur appréciable dans les calculs.

Pour la colonne *E*. La hauteur L étant celle qui est représentée, nous avons en Pa manométriques

$$p_k = p_L$$

Alors
$$p_H + wh = 0$$
ou
$$-17\,650 + (0,700 \times 9\,810)h = 0$$

et $h = 2,57$ m.

Ainsi la hauteur en L est de $15,00 - 2,57 = 12,43$ m.

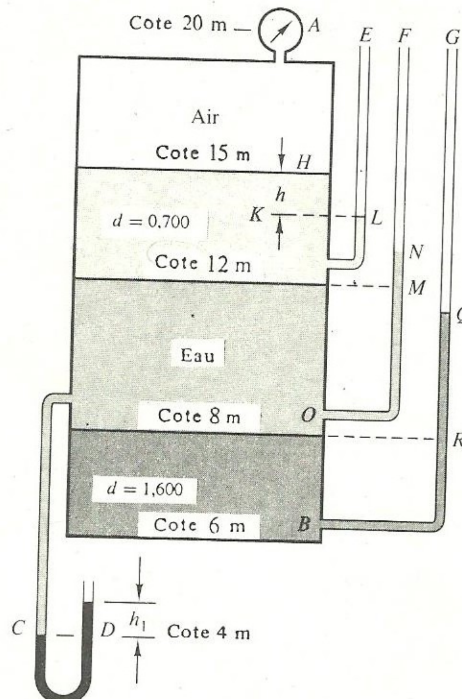


Fig. 2-12

Pour la colonne *F*. La pression à la hauteur de 12 m = pression à la hauteur de 15 m + pression du liquide de densité 0,700 qui doit égaler la pression en M.

$$= -17\,650 + (0{,}700 \times 9\,810)(15 - 12) = 2\,950 \text{ Pa}$$

Ainsi la hauteur de pression en M est $\dfrac{2\,950}{9\,810} = 0{,}30$ m d'eau, et le liquide montera dans la colonne F de 0,30 m au-dessus de M, c'est-à-dire atteindra la hauteur de 12,30 m en N.

Pour la colonne *G*. La pression à la hauteur 8 m = pression à la hauteur 12 m + pression de 4 m d'eau, soit

$$p_O = 2\,950 + 9\,810 \times 4 = 42\,190 \text{ Pa}$$

qui doit être égale à la pression en R. Alors la hauteur de pression en R est de $\dfrac{42\,190}{1{,}600 \times 9\,810} = 2{,}69$ m du liquide, et le liquide montera dans la colonne G de 2,69 m au-dessus de R, soit à la hauteur de 10,69 m en Q.

(*b*) Pour le manomètre en U, en mètres d'eau :

hauteur de pression en D = hauteur de pression en C

$$13{,}57\, h_1 = \text{hauteur de pression à la cote 12 m} + \text{hauteur de pression de 8 m d'eau}$$

$$13{,}57\, h_1 = 0{,}30 + 8{,}00$$

d'où $h_1 = 0{,}61$ m.

2.19 Un manomètre différentiel est fixé entre deux sections A et B d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est de 0,60 m, le niveau le plus proche de A étant le plus bas. Calculer la différence de pression en Pa entre les sections A et B. On se reportera à la figure 2-13 ci-après.

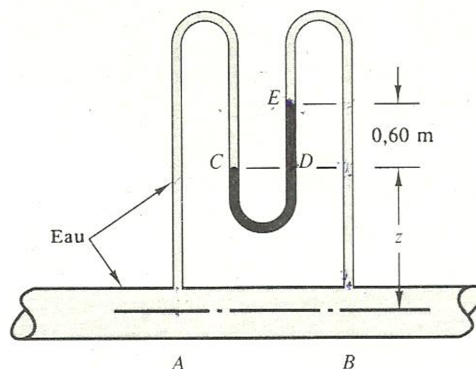


Fig. 2-13

Solution

Note. On aura recours à un croquis pour éclairer l'analyse de tous les problèmes, aussi bien que pour réduire les erreurs. Même un diagramme d'une ligne suffit.

$$\text{hauteur de pression en } C = \text{hauteur de pression en } D$$

soit, en mètres d'eau $p_A/w - z = [p_B/w - (z + 0{,}60)] + 13{,}57(0{,}60)$

Alors, $p_A/w - p_B/w$ = différence des hauteurs de pression $= 0{,}60(13{,}57 - 1) = 7{,}54$ m d'eau et

$$p_A - p_B = (7{,}54 \times 9\,810) \approx 74\,000 \text{ Pa}$$

Si $(p_A - p_B)$ avait été négatif, la pression en B aurait dépassé la pression en A de 74 000 Pa.

On doit prendre soin d'éliminer tout l'air des manomètres différentiels avant d'effectuer les lectures.

2.20 La chute de pression à travers le dispositif X doit être mesurée à l'aide d'un manomètre différentiel utilisant de l'huile de densité 0,750 comme fluide manométrique; le liquide en circulation a pour densité 1,50. Trouver la différence de hauteur de pression entre A et B pour la dénivellation de l'huile représentée dans la figure 2-14.

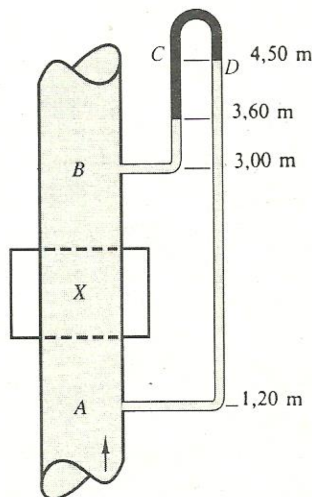


Fig. 2-14

Solution

Pression en C en Pa = pression en D en Pa :

$$p_B - (1{,}50 \times 9\,810)0{,}60 - (0{,}750 \times 9\,810)0{,}90 = p_A - (1{,}50 \times 9\,810)3{,}30$$

Alors $p_A - p_B = 33\,100$ Pa et la différence de hauteur de pression $= \dfrac{33\,100}{w} = \dfrac{33\,100}{1{,}50 \times 9\,810} = 2{,}25$ m de liquide.

Autre méthode. En m liquide (densité 1,50)

hauteur de pression en C = hauteur de pression en D

$$\frac{p_B}{w} - 0,60 - \frac{0,750 \times 0,90}{1,50} = \frac{p_A}{w} - 3,30$$

Alors $p_A/w - p_B/w$ = différence de hauteur de pression = 2,25 m de liquide, comme auparavant.

2.21 Les récipients A et B contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar. Quelle est la dénivellation du mercure du manomètre différentiel de la figure 2-15 ci-dessous ?

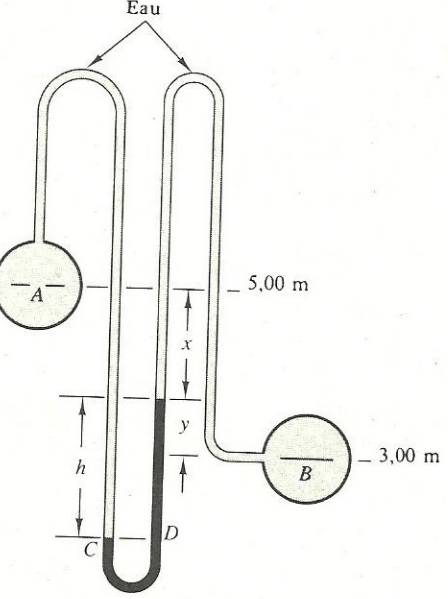


Fig. 2-15

Solution

Hauteur de pression en C = hauteur de pression en D

$$\frac{2,80 \times 10^5}{9\,810} + x + h = \frac{1,40 \times 10^5}{9\,810} - y + 13,57\,h \text{ (en m d'eau)}$$

En réarrangeant, $(10^5/9\,810)(2,80 - 1,40) + x + y = (13,57 - 1)h$. En substituant $x + y = 2,00$ m et en résolvant, nous obtenons $h = 1,29$ m.

2.22 La hauteur de pression au niveau $A - A$ est de 0,09 m d'eau et les poids spécifiques du gaz et de l'air sont respectivement de 5,5 et 12,4 N/m^3. Calculer ce qu'affiche le manomètre à eau qui mesure la pression du gaz au niveau B dans la figure 2-16 ci-après.

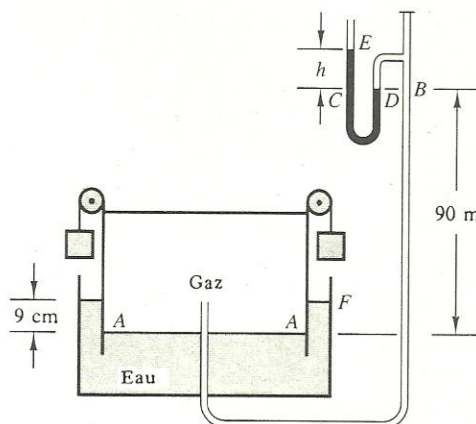


Fig. 2-16

Solution

Admettons que les valeurs de w pour l'air et le gaz demeurent constantes pour les 90 m de dénivellation. Puisque les masses spécifiques du gaz et de l'air sont du même ordre de grandeur, on doit tenir compte de la variation de la pression atmosphérique avec l'altitude. Il est recommandé d'employer des unités de pression absolue.

$$\text{pression absolue } p_C = \text{pression absolue } p_D \text{ (Pa)}$$

$$\text{pression atmosphérique } p_E + 9\,810h = \text{pression absolue } p_A - 5{,}5 \times 90 \qquad (A)$$

On doit à présent calculer la pression absolue en A en fonction de la pression atmosphérique en E, pour obtenir d'abord la pression atmosphérique en F et ensuite p_A.

$$\text{pression absolue } p_A = (\text{pression atmosphérique } p_E + 12{,}4(h + 90 - 0{,}09)) + 0{,}09 \times 9\,810 \text{ (Pa)}$$

Substituant cette valeur dans (A), en simplifiant la pression atmosphérique p_E et en négligeant les termes très petits, nous avons

$$9\,810\,h = 90(12{,}4 - 5{,}5) + 0{,}09(9\,810)$$

et

$$h = 0{,}153 \text{ m d'eau.}$$

2.23 Quelle est l'intensité de la pression dans l'océan à une profondeur de 1 500 m, en admettant (a) que l'eau salée est incompressible et (b) que l'eau salée est compressible et pèse 10 050 N/m^3 ? $E = 2{,}07$ GPa (constant).

Solution

(a) Intensité de la pression $p = wh = 10\,050 \times 1\,500 = 15{,}08 \times 10^6$ Pa (man.).

(b) Puisque la masse donnée ne varie pas lorsqu'on la comprime, $\mathrm{d}M = 0$, alors

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}(\rho v) = \rho\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}\rho = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}v/v = -\mathrm{d}\rho/\rho \qquad (A)$$

D'après les équations (4) et (11) $= \mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}h$ et $\mathrm{d}v/v = -\mathrm{d}p/E$. En reportant dans (A),

$$\mathrm{d}p/E = \mathrm{d}\rho/\rho \qquad (B)$$

Intégrons, $p = E \ln \rho + C$. À la surface $p = p_0$, $\rho = \rho_0$; alors $C = p_0 - E \ln \rho_0$ et

$$p = E \ln \rho + p_0 - E \ln \rho_0 \quad \text{ou} \quad (p - p_0) = E \ln(\rho/\rho_0) \qquad (C)$$

Posons $dp = -\rho g \, dh$ dans (B) :

$$\frac{-\rho g \, dh}{E} = \frac{d\rho}{\rho} \text{ ou } dh = -\frac{E \, d\rho}{g\rho^2}.$$

Si l'on intègre :

$$h = \frac{E}{\rho g} + C_1 \qquad (D)$$

À la surface, $h = 0$, $\rho = \rho_0$; alors $C_1 = \dfrac{-E}{\rho_0 g}$, $\quad h = \dfrac{E}{g}\left(\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho_0}\right) = \dfrac{E}{w} - \dfrac{E}{w_0}$

$$w = \frac{w_0 E}{w_0 h + E} = \frac{(10\,050)(2{,}07 \times 10^9)}{(10\,050)(-1\,500) + (2{,}07 \times 10^9)} = 10\,120 \text{ N/m}^3$$

nous rappelant que h est positive vers le haut, et utilisant le Pa pour E. D'après (C),

$$p = (2{,}07 \times 10^9) \ln(10\,120/10\,050) = 14{,}4 \text{ MPa (man.)}$$

2.24 Calculer la pression barométrique en bar à l'altitude de 1 200 m si la pression au niveau de la mer est de 1,013 bar. On suppose les conditions isothermes à 21 °C.

Solution

Le poids spécifique de l'air à 21 °C est $w = \dfrac{pg}{287(273 + 21)}$. Alors, d'après l'équation (4),

$$dp = -w \, dh = -\frac{9{,}81p}{287(294)} \, dh \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = -0{,}000\,116 \, dh \qquad (A)$$

En intégrant (A), $\ln p = -0{,}000\,116\,3\,h + C$ où C est la constante d'intégration.

Pour calculer C : quand $h = 0$, $p = 1{,}013 \times 10^5$ Pa (abs.). D'où $C = \ln(1{,}013 \times 10^5)$ et

$$\ln p = -0{,}000\,116\,3\,h + \ln(1{,}013 \times 10^5)$$

ou

$$0{,}000\,116\,3\,h = \ln(1{,}013 \times 10^5/p) \qquad (B)$$
$$0{,}140 = 11{,}526 - \ln p$$
$$p \approx 88\,000 \text{ Pa} = 0{,}88 \text{ bar.}$$

2.25 Trouver une expression générale reliant la pression à l'altitude dans des conditions isothermes, en utilisant $dp = -w \, dh = -\rho g \, dh$

Solution

Pour des conditions isothermes, l'équation $\dfrac{p}{wT} = \dfrac{p_0}{w_0 T_0}$ devient $\dfrac{p}{w} = \dfrac{p_0}{w_0}$ ou $w = w_0 \dfrac{p}{p_0}$.

Alors, $dh = -\dfrac{dp}{w} = -\dfrac{p_0}{w_0}\dfrac{dp}{p}$. En intégrant, $\displaystyle\int_{h_0}^{h} dh = -\frac{p_0}{w_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}$ et

$$h - h_0 = -\frac{p_0}{w_0}(\ln p - \ln p_0) = +\frac{p_0}{w_0}(\ln p_0 - \ln p) = \frac{p_0}{w_0} \ln \frac{p_0}{p} = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_0}{p}$$

En réalité, la température de l'atmosphère décroît avec l'altitude. Ainsi la solution exacte nécessite la connaissance des variations de température et l'emploi de la loi des gaz $p/\rho T$ = constante (ou p/wT = cte).

2.26 Trouver la différence de pression entre A et B dans le montage de la figure 2-17.

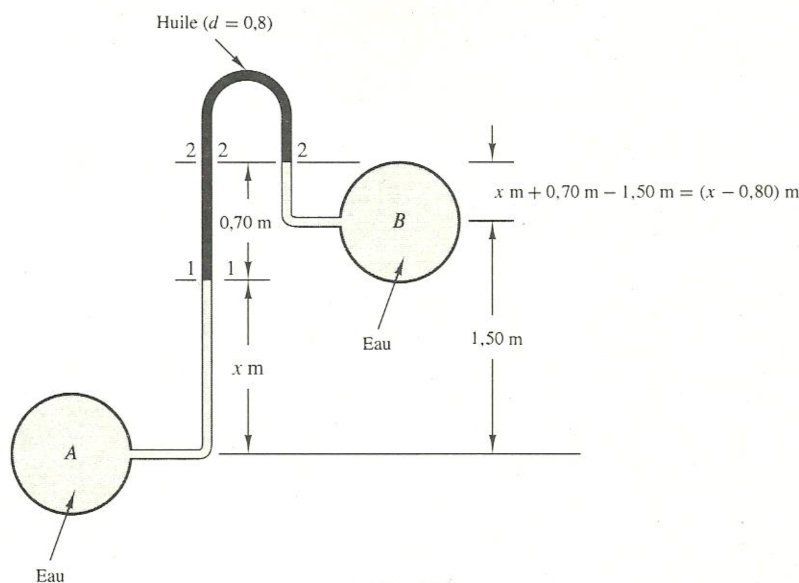


Fig. 2-17

Solution

$$p_A - 9{,}79x - (0{,}8 \times 9{,}79)(0{,}70) + (9{,}79)(x - 0{,}80) = p_B$$

$$p_A - 9{,}79x - 5{,}482 + 9{,}79x - 7{,}832) = p_B$$

$$p_A - p_B = 13{,}3 \text{ kPa}$$

2.27 Un manomètre différentiel est relié à deux réservoirs A et B (figure 2-18). Calculer la différence de pression entre les chambres A et B.

Solution

$$\rho_{\text{mercure}} = 132{,}8 \text{ kN/m}^3;\ \rho_{\text{huile SAE30}} = 8{,}996 \text{ kN/m}^3;\ \rho_{\text{tétrachlorure}} = 15{,}57 \text{ kN/m}^3$$

$$p_A + (8{,}996)(1{,}1) + (132{,}8)(0{,}3) - (15{,}57)(0{,}8) = p_B$$

$$p_A - p_B = -37{,}28 \text{ kPa ((c'est-à-dire } p_B > p_A)$$

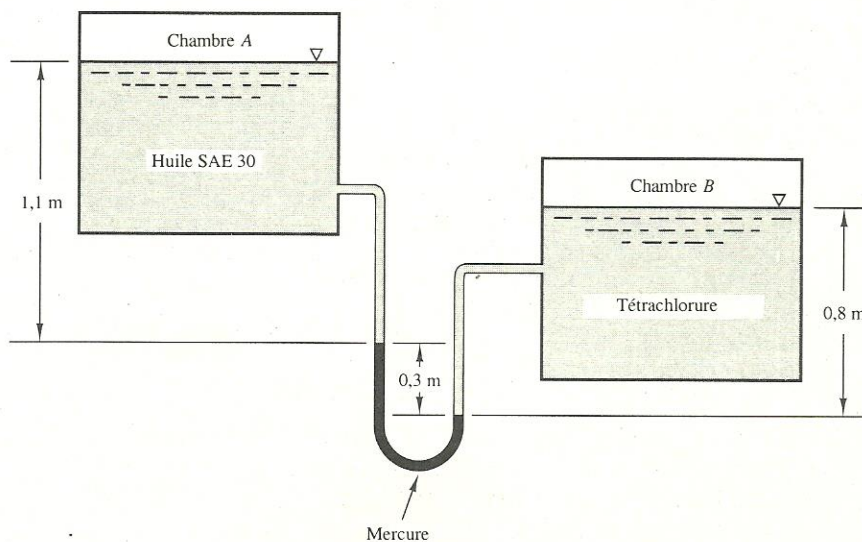


Fig. 2-18

Problèmes supplémentaires

2.28 Un tube en U est ouvert à l'atmosphère à ses deux extrémités (Fig. 2-19). Le tube en U contient de l'huile et de l'eau; déterminer la densité de l'huile. *Rép.* 0,86.

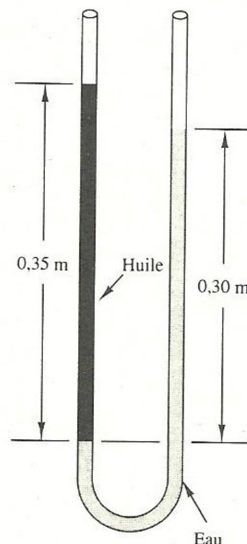


Fig. 2-19

2.29 Le réservoir de la figure 2-20 contient de l'huile de densité 0,750. Calculer la valeur affichée par le manomètre *A* en bar. *Rép.* −0,008 7 bar (man.).

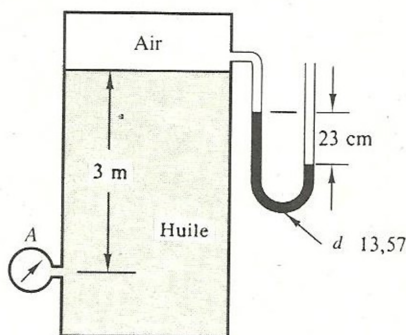


Fig. 2-20

2.30 Un réservoir fermé contient 60 cm de mercure, 150 cm d'eau et 240 cm d'une huile de densité 0,750 et de l'air au-dessus de l'huile. Si la pression au fond du réservoir est de 2,94 bar, qu'affiche le manomètre en haut du réservoir? *Rép.* 1,82 bar (man.).

2.31 En se reportant à la figure 2-21, le point *A* est à 53 cm de la surface du liquide, de densité 1,25 contenu dans le récipient. Quelle est la pression en *A* en bar (man.) si le mercure s'élève de 34,30 cm dans le tube? *Rép.* −0,39 bar (man.).

2.32 Calculer le poids du piston dans le schéma de la figure 2-22, sachant que le manomètre indique une pression de 70 kPa. *Rép.* 61,6 kN.

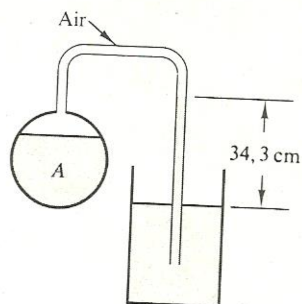


Fig. 2-21

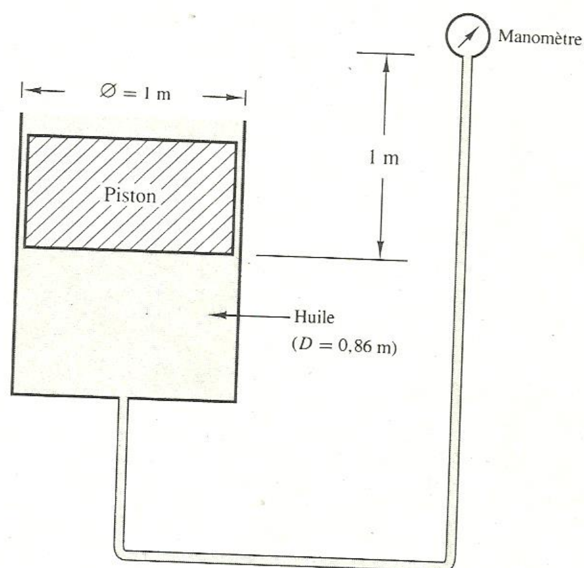


Fig. 2-22

2.33 Reportons-nous à la figure 2-23. Négligeant le frottement entre le piston A et le réservoir de gaz, trouver ce qu'affiche le manomètre en B en cm d'eau. On admettra que le gaz et l'air ont une masse volumique constante égale respectivement à 0,560 et 1,200 kg/m^3. *Rép.* 45,5 cm d'eau.

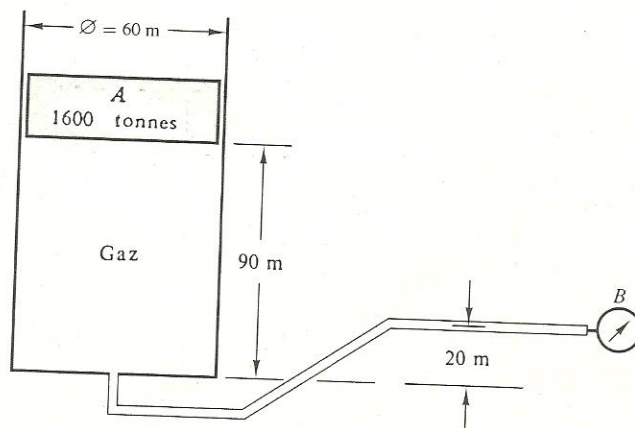


Fig. 2-23

2.34 Les réservoirs A et B contenant respectivement de l'huile et de la glycérine de densités 0,780 et 1,25 sont mis e communication à l'aide d'un manomètre différentiel. Le mercure du manomètre est à une hauteur de 50 cm du côté de A et de 35 cm du côté de B. Si la cote de la surface de la glycérine du réservoir B est de 6,40 m, quelle est la cote de la surface de l'huile dans le réservoir A? *Rép.* cote 7,60 m.

2.35 Un réservoir A, à la cote 2,44 contient de l'eau à une pression de 1,03 bar. Un autre réservoir B, à la cote 3,66 m contient un liquide à une pression de 0,69 bar. Si la dénivellation d'un manomètre différentiel est de 30,5 mm de mercure, niveau le plus bas du côté de A à la côte 30 cm, calculer la densité du liquide du récipient B. *Rép.* 0,500

2.36 Dans le réservoir de gauche de la figure 2-24, la pression de l'air est de −23 cm de mercure. Calculer la dénivellation du liquide manométrique dans la colonne de droite en A. *Rép.* dénivellation : 26,3 cm.

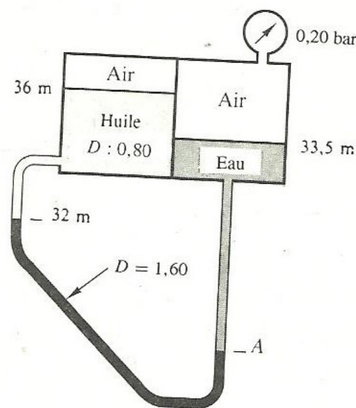


Fig. 2-24

2.37 Les compartiments B et C de la figure 2-25 sont fermés et remplis d'air. Le baromètre affiche 1 bar. Quand les manomètres A et D présentent les chiffres indiqués, quelle est la valeur de x du manomètre E (les deux tubes en U sont des manomètres à mercure)? *Rép.* 1,82 m.

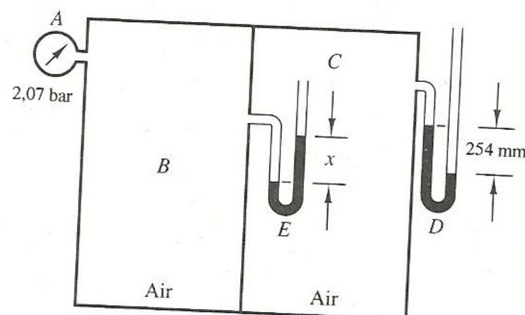


Fig. 2-25

2.38 Le cylindre et les conduits de la figure 2-26 contiennent de l'huile de densité 0,902. Pour une lecture manométrique de 2,15 bar, quel est le poids total du piston et le poids W. *Rép.* 590 KN.

2.39 Déterminer la différence de pression entre les canalisations A et B du manomètre différentiel de la figure 2-27. *Rép.* 124 kPa.

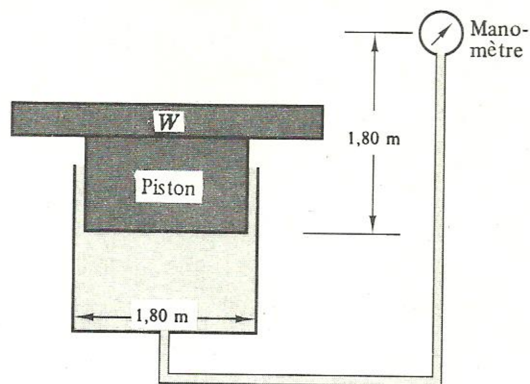


Fig. 2-26

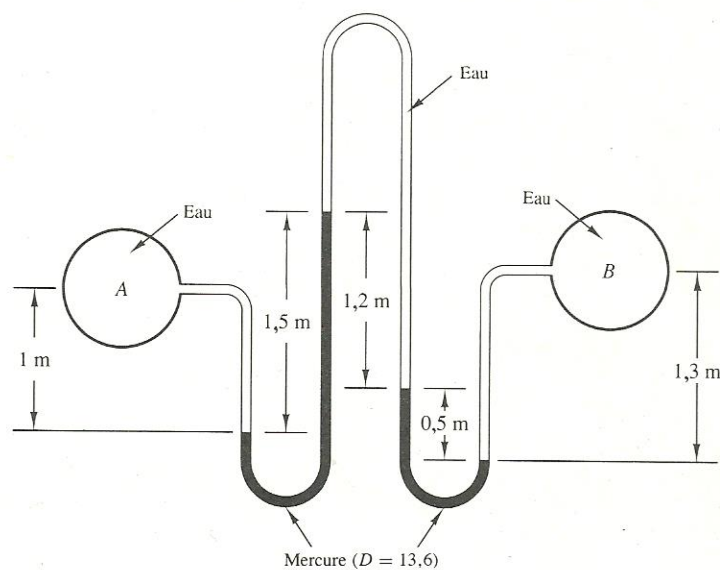


Fig. 2-27

2.40 Le récipient de la figure 2-28 contient de l'huile sous pression. Trouver la hauteur du niveau d'huile dans le piézomètre.
Rép. 6,31 m.

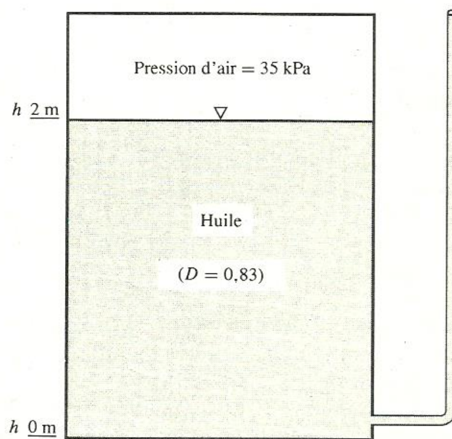


Fig. 2-28

2.41 Se reportant à la figure 2-29, pour quelle valeur marquée au manomètre A la glycérine s'élèvera-t-elle au niveau B? Les masses volumiques de l'huile et de la glycérine sont respectivement de 832 et 1 250 kg/m^3. *Rép.* 0,35 bar.

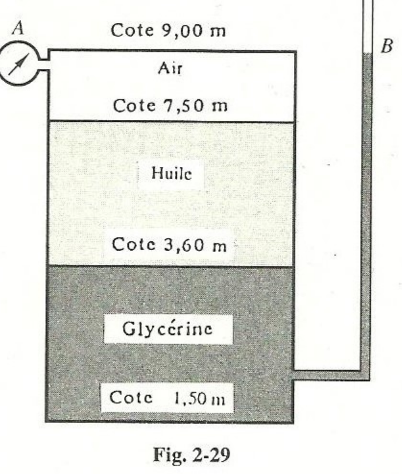


Fig. 2-29

2.42 On utilise un dispositif hydraulique pour soulever un camion pesant 89 kN. Si c'est de l'huile, de densité 0,810 qui agit sur le piston à la pression de 1,22 MPa quel est le diamètre nécessaire? *Rép.* 305 mm.

2.43 Si la masse volumique de la glycérine est de 1 260 kg/m^3, quelle est la pression de succion nécessaire pour faire monter la glycérine de 22 cm verticalement dans un tube de 12,50 mm de diamètre? *Rép.* −0,027 bar.

2.44 Quelle est la pression régnant à l'intérieur d'une goutte de pluie de 1,50 mm de diamètre si la température est de 21 °C? *Rép.* 193 Pa (man.).

2.45 La surface liquide d'un piézomètre lié à un conduit s'élève à 1,0 m au-dessus du point A (Fig. 2-30). Trouver la pression au point A sachant que le liquide est (a) de l'eau, (b) du mercure. *Rép.* (a) 9,79 kPa, (b) 133 kPa.

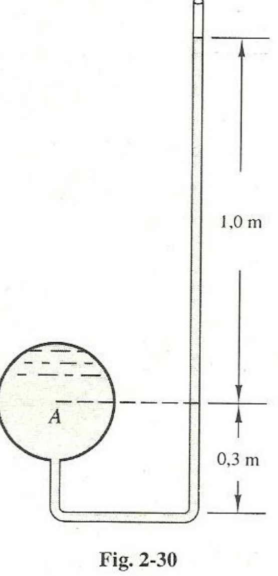


Fig. 2-30

Chapitre 3

Forces hydrostatiques s'exerçant sur les surfaces

INTRODUCTION

Dans l'exercice de leurs fonctions, les ingénieurs ont souvent à calculer les forces exercées par les fluides afin de concevoir, de façon satisfaisante, les structures qui les contiennent. Dans ce chapitre, on évaluera les trois caractéristiques des forces hydrostatiques : la grandeur, la direction et le sens. En plus, on trouvera le point d'application de la force.

FORCE EXERCÉE PAR UN LIQUIDE SUR UNE SURFACE PLANE

La force F exercée par un liquide sur une surface plane A est égale au produit du poids spécifique w du liquide, par la profondeur h_g du centre de gravité de la surface et par la surface. L'équation est :

$$F = wh_g A = \rho g h_g A \qquad (1)$$

exprimée en

$$\mathrm{N} = (\mathrm{N/m^3}) \times \mathrm{m} \times \mathrm{m^2}$$

On notera que le produit du poids spécifique w par la profondeur du centre de gravité de la surface donne l'intensité de la pression au centre de gravité de cette surface.

La *ligne d'action* de la force passe par le centre de poussée qu'on peut localiser en appliquant la formule

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg} \qquad (2)$$

où I_{cg} est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe du centre de gravité (voir Fig. 3-1). Les distances y sont mesurées le long du plan à partir d'un axe situé à l'intersection du plan et de la surface du liquide, tous les deux prolongés s'il est nécessaire.

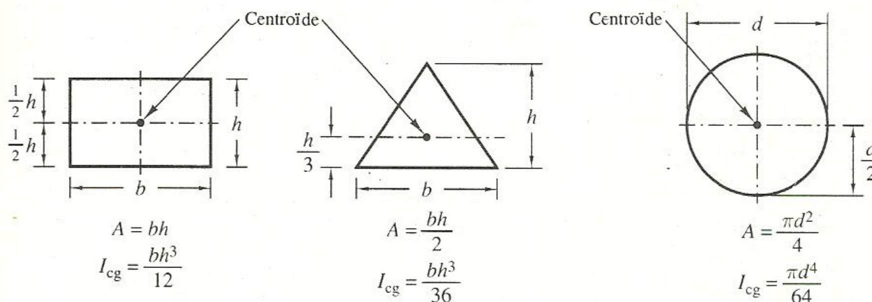


Fig. 3-1

FORCE EXERCÉE PAR UN LIQUIDE SUR UNE SURFACE COURBE

La *composante horizontale* de la force hydrostatique sur une surface courbe est égale à la force normale à la projection verticale de la surface. La composante s'applique au centre de poussée de la projection verticale.

La *composante verticale* de la force hydrostatique sur la surface courbe est égale au poids du volume de liquide situé au-dessus de cette surface réelle ou imaginaire. La force s'applique au centre de gravité du volume.

TENSION DE CIRCONFÉRENCE OU TANGENTIELLE

La tension de circonférence ou tangentielle en N/m^2 est celle à laquelle sont soumises les parois d'un cylindre supportant une pression interne. Pour des cylindres à parois minces ($t < 0,1d$),

$$\text{Tension } \sigma \text{ (Pa)} = \frac{\text{pression } p \text{ (Pa)} \times \text{rayon } r \text{ (m)}}{\text{épaisseur } t \text{ (m)}} \tag{3}$$

TENSION LONGITUDINALE DANS LES CYLINDRES À PAROIS MINCES

La tension longitudinale (Pa) dans les cylindres à parois minces fermés aux deux extrémités vaut la moitié de la tension de circonférence.

FORCES HYDROSTATIQUES SUR LES BARRAGES

Un barrage est soumis à des forces hydrostatiques considérables qui tendent (1) à le faire glisser horizontalement sur sa base et (2) à le faire basculer autour de son bord situé en aval (connu sous le nom de *pied* du barrage). Un autre facteur pouvant affecter la stabilité du barrage est la poussée ascendante appliquée sous le fond et créée par des infiltrations d'eau. On effectue des tests de stabilité du barrage en mesurant (1) le facteur de sécurité anti-glissement, (2) le facteur de sécurité anti-basculement et (3) l'intensité de la pression à la base du barrage.

Le facteur de sécurité d'anti-glissement est déterminé en divisant la résistance au glissement par la force de glissement. Le facteur de sécurité anti-basculement se calcule en divisant le moment de rappel total résistant par le moment total de basculement, tous les moments étant pris par rapport au pied du barrage. La pression p sur la base peut être calculée à l'aide de la formule de fléchissement.

$$p = \frac{F}{A} \pm \frac{M_y x}{I_y} \pm \frac{M_x y}{I_x} \tag{4}$$

où
- p : intensité de la pression
- F : charge totale verticale
- A : aire de la base du barrage
- M_x, M_y : moments totaux autour des axes xx' et yy' respectivement
- I_x, I_y : moments d'inertie autour des axes xx' et yy' respectivement
- x, y : distance du centroïde au point où la pression est calculée le long des axes $x'x$ et $y'y$ respectivement.

L'équation (*4*) donne la distribution de pression le long de la base du barrage si la réaction (résultante) sur la base est appliquée à l'intérieur de son tiers médian.

Problèmes résolus

3.1 Établir (*a*) l'équation de la force hydrostatique s'exerçant sur une surface plane et (*b*) situer le point d'application de la force.

Solution

(*a*) Soit AB la trace d'une surface plane quelconque soumise à l'action du fluide et faisant l'angle θ avec l'horizontale, comme le montre la figure 3-2. Considérons un élément d'aire dont tous les points sont à la même distance h au-dessous du niveau du liquide. La bande horizontale hachurée représente un tel élément de surface, et la pression est uniforme pour cette surface. Alors la force agissant sur la surface dA est égale à l'intensité uniforme de la pression p multipliée par la surface dA, soit

$$\mathrm{d}P = p\,\mathrm{d}A = wh\,\mathrm{d}A$$

En sommant toutes les forces agissant sur la surface, et en considérant que $h = y\ \sin\theta$,

$$P = \int wh\,\mathrm{d}A = \int w(y\ \sin\theta)\mathrm{d}A$$
$$= (w\ \sin\theta)\int y\,\mathrm{d}A = (w\ \sin\theta)y_{cg}A$$

où w et θ sont des constantes, et où d'après la statique $\int y\,\mathrm{d}A = y_{cg}A$. Puisque $h_{cg} = y_{cg}\sin\theta$,

$$p = wh_{cg}A \qquad (1)$$

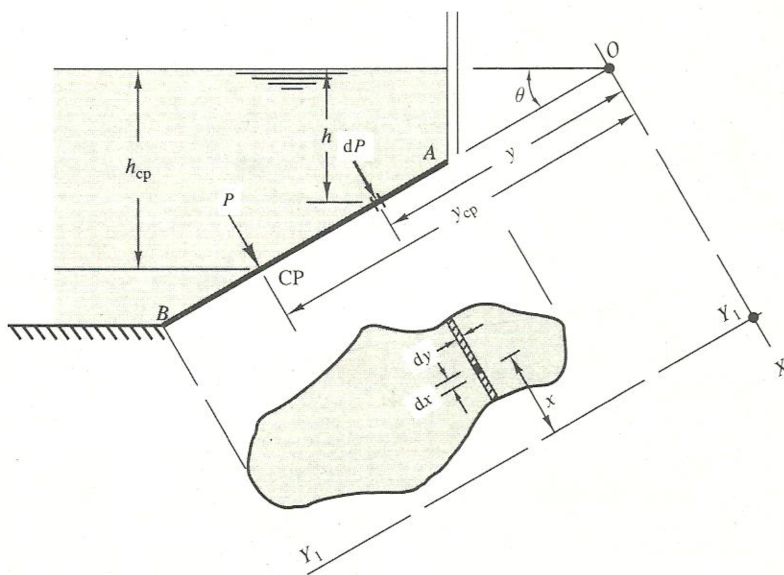


Fig. 3-2

(*b*) Pour trouver la position du point d'application de cette force P, on procède comme en statique en prenant les moments. L'axe O est choisi à l'intersection de la surface plane et de la surface de l'eau, prolongées si nécessaire. Toutes les distances y sont mesurées à partir de cet axe et on appelle y_{cp} la distance à la force résultante, qui est la distance au centre de poussée. Puisque la somme des moments de toutes les forces par rapport à l'axe O = le moment de la force résultante, nous obtenons :

$$\int(\mathrm{d}P \times y) = Py_{cp}$$

Mais $dP = wh\,dA = w(y \sin\theta)dA$ et $P = (w \sin\theta)y_{cg}A$. Alors

$$(w \sin\theta)\int y^2 dA = (w \sin\theta)(y_{cg}A)y_{cp}$$

Puisque $\int y^2\, dA$ est le moment d'inertie de la surface plane par rapport à l'axe OX,

$$\frac{I_0}{y_{cg}A} = y_{cp}$$

Sous une forme commode, d'après le théorème de Huyghens

$$y_{cp} = \frac{I_{cg} + Ay_{cg}^2}{y_{cg}A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} \qquad (2)$$

Notons que le centre de pression est toujours *en dessous* du centre de gravité de la surface, c'est-à-dire que $(y_{cp} - y_{cg})$ est toujours positif puisque I_{cg} est toujours positif.

3.2 Trouver la position latérale du centre de pression. Se reporter à la figure 3-2.

Solution

Bien qu'en général, on n'ait pas besoin de connaître la position latérale du centre de pression pour résoudre la plupart des problèmes technologiques relatifs aux forces hydrostatiques, on peut cependant avoir besoin à l'occasion de ce renseignement. En se servant du diagramme du problème précédent, on exprime l'aire dA par $(dx\ dy)$ pour employer convenablement le bras de levier x. En prenant les moments par rapport à n'importe quel axe Y_1Y_1, ne coupant pas la surface

$$Px_{cp} = \int (dPx)$$

En se servant des valeurs trouvées dans le problème 3.1 ci-dessus

$$(wh_{cg}A)x_{cp} = \int p(dx\ dy)x = \int wh(dx\ dy)x$$

ou

$$(w \sin\theta)(y_{cg}A)x_{cp} = (w \sin\theta)\int xy(dx\ dy) \qquad (3)$$

puisque $h = y \sin\theta$. L'intégrale représente le produit d'inertie de la surface plane par rapport aux axes X et Y choisis, on la désigne par I_{xy}. Alors,

$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{y_{cg}A} = \frac{(I_{xy})_{cg}}{y_{cg}A} + x_{cg} \qquad (4)$$

Si *l'un ou l'autre* des axes centraux est un axe de symétrie de la surface plane, I_{xy} est nul, et le centre de pression se trouve sur l'axe des Y passant par le centre de gravité (non représenté sur la figure). Notons que le produit d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité $(I_{xy})_{cg}$ peut être positif ou négatif, si bien que la position latérale du centre de pression peut être *d'un côté ou de l'autre* de l'axe des y passant par le centre.

3.3 Calculer la force résultante P due à l'action de l'eau sur la surface rectangulaire de 3 m × 6 m représentée dans la figure 3-3 ci-dessous.

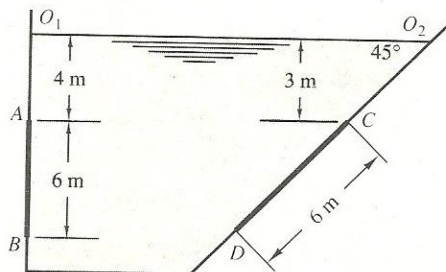


Fig. 3-3

Solution

$$P = wh_{cg}A = (9\,810 \text{ N/m}^3) \times (4+3) \text{ m} \times (3 \times 6) \text{ m}^2 = 1\,235\,000 \text{ N}$$

La force résultante s'applique au centre de pression qui est situé à une distance y_{cp} de l'axe O_1 et

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} = \frac{3(6^3)/12}{7(3 \times 6)} + 7 = 7{,}43 \text{ m de } O_1$$

3.4 Calculer la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface triangulaire CD de 4 m × 6 m représentée dans la figure 3-3. Le sommet du triangle est en C.

Solution

$$P_{CD} = 9\,810(3 + \frac{2}{3} \times 0{,}707 \times 6)(\frac{1}{2} \times 4 \times 6) = 686\,000 \text{ N} = 686 \text{ kN}$$

Cette force agit à la distance y_{cp} de l'axe O_2 mesurée dans le plan de la surface CD.

$$y_{cp} = \frac{(4)(6^3)/36}{(5{,}83/0{,}707)(2 \times 6)} + \frac{5{,}83}{0{,}707} = 0{,}24 + 8{,}24 = 8{,}48 \text{ m de l'axe } O_2$$

3.5 L'eau monte jusqu'au niveau E dans le conduit fixé au réservoir $ABCD$ de la figure 3-4. En négligeant le poids du réservoir et du conduit (a) déterminer et positionner la force résultante agissant par la surface AB qui a 2,50 m de large, (b) déterminer la force totale s'exerçant sur le fond du réservoir et (c) comparer le poids total de l'eau avec le résultat (b) et expliquer la différence.

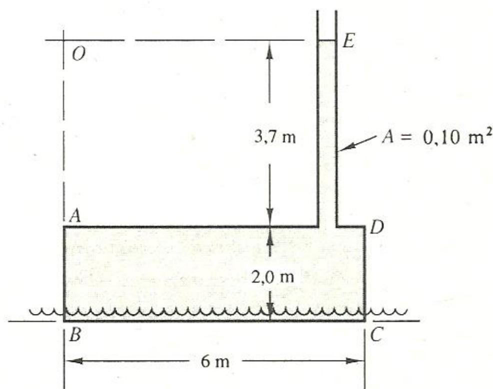


Fig. 3-4

Solution

(a) La profondeur du centre de gravité de la surface AB est de 4,70 m de la surface de l'eau en E. Alors

$$P = whA = 9\,810(3{,}70 + 1{,}0)(2 \times 2{,}5) = 230 \times 10^3 \text{ N, qui agit à la distance}$$

$$y_{cp} = \frac{2{,}5(2^3)/12}{4{,}7(2 \times 2{,}5)} + 4{,}7 = 4{,}77 \text{ m de } O$$

(b) La pression s'exerçant sur le fond BC est uniforme, ainsi la force

$$P = pA = (wh)A = 9\,810(5{,}7)(6 \times 2{,}5) = 839 \text{ kN}$$

(c) Le poids total de l'eau est $W = 9\,810(6 \times 2 \times 2{,}5 + 3{,}7 \times 0{,}10) = 298$ kN

Isolons le système formé par la partie inférieure du réservoir (découpé par un plan horizontal juste au-dessus du niveau BC); la plaque BC est soumise à une force de 839 kN, dirigée vers le bas, à la tension verticale s'exerçant sur les parois du réservoir et à la réaction du plan qui le maintient. La réaction doit égaler le poids total de l'eau, soit 298 kN. La tension s'exerçant sur la plaque BC du réservoir est produite par la force dirigée vers le haut s'exerçant sur la partie supérieure AD du réservoir et qui vaut

$$P_{AD} = (wh)A = 9\,810(3{,}7)(15 - 0{,}1) = 541 \text{ kN vers le haut}$$

Ainsi on éclaircit le paradoxe, le système considéré étant en équilibre, la somme des forces verticales est nulle, c'est-à-dire

$$8{,}39 - 298 - 541 = 0$$

et ainsi les conditions d'équilibre sont vérifiées.

3.6 La porte AB de la figure 3-5 (a) a 1,20 m de large et peut pivoter autour de A. Le manomètre G affiche $-0{,}147$ bar et le réservoir de droite est rempli d'huile de densité 0,750. Quelle force horizontale doit être appliquée en B pour assurer l'équilibre de la porte AB?

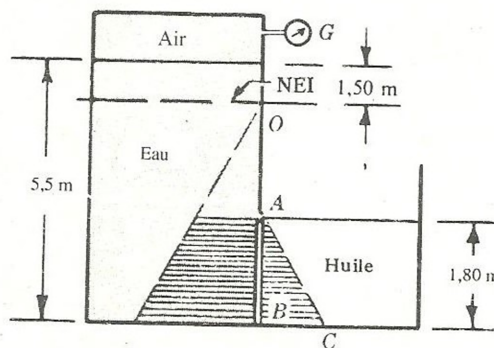


Fig. 3-5(a)

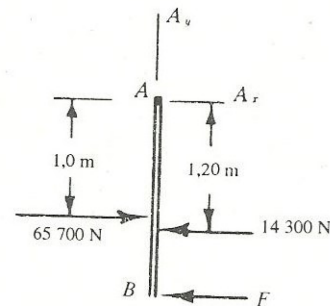


Fig. 3-5(b)

Solution

On doit calculer les intensités des forces hydrostatiques agissant sur la porte et trouver leurs points d'application. Pour le côté droit

$$P_{\text{huile}} = wh_{cg}A(0{,}750 \times 9\,810)(0{,}9)(1{,}8 \times 1{,}2) = 14\,300 \text{ N vers la gauche,}$$

agissant, d'après (2) en $y_{cp} = \dfrac{1{,}2(1{,}8^3)/12}{0{,}9(1{,}2 \times 1{,}8)} + 0{,}9 = 1{,}20$ m de A

On observera que l'intensité de la pression agissant du côté droit du rectangle AB varie linéairement du zéro manométrique à la valeur correspondant à 1,80 m d'huile ($p = wh$ est une équation linéaire). Le diagramme de charge ABC met en évidence ce fait. Pour une surface rectangulaire seulement, le centre de gravité de ce diagramme coïncide avec le centre des pressions. Le centre de gravité est situé à $(2/3)(1{,}8) = 1{,}2$ m de A, comme ci-dessus.

Pour le côté gauche, il est nécessaire de convertir la pression négative due à l'air en son équivalent en mètres du liquide (eau)

$$h = -\frac{p}{w} = -\frac{0{,}147 \times 10^5 \text{ Pa}}{9\,810 \text{ N/m}^3} = -1{,}50 \text{ m}$$

Cette hauteur de pression négative équivaut à une diminution de hauteur de 1,50 m au-dessus du niveau A. Il est commode et utile d'employer un niveau imaginaire (NEI) situé à 1,50 m en dessous du niveau réel et de résoudre le problème en employant directement les équations fondamentales. Ainsi

$$P_{\text{eau}} = 9\,810(2{,}2 + 0{,}9)(1{,}8 \times 1{,}2) \approx 65\,700 \text{ N, agissant à droite du centre de pression.}$$

Pour la surface rectangulaire submergée, $y_{cp} = \dfrac{(1{,}2)(1{,}8)^3/12}{3{,}1(1{,}8 \times 1{,}2)} + 3{,}1 = 3{,}19$ m de O, c'est-à-dire que le centre de pression est à $(3{,}19 - 2{,}20) = 0{,}99$ m de A.

La figure 3-5(*b*) représente le schéma des forces agissant sur le système en équilibre «porte AB». La mesure des moments par rapport à A doit être égale à zéro. Prenant pour sens positif le sens des aiguilles d'une montre

$$+14\,300 \times 1{,}2 + 1{,}8F - 65\,700 \times 0{,}99 = 0 \quad \text{et} \quad F \approx 27 \text{ kN vers la gauche.}$$

3.7 Le réservoir de la figure 3-6 contient de l'huile et de l'eau. Trouver la force résultante agissant sur le côté ABC qui a 1,20 m de large.

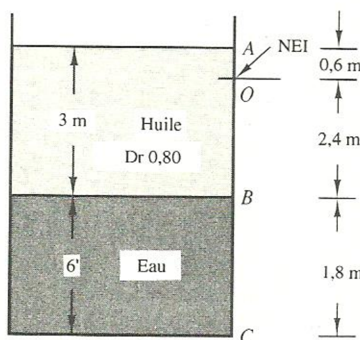


Fig. 3-6

Solution

La force totale agissant sur ABC vaut $(P_{AB} + P_{BC})$. Trouver chacune de ces forces, trouver son point d'application, en utilisant le principe des moments, déterminer la position de la force totale appliquée au côté ABC.

(*a*) $P_{AB} = (0{,}800 \times 9\,810)(1{,}5)(3 \times 1{,}2) = 42\,400$ N agissant en un point situé à (2/3)(3) m de A, soit 2 m vers le bas. La même distance peut être obtenue par la formule, comme suit :

$$y_{cp} = \frac{1{,}2(3^3)/12}{1{,}5(1{,}2 \times 3)} + 1{,}5 = 0{,}5 + 1{,}5 = 2{,}00 \text{ m de } A$$

(*b*) L'eau agit sur la surface BC et n'importe quel liquide superposé peut être converti en une hauteur d'eau équivalente. Employons un niveau d'eau imaginaire (NEI) pour ce deuxième calcul; on positionne ce NEI en transformant 3 m d'huile en $0{,}800 \times 3 = 2{,}40$ m d'eau. Alors

$$P_{BC} = 9\,810(2{,}4 + 0{,}9)(1{,}8 \times 1{,}2) = 69\,920 \text{ N, qui agit au centre de pression.}$$

$$y_{cp} = \frac{1{,}2(1{,}8^3)/12}{3{,}3(1{,}2 \times 1{,}8)} + 3{,}3 = 3{,}38 \text{ m de } O \quad \text{soit} \quad 0{,}6 + 3{,}38 = 3{,}98 \text{ m de } A$$

La force totale résultante : $42{,}4 + 69{,}9 = 112{,}3$ kN agissant au centre de pression de la surface entière. Le moment de cette force totale = la somme des moments de ses deux composantes. Utilisant A comme axe, par commodité

$$112\,300\, Y_{cp} = 42\,400 \times 2 + 69\,920 \times 3{,}98 \quad \text{et} \quad Y_{cp} = 3{,}23 \text{ m de } A$$

On peut employer d'autres méthodes d'attaque mais nous pensons que la méthode exposée réduit considérablement les erreurs de raisonnement et de calcul.

3.8 Dans la figure 3-7, la porte ABC pivote autour de B et a 1,2 m de long. Négligeant le poids de la porte, déterminer le moment non compensé dû à l'action de l'eau sur la porte.

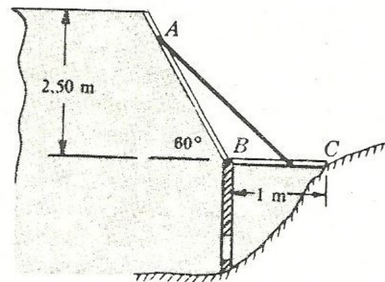


Fig. 3-7

Solution

$P_{AB} = 9\,810(1{,}25)(2{,}88 \times 1{,}2) = 42\,380$ N, qui agit à $\frac{2}{3}(2{,}88) = 1{,}92$ m de A.

$P_{BC} = 9\,810(2{,}5)(1 \times 1{,}2) = 29\,430$ N, qui agit au centre de gravité de BC puisque la pression en BC est uniforme. Prenant les moments par rapport à B (comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre),

$$\text{Moment non compensé} = 42\,380 \times 0{,}96 - 29\,430 \times 0{,}50$$
$$= 25\,970 \text{ N} \cdot \text{m (dans le sens des aiguilles d'une montre)}$$

3.9 Déterminer la force résultante due à l'eau agissant sur la surface verticale représentée dans la figure 3-8(a) et placer le centre de pression dans les directions x et y.

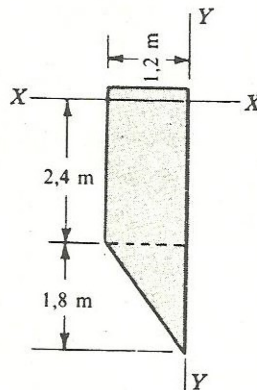


Fig. 3-8(a)

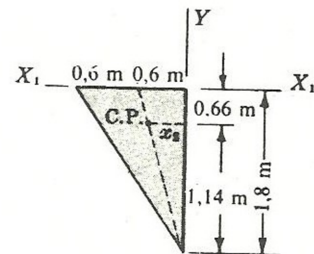


Fig. 3-8(b)

Solution

Diviser la surface en un rectangle et un triangle. La force totale agissante est égale à la force P_1 agissant sur le rectangle plus la force P_2 agissant sur le triangle.

(a) $P_1 = 9\,810(1{,}2)(2{,}4 \times 1{,}2) = 33\,900$ N, qui agit à $\frac{2}{3}(2{,}4) = 1{,}60$ m sous la surface XX.

$P_2 = 9\,810(3)(\frac{1}{2} \times 1{,}8 \times 1{,}2) = 31\,800$ N, qui agit en $y_{cp} = \dfrac{1{,}2(1{,}8^3)/36}{3(\frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 1{,}8)} + 3 = 3{,}06$ m en-dessous de la surface XX.

La force résultante $P = 33{,}9 + 31{,}8 = 65{,}7$ kN. Prenant les moments par rapports à XX,

$$65{,}7\, Y_{cp} = 33{,}9(1{,}6) + 31{,}8(3{,}06) \quad \text{et} \quad Y_{cp} = 2{,}31 \text{ m en dessous de } XX.$$

(*b*) Pour placer le centre de pression dans la direction X (rarement demandé), utiliser le principe des moments après avoir respectivement placé x_1 et x_2 pour le rectangle et le triangle. Pour le rectangle, le centre de pression de chacune des bandes horizontales de surface dA est à 0,6 m de l'axe YY; ainsi son centre de pression est à 0,6 m de cet axe. Pour le triangle, chaque surface dA a son propre centre; ainsi la médiane passe par tous ces centres de pression et on peut calculer le centre de pression du triangle tout entier. Nous reportant à la figure 3-8(*b*) et employant les triangles semblables $x_2/0,6 = 1,14/1,8$ d'où on tire $x_2 = 0,38$ m de YY. Prenant les moments

$$65,7X_{cp} = 33,9(0,6) + 31,8(0,38) \quad \text{et} \quad X_{cp} = 0,494 \text{ m de l'axe } YY$$

On peut utiliser une *autre méthode* pour placer le centre de pression. Au lieu de diviser la surface en deux, calculer le centre de gravité de la surface *totale*. En se servant du théorème de Huyghens, déterminer le moment d'inertie et le produit d'inertie de la surface tout entière par rapport à ces axes au centre de gravité. On calcule les valeurs y_{cp} et x_{cp} par les formules (2) et (4) des problèmes 3.1 et 3.2. En général, cette autre méthode n'a pas d'avantage particulier et peut donner plus de calculs.

3.10 La porte de 1,80 m de diamètre AB de la figure 3-9 pivote autour d'un axe C situé à 0,10 cm en dessous de son centre de gravité. Jusqu'à quelle hauteur h l'eau peut-elle s'élever sans provoquer de moment non compensé dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à C ?

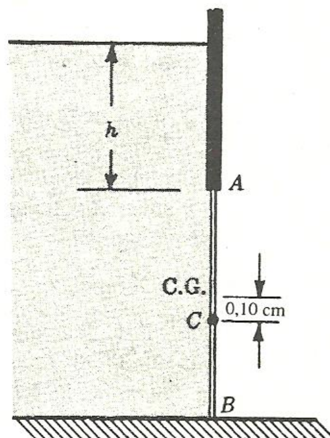


Fig. 3-9

Solution

Si le centre de pression et l'axe C coïncidaient, il n'y aurait aucun moment non compensé agissant sur la porte. Calculant la distance du centre de pression,

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} = \frac{\pi d^4/64}{y_{cg}(\pi d^2/4)} + y_{cg}$$

Alors, $y_{cp} - y_{cg} = \dfrac{\pi \times 1,8^4/64}{(h + 0,9)(\pi \times 1,8^2/4)} = 0,10$ m (donné)

d'où $h = 1,125$ m au-dessus de A.

3.11 Déterminer et placer les composantes de la force due à l'action de l'eau par mètre de longueur sur la surface courbe AB de la figure 3-10.

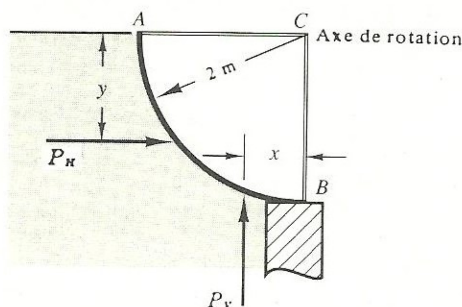


Fig. 3-10

Solution

$$P_H = \text{force s'exerçant sur la projection verticale } CB = wh_{cg}A_{CB}$$
$$= 9\,810(1)(2 \times 1) = 19\,620, \text{ qui agit à } (2/3)(2) = 1{,}33 \text{ m de } C$$
$$P_V = \text{poids de l'eau «au-dessus» de la surface } AB = 9\,810(\pi 2^2/4 \times 1) = 30\,820 \text{ N}$$

agissant au centre de gravité du volume d'eau. Le centre de gravité d'un quadrant de cercle est situé à une distance de $4/3 \times r/\pi$ de chacun des rayons perpendiculaires. Ainsi

$$x_{cp} = 4/3 \times 2/\pi = 0{,}85 \text{ m (à gauche du rayon } BC)$$

Note : Chaque force dP agit normalement à la courbe AB et passerait donc par la charnière C si on la prolongeait. La force totale passe aussi par C. Pour continuer cette affirmation, prendre les moments des composantes par rapport à C, comme suit

$$\sum M_C = -19\,620 \times 1{,}33 + 30\,820 \times 0{,}85 \approx 0 \quad \text{(qui est vérifié)}$$

3.12 Le cylindre de 2 m de diamètre de la figure 3-11 pèse 22,25 kN et a une longueur de 1,50 m. Déterminer les réactions en A et B, en ne tenant pas compte du frottement.

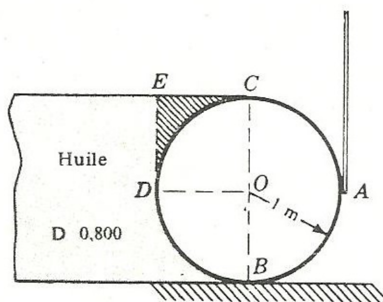


Fig. 3-11

Solution

(a) La réaction en A est due à la composante horizontale de la force exercée par le liquide sur le cylindre soit

$$p_H = (0{,}800 \times 9\,810)(1)(2 \times 1{,}5) = 23\,540 \text{ N}$$

dirigée vers la droite. Ainsi la réaction en A doit être de 23 540 N vers la gauche.

(b) La réaction en B est la somme algébrique du poids du cylindre et la composante verticale résultante de la force exercée par le liquide. La surface courbe CDB, sur laquelle agit le liquide, est la partie concave CD dirigée

vers le bas et la partie concave DB dirigée vers le haut. La résultante verticale est la somme algébrique des forces dirigées vers le bas et vers le haut.

$$\text{Force dirigée vers le haut } P_V = \text{poids du liquide (réel ou imaginaire) situé au-dessus de la courbe } DB$$
$$= 0{,}800 \times 9\,810 \times 1{,}5 \text{ (aire du secteur } DOB + \text{aire du carré } DOCE).$$
$$\text{Force dirigée vers le bas } P_V = 0{,}800 \times 9\,810 \times 1{,}5 \text{ (aire hachurée } DEC).$$

Remarquons que la surface du carré $DOCE$ (vers le haut) moins la surface DEC (vers le bas) est égale au quart du cercle DOC, la composante verticale résultante est :

$$P_V \text{ totale} = 0{,}800 \times 9\,810 \times 1{,}5 \text{ (secteurs } DOB + DOC) \text{ vers le haut}$$
$$= 0{,}800 \times 9\,810 \times 1{,}5(\frac{1}{2}\,\pi 1^2) = 18\,490 \text{ N vers le haut}$$

Enfin, $\sum Y = 0, \quad 22{,}25 - 18{,}49 - B = 0 \quad \text{et} \quad B = 3\,760 \text{ N vers le haut}$

Dans ce problème particulier, la composante verticale (poussée d'Archimède) est égale au poids du liquide déplacé vers la gauche du plan vertical COB.

3.13 Nous reportant à la figure 3-12, déterminer les forces verticales et horizontales exercées par l'eau agissant sur un cylindre de 2,0 m de diamètre par mètre de longueur.

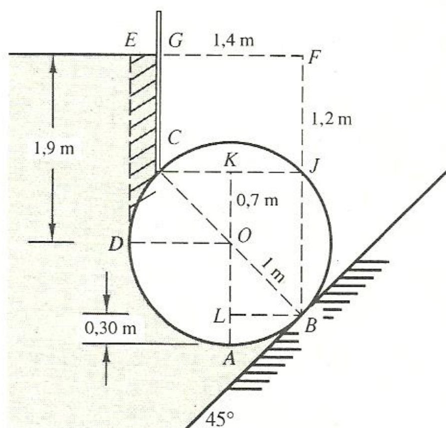


Fig. 3-12

Solution

(a) P_H totale = force agissant sur CDA − force agissant sur AB.
Utilisant la projection verticale de CDA et de AB

$$P_H(CDA) = 9\,810(1{,}2 + 0{,}85)(1{,}7 \times 1)$$
$$= 34\,190 \text{ N vers la droite}$$
$$P_H(AB) = 9\,810(1{,}2 + 1{,}55)(0{,}3 \times 1)$$
$$= 8\,090 \text{ N vers la gauche}$$
$$P_H \text{ totale} = 34\,190 - 8\,090 = 26\,100 \text{ N}$$

(b) P_V totale = force dirigée vers le haut agissant sur DAB − force dirigée vers le bas agissant sur DC
= poids de (volume $DABFED$ − volume $DCGED$).

La surface hachurée (volume) est contenue dans chacun des volumes ci-dessus, l'une des forces étant dirig vers le haut, l'autre vers le bas. Ainsi elles s'annulent et

$$P_V \text{ totale} = \text{poids du volume } DABFGCD$$

En divisant ce volume en formes géométriques simples,

$$P_V = \text{poids du (rectangle } GFJC + \text{triangle } CJB + \text{demi-cercle } CDAB)$$
$$= 9\,810(1{,}2 \times 1{,}4 + \frac{1}{2} \times 1{,}4 \times 1{,}4 + \frac{1}{2}\pi(1^2)(1)$$
$$= 9\,810(1{,}68 + 0{,}98 + 1{,}57) = 41\,500 \text{ N vers le haut}$$

Si on voulait situer le point d'application de cette résultante, il faudrait utiliser le principe des momen Chaque composante de la résultante de 41,5 kN s'applique sur le centre de gravité du volume qu'elle représen Par la statique, on trouve les centres de gravité et on écrit l'équation des moments (voir les problèmes 3.7 et 3 ci-dessus).

3.14 Dans la figure 3-13, un cylindre de 8 m de diamètre ferme une fenêtre rectangulaire percée dans un réservoir qui a 3 m de long. Avec quelle force le cylindre est-il appliqué sur le fond du réservoir s'il contient 9 m d'eau ?

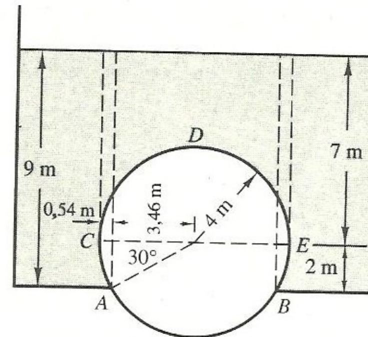


Fig. 3-13

Solution

$$P_V \text{ totale} = \text{force dirigée vers le bas appliquée à } CDE - \text{force dirigée vers le haut appliquée à } CA \text{ et } BE$$
$$= 9{,}79 \times 3\{[(7 \times 8) - (\frac{1}{2}\pi 4^2)] - 2[(7 \times 0{,}54) + (\frac{1}{12}\pi 4^2) - (\frac{1}{2} \times 2 \times 3{,}46)]\}$$
$$= 642 \text{ kN vers le bas.}$$

3.15 Dans la figure 3-14, le cylindre de 2,40 m de diamètre pèse 2 200 N et repose sur le fond d'un réservoir qui a 1 m de long. On remplit d'eau et d'huile respectivement les parties gauche et droite du réservoir sur une profondeur de 0,60 m et 1,20 m. Trouver la grandeur des composantes horizontale et verticale de la force assurant le contact en B du cylindre et du réservoir.

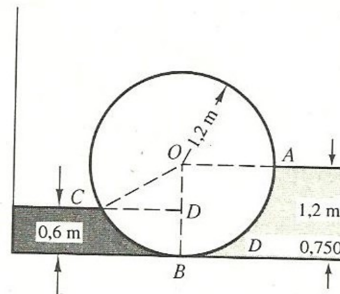


Fig. 3-14

La surface hachurée (volume) est contenue dans chacun des volumes ci-dessus, l'une des forces étant dirigée vers le haut, l'autre vers le bas. Ainsi elles s'annulent et

$$P_V \text{ totale} = \text{poids du volume } DABFGCD$$

En divisant ce volume en formes géométriques simples,

$$\begin{aligned} P_V &= \text{poids du (rectangle } GFJC + \text{triangle } CJB + \text{demi-cercle } CDAB) \\ &= 9\,810(1{,}2 \times 1{,}4 + \frac{1}{2} \times 1{,}4 \times 1{,}4 + \frac{1}{2}\pi(1^2)(1) \\ &= 9\,810(1{,}68 + 0{,}98 + 1{,}57) = 41\,500 \text{ N vers le haut} \end{aligned}$$

Si on voulait situer le point d'application de cette résultante, il faudrait utiliser le principe des moments. Chaque composante de la résultante de 41,5 kN s'applique sur le centre de gravité du volume qu'elle représente. Par la statique, on trouve les centres de gravité et on écrit l'équation des moments (voir les problèmes 3.7 et 3.9 ci-dessus).

3.14 Dans la figure 3-13, un cylindre de 8 m de diamètre ferme une fenêtre rectangulaire percée dans un réservoir qui a 3 m de long. Avec quelle force le cylindre est-il appliqué sur le fond du réservoir s'il contient 9 m d'eau ?

Fig. 3-13

Solution

$$\begin{aligned} P_V \text{ totale} &= \text{force dirigée vers le bas appliquée à } CDE - \text{force dirigée vers le haut appliquée à } CA \text{ et } BE \\ &= 9{,}79 \times 3\{[(7 \times 8) - (\frac{1}{2}\pi 4^2)] - 2[(7 \times 0{,}54) + (\frac{1}{12}\pi 4^2) - (\frac{1}{2} \times 2 \times 3{,}46)]\} \\ &= 642 \text{ kN vers le bas.} \end{aligned}$$

3.15 Dans la figure 3-14, le cylindre de 2,40 m de diamètre pèse 2 200 N et repose sur le fond d'un réservoir qui a 1 m de long. On remplit d'eau et d'huile respectivement les parties gauche et droite du réservoir sur une profondeur de 0,60 m et 1,20 m. Trouver la grandeur des composantes horizontale et verticale de la force assurant le contact en B du cylindre et du réservoir.

Fig. 3-14

Solution

P_H totale = composante agissant sur AB vers la gauche − composante agissant sur CB vers la droite

$$= 0{,}750 \times 9\,810 \times 0{,}6(1{,}2 \times 1) - 9\,810 \times 0{,}3(0{,}6 \times 1) = 3\,530 \text{ N vers la gauche}$$

P_V totale = composante agissant sur AB vers le haut + composante agissant sur CB vers le haut

= poids du quadrant d'huile + poids du (secteur-triangle) d'eau

$$= 0{,}750 \times 9\,810 \times 1 \times \frac{1}{4}\pi 1{,}2^2 + 9\,810 \times 1(\frac{1}{6}\pi 1{,}2^2 - \frac{1}{2} \times 0{,}6\sqrt{1{,}08}) = 12\,660 \text{ N vers le haut}$$

Les composantes de la force devant retenir le cylindre sont : 3 530 N vers la droite et 12 660 N vers le bas.

3.16 Le contrefort formé d'un demi-cône ABE (représenté dans la figure 3-15) sert à supporter la tour en demi-cylindre $ABCD$. Calculer les composantes horizontale et verticale de la force due à l'action de l'eau sur le contrefort ABE.

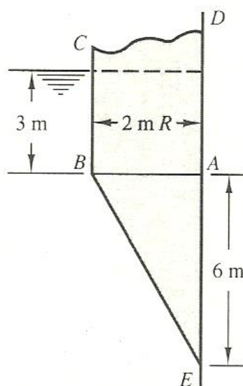


Fig. 3-15

Solution

P_H = force sur la projection verticale du demi-cône

$$= 9\,810(3+2)(\frac{1}{2} \times 6 \times 4)$$

= 588 600 N vers la droite

P_V = poids du volume d'eau situé au-dessus de la surface courbe (imaginaire)

= 9 810 (volume du demi-cône + volume du demi-cylindre)

$$= 9\,810\,(\frac{1}{2} \times 6\pi 2^2/3 + \frac{1}{2}\pi 2^2 \times 3)$$

= 308 200 N vers le haut.

3.17 Un tuyau d'acier de 1,20 m de diamètre et de 6 mm d'épaisseur transporte de l'huile de densité 0,822 à une pression de 120 m d'huile. Calculer (a) la tension de l'acier et (b) l'épaisseur d'acier nécessaire pour transporter de l'huile à une pression de 1,72 MPa si la tension admissible est de 124 MPa.

Solution

(a)
$$\sigma(\text{tension en kPa}) = \frac{p\text{ (pression en kPa)} \times r\text{ (rayon en m)}}{t\text{ (épaisseur en m)}}$$
$$= \frac{(0{,}822 \times 9{,}81 \times 120) \times 0{,}6}{6 \times 10^{-3}} = 96\,700 \text{ kPa}$$
$$= 96{,}7 \text{ MPa}$$

(b) $\sigma = pr/t$, $124 = 1{,}72 \times 0{,}60/t$, $t = 8{,}3 \times 10^{-3}$ m = 8,3 mm

3.18 Une cuve de bois de 6 m de diamètre extérieur est remplie, sur une profondeur de 7,3 m, de saumure de densité 1,06. Les arceaux de bois sont maintenus par des cercles d'acier plats, de 50 mm de large et de 6 mm d'épaisseur, dont la tension admissible est de 110 MPa. Quel doit être l'espacement des cercles près du bas de la cuve, en négligeant toute tension initiale? Se reporter à la figure 3-16.

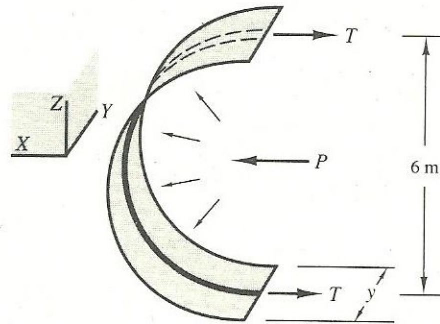


Fig. 3-16

Solution

La force représente la somme de toutes les composantes horizontales des forces élémentaires dP agissant sur une longueur y de la cuve, et les forces T représentent la tension totale à laquelle est soumise un cercle ayant à maintenir la même longueur de cuve y. Puisque la somme des forces dans la direction X doit être nulle, $2T(\text{N}) - P(\text{N}) = 0$ soit

$$2\ (\text{surface du cercle d'acier} \times \text{tension de l'acier}) = p \times \text{ projection sur } ZY \text{ du demi-cylindre.}$$

Alors, $$2(0{,}05 \times 0{,}006)110 \times 10^6 = (1{,}06 \times 9\,810 \times 7{,}3)(6y)$$

et $$y = 0{,}145 \text{ m d'espacement des cercles.}$$

3.19 Se reporter à la figure 3-17. Calculer la largeur minimale b de la base d'un barrage de 30,5 m de hauteur en supposant que la pression ascendante sous le barrage varie uniformément du point H (pied du barrage; pression nulle) au point A (pleine charge hydrostatique). On admettra, en outre, que le sommet du barrage subit une poussée supplémentaire F_I, due à la glace, de 55,5 kN/m. Dans cette étude, la résultante des forces de réaction coupe en O la base du barrage ($HO = (1/3)HA$); le poids volumique de la maçonnerie est égal à $2{,}5w$.

Solution

On montre sur le diagramme les composantes H et V de la réaction des fondations; elles passent par O. Considérons une longueur de 1 m de barrage et évaluons les forces en fonction de w et de b comme suit :

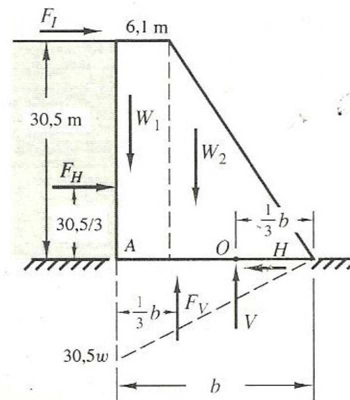


Fig. 3-17

$$F_H = w(15{,}25 \times 30{,}5 \times 1) = 465{,}12\ w \quad (\mathrm{N})$$

$$F_V = \text{aire du diagramme de charge}$$

$$= (1/2)(30{,}5w)(b \times 1) = 15{,}25\ bw \quad (\mathrm{N})$$

$$W_1 = 2{,}5\ w(6{,}1 \times 30{,}5 \times 1) = 465{,}12\ w \quad (\mathrm{N})$$

$$W_2 = 2{,}5\ w[(1/2) \times 30{,}5(b - 6{,}1)] \times 1 = 38{,}12\ wb - 232{,}6\ b$$

$$F_I = 55\,500\ \mathrm{N/m}$$

Pour trouver la valeur de b à l'équilibre, il faut évaluer les moments des forces par rapport à O comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre.

$$465{,}1w\left(\frac{30{,}5}{3}\right)+15{,}25wb\left(\frac{b}{3}\right)-465{,}1w\left(\left(\frac{2b}{3}\right)-3{,}05\right)-(38{,}12wb-232{,}6b)\left(\frac{2}{3}\right)(b-6{,}1)-\left(\frac{b}{3}\right))+55\,500\times 30{,}5=0$$

En remplaçant w par 9 810 N/m^3 et après simplification, l'équation en b s'écrit :

$$b^2 + 10{,}14\,b - 755 = 0 \quad \text{et} \quad b = 22{,}9\ \mathrm{m}.$$

3.20 Un barrage en ciment retient de l'eau sur une hauteur de 6 m (Fig. 3-18(a)). Le poids volumique du ciment est 23,5 kN/m^3. Le sol des fondations est imperméable. Déterminer (a) le coefficient de sécurité d'anti-glissement, (b) le coefficient de sécurité d'anti-basculement et (c) la pression à la base du barrage. Le coefficient de frottement entre la base du barrage et le sol des fondations vaut 0,48.

Solution

$$F_H = wh_{cg}A = (9{,}81)(3)(6 \times 1) = 176{,}6\ \mathrm{kN}$$

$$F_V = 0$$

$$\text{poids de la partie 1 du barrage} = (1)[(2)(7)/2](23{,}5) = 164{,}5\ \mathrm{kN}$$

$$\text{poids de la partie 2 du barrage} = (1)(2)(7)(23{,}5) = 239{,}0\ \mathrm{kN}$$

$$\text{poids total du barrage} = 164{,}5 + 329{,}0 = 493{,}5\ \mathrm{kN}$$

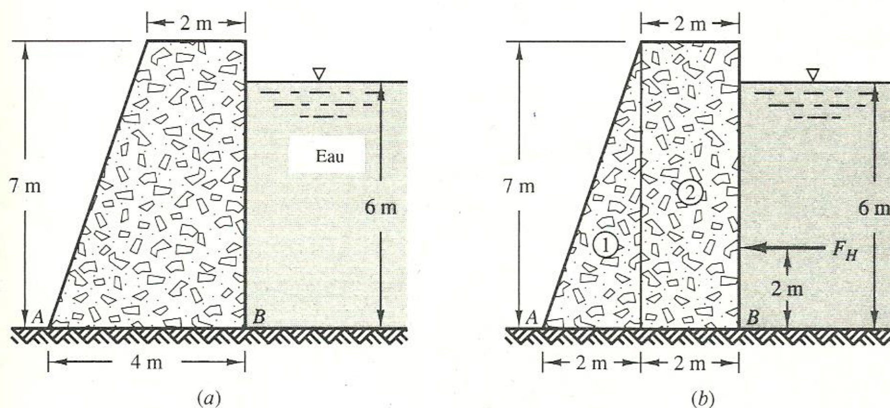


Fig. 3-18

(a)
$$\text{C.S.}_{\text{glissement}} = \text{résistance au glissement / force de glissement}$$
$$= \frac{(0{,}48)(494{,}5)}{176{,}2} = 1{,}34$$

(b)
$$\text{C.S.}_{\text{basculement}} = \text{moment de rappel total résistant / moment total de basculement}$$
$$= \frac{(164{,}5)(1{,}333) + (329{,}0)(3{,}000)}{(176{,}2)(2)} = 3{,}42$$

(*c*) Résultant R sur la base $= \sqrt{(164{,}5 + 329{,}0)^2 + 176{,}2^2} = 524$ kN. Soit x la distance de A au point où R coupe la base du barrage.

$$\overline{x} = \frac{\sum M_A}{R_y} = \frac{[(164{,}5)(1{,}333) + (329{,}0)(3{,}000)] - [(176{,}2)(2)]}{493{,}5} = 1{,}730 \text{ m}$$

$$\text{excentricité} = \frac{4}{2} - 1{,}730 = 0{,}270 \text{ m} < \frac{4}{6} = 0{,}667 \text{ m}$$

La résultante passe donc à l'intérieur du tiers moyen de la base et :

$$p = \frac{F}{A} \pm \frac{M_y x}{I_y} \pm \frac{M_x y}{I_x}$$
$$= \frac{493{,}5}{(4)(1)} \pm \frac{[(493{,}5)(0{,}270)](2)}{(1)(4)^3/12} \pm 0$$

$$p_A = 123{,}4 + 50{,}0 = 173{,}4 \text{ kPa} \qquad p_B = 123{,}4 - 50{,}0 = 73{,}4 \text{ kPa}$$

Problèmes supplémentaires

3.21 Pour une longueur de porte AB de 2,44 m dans la figure 3-19, trouver la compression provoquée dans le montant CD par la pression de l'eau (B, C et D sont des points articulés). *Rép.* 70 500 N.

3.22 Une porte rectangulaire AB de 3,7 m de haut et de 1,50 m de large est placée verticalement et pivote autour d'un point situé à 0,15 cm au-dessous de son centre de gravité. La profondeur totale de l'eau est de 6,1 m. Quelle force horizontale F doit être appliquée au bas de la porte pour qu'elle reste en équilibre? *Rép.* 15 kN.

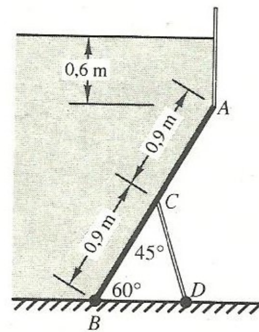


Fig. 3-19

3.23 Trouver la hauteur z de façon que la compresssion totale de la tige BD de la figure 3-20 ne soit pas supérieure à 80 kN, en supposant une longueur de 1,22 dans le plan perpendiculaire à celui du diagramme et en supposant la tige BD articulée aux deux extrémités. *Rép.* 1,79 m.

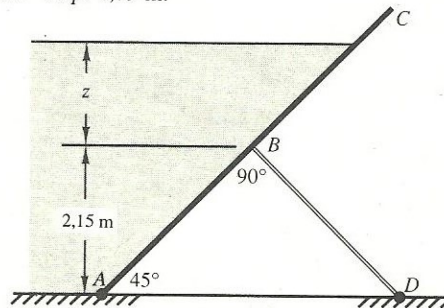


Fig. 3-20

(*c*) Résultant R sur la base $= \sqrt{(164{,}5 + 329{,}0)^2 + 176{,}2^2} = 524$ kN. Soit x la distance de A au point
coupe la base du barrage.

$$\overline{x} = \frac{\sum M_A}{R_y} = \frac{[(164{,}5)(1{,}333) + (329{,}0)(3{,}000)] - [(176{,}2)(2)]}{493{,}5} = 1{,}730 \text{ m}$$

$$\text{excentricité} = \frac{4}{2} - 1{,}730 = 0{,}270 \text{ m} < \frac{4}{6} = 0{,}667 \text{ m}$$

La résultante passe donc à l'intérieur du tiers moyen de la base et :

$$p = \frac{F}{A} \pm \frac{M_y x}{I_y} \pm \frac{M_x y}{I_x}$$

$$= \frac{493{,}5}{(4)(1)} \pm \frac{[(493{,}5)(0{,}270)](2)}{(1)(4)^3/12} \pm 0$$

$$p_A = 123{,}4 + 50{,}0 = 173{,}4 \text{ kPa} \qquad p_B = 123{,}4 - 50{,}0 = 73{,}4 \text{ kPa}$$

Problèmes supplémentaires

3.21 Pour une longueur de porte AB de 2,44 m dans la figure 3-19, trouver la compression provoquée dans le mo
CD par la pression de l'eau (B, C et D sont des points articulés). *Rép.* 70 500 N.

3.22 Une porte rectangulaire AB de 3,7 m de haut et de 1,50 m de large est placée verticalement et pivote autour
point situé à 0,15 cm au-dessous de son centre de gravité. La profondeur totale de l'eau est de 6,1 m. Quelle
horizontale F doit être appliquée au bas de la porte pour qu'elle reste en équilibre ? *Rép.* 15 kN.

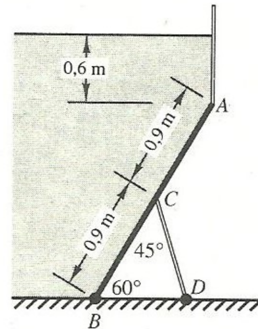


Fig. 3-19

3.23 Trouver la hauteur z de façon que la compresssion totale de la tige BD de la figure 3-20 ne soit pas supérie
80 kN, en supposant une longueur de 1,22 dans le plan perpendiculaire à celui du diagramme et en supposant la
BD articulée aux deux extrémités. *Rép.* 1,79 m.

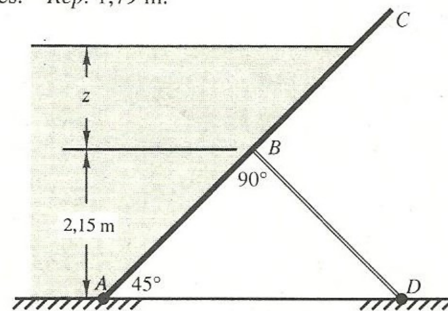


Fig. 3-20

3.24 Un barrage de 20 m de long retient une hauteur d'eau de 7 m (Fig. 3-21). Trouver la résultante des forces agissant sur le barrage et la position du centre de poussée. *Rép.* 5 541 kN; 4,67 m au-dessous de la surface de l'eau.

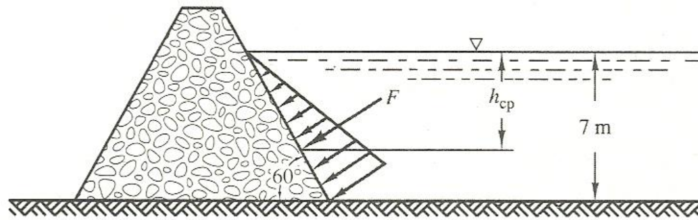


Fig. 3-21

3.25 De l'huile de densité 0,800 agit sur une surface triangulaire placée verticalement dont le sommet est à la surface. Le triangle a 2,70 m de haut et 3,60 m de large. Une plaque rectangulaire verticale de 2,40 m est fixée à la base (3,60 m) du triangle et de l'eau agit dessus. Trouver la grandeur et le point d'application de la force résultante s'exerçant sur la surface tout entière. *Rép.* 371 kN à 3,7 m de profondeur.

3.26 Dans la figure 3-22, la porte AB pivote autour de B et a 1,20 m de large. Quelle est la force verticale qu'il faut appliquer au centre de gravité de la porte pour en assurer l'équilibre si elle pèse 20 kN. *Rép.* 54 kN.

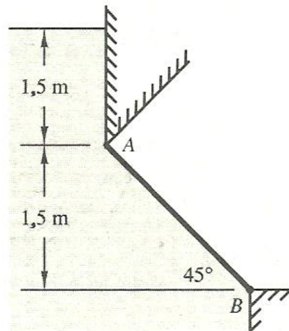


Fig. 3-22

3.27 Un réservoir a 6 m de long et pour section transversale celle qui est représentée par la figure 3-23. AE représente le niveau de l'eau. Trouver (*a*) la force totale agissant sur le côté BC et (*b*) la force totale agissant sur le fond $ABCDE$ en grandeur et en position. *Rép.* 876 kN; 430 kN et 3,3 m de profondeur.

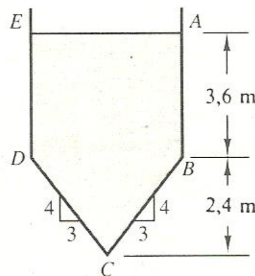


Fig. 3-23

3.28 On donne une vanne rectangulaire; elle est soumise à la pression de l'eau sur une de ses faces (Fig. 3-24). Trouver la résultante des forces agissant sur la vanne et la position du centre de poussée. *Rép.* 84,59 kN; 3,63 m sous la surface de l'eau.

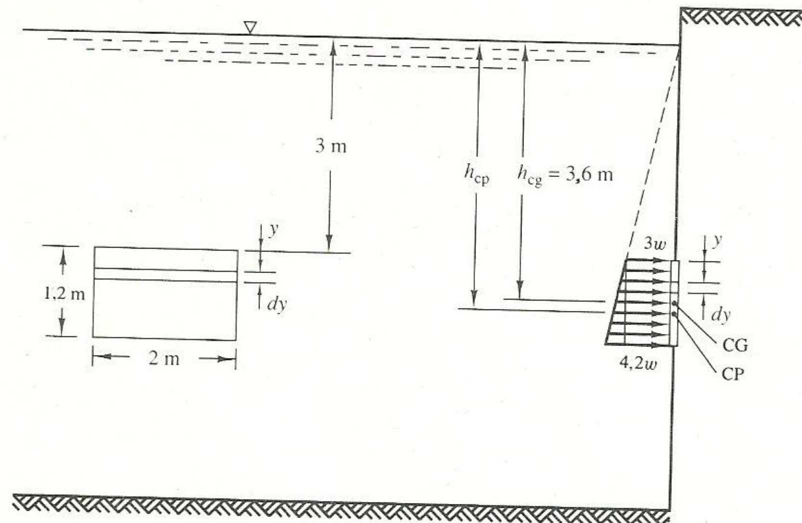


Fig. 3-24

3.29 Dans la figure 3-25, la porte en demi-cylindre de 1,20 m de diamètre a 0,9 m de long. Si le coefficient de frottement entre la porte et ses guides est de 0,100, trouver la force P nécessaire pour la soulever sachant qu'elle pèse 4 450 N. *Rép.* 1 540 N.

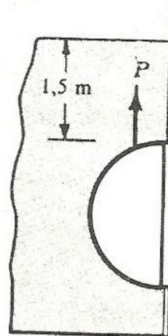


Fig. 3-25

3.30 Un réservoir à parois verticales contient 0,914 m de mercure et 5,03 m d'eau. Trouver la force totale s'exerçant sur une partie carrée de la paroi de 0,61 m de côté dont la moitié est située au-dessous de la surface du mercure. Les côtés du carré sont horizontaux et verticaux. *Rép.* 21,8 kN à 5,07 m de profondeur.

3.31 Un triangle isocèle de 5,5 m de base et 7,3 m de hauteur est immergé verticalement dans de l'huile de densité 0,800 avec son axe de symétrie horizontal. Si la hauteur de pression sur l'axe horizontal est de 4 m, déterminer la force totale s'exerçant sur une face du triangle et trouver la position verticale totale du centre de pression. *Rép.* 625 kN; 4,28 m.

3.32 À quelle profondeur d'eau doit-on immerger un carré de 1,22 m de large, maintenu verticalement, deux de ses côtés étant horizontaux, pour que son centre de pression se trouve à 7,6 cm au-dessous de son centre de gravité? Quelle est alors la force totale s'exerçant sur le carré? *Rép.* 1,0 m (bord supérieur). 23,7 kN.

3.33 Dans la figure 3-26, le cylindre de 1,22 m de diamètre et 1,22 m de long, est soumis à l'action de l'eau vers la gauche et d'une huile de densité 0,800 sur la droite. Déterminer (a) la force normale en B, sachant que le cylindre pèse 17,8 kN et (b) la force horizontale provoquée par l'huile et l'eau si le niveau d'huile tombe de 0,30 m. *Rép.* 5,25 kN; 13,8 kN vers la droite.

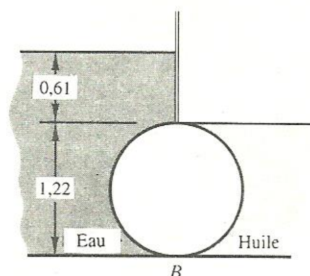


Fig. 3-26

3.34 Trouver la résultante des forces de pression qui s'exercent sur une vanne circulaire inclinée, de 1 m de diamètre (Fig. 3-27). Préciser la position du centre de poussée CP. *Rép.* 14,86 kN; 2,26 m sous la surface de l'eau (distance mesurée le long de la ligne de pente de la vanne).

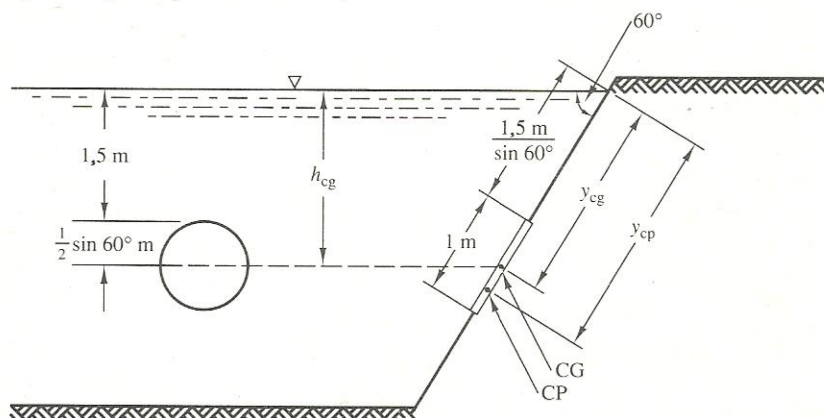


Fig. 3-27

3.35 Dans la figure 3-28, pour une longueur de 2,44 m, déterminer le moment non compensé autour du point O provoqué par l'eau au niveau A. *Rép.* 24 400 N · m dans le sens des aiguilles d'une montre.

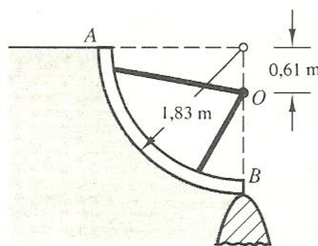


Fig. 3-28

3.36 Le réservoir dont on a représenté la coupe dans la figure 3-29, a 1,2 m de long et est rempli d'eau sous pression. Trouver les composantes de la force nécessaire pour maintenir le cylindre en place, en négligeant le poids du cylindre. *Rép.* 14 kN vers le bas, 20 kN vers la gauche.

3.37 Déterminer, les composantes horizontale et verticale, par mètre de longueur, de la pression d'eau agissant sur la porte de type Tainter représentée dans la figure 3-30. *Rép.* 44,8 kN/m et 16,2 kN/m.

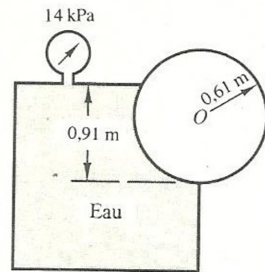


Fig. 3-29

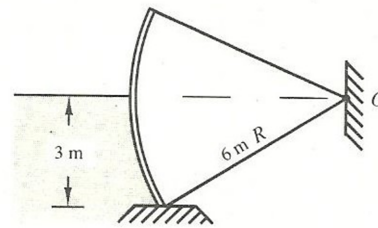


Fig. 3-30

3.38 Trouver la force verticale agissant sur le dôme en forme de demi-cylindre représenté dans la figure 3-31 quand le manomètre A affiche 0,58 bar. Ce dôme a 1,83 m de long. *Rép.* 113 kN.

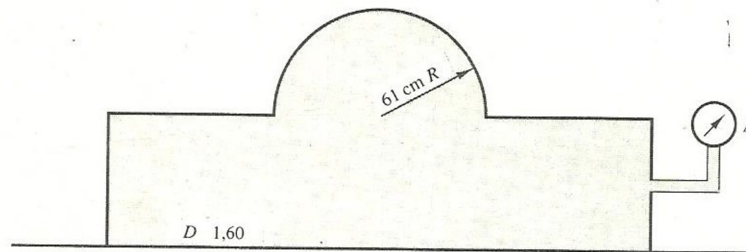


Fig. 3-31

3.39 Si le dôme du problème 3.38 est remplacé par un dôme en forme d'hémisphère de même diamètre, quelle est la force verticale exercée? *Rép.* 60 kN.

3.40 Se reportant à la figure 3-32, calculer (a) la force exercée par l'eau sur le fond de la plaque AB du tuyau d'aspiration de 1 m de diamètre et (b) la force totale s'exerçant sur la plan C. *Rép.* 38,45 kN; 269 kN.

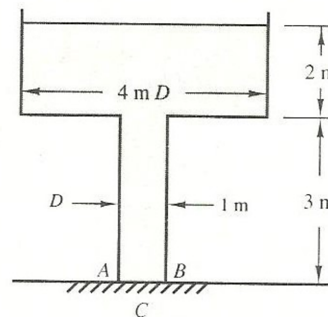


Fig. 3-32

3.41 Le cylindre représenté dans la figure 3-33 a 3,05 m de long. En admettant que les conditions d'étanchéité sont vérifiées en A et que le cylindre ne peut tourner, quel doit être le poids du cylindre pour qu'il ne s'élève pas? *Rép.* 56,5 kN.

3.42 Un tuyau de 1,22 m de diamètre intérieur est constitué d'arceaux de bois maintenus par des cercles de fer plat de 0,10 m de large et de 19 mm d'épaisseur. Pour une tension admissible de 1 100 bar pour l'acier et une pression interne de 11 bar, déterminer l'espacement des cercles. *Rép.* 0,32 cm.

3.43 Pour la digue de mer à profil parabolique représentée dans la figure 3-34, quel est le moment créé en A, par mètre de longueur, par les 3 m de profondeur de la mer. ($w = 10{,}06$ kN/m^3)? *Rép.* 34 200 N · m dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

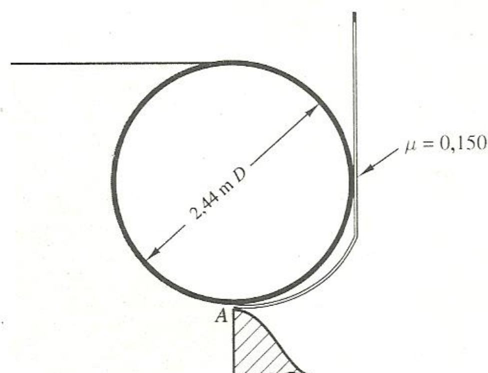


Fig. 3-33

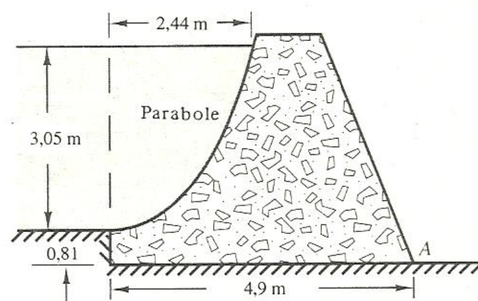


Fig. 3-34

3.44 Le réservoir représenté dans la figure 3-35 a 3,05 m de long, et le fond en pente BC a 2,44 m de large. Quelle profondeur de mercure donne lieu à un moment en C (provoqué par l'action des liquides), de 137 400 N · m dans le sens des aiguilles d'une montre? *Rép.* 0,61 m.

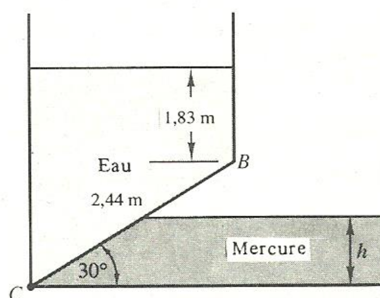


Fig. 3-35

3.45 La porte représentée dans la figure 3-36 a 6,1 m de long. Quelles sont les réactions au point O provoquées par l'eau? Vérifier que le couple en O est nul. *Rép.* 136 kN, 272 kN.

3.46 Se reporter à la figure 3-37. Une plaque plane pivotant autour de C a pour limite une courbe vérifiant l'équation $x^2 + 1{,}5y = 9$. Quelle est la force appliquée par l'huile à la plaque et quelle est son moment par raport à C? *Rép.* 27,8 kN, 22 240 N · m.

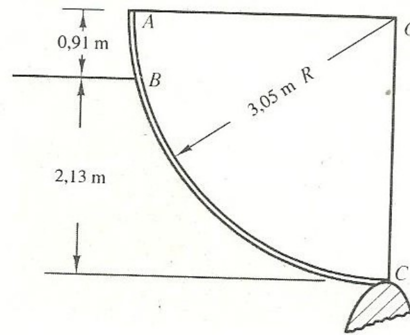


Fig. 3-36

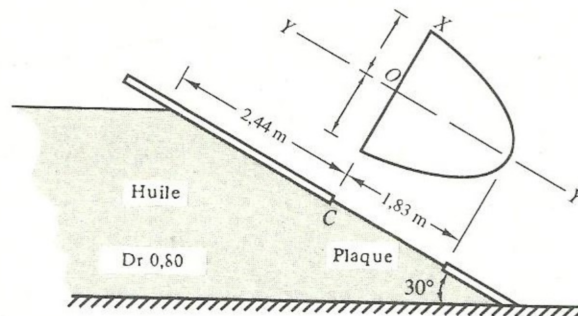


Fig. 3-37

3.47 Dans la figure 3-38, la porte de profil parabolique ABC est articulée en A et soumise à l'action d'une huile pesant 7 850 N/m^3. Si le centre de gravité de la porte est situé en B, que doit peser la porte par mètre de longueur (perpendiculaire au plan de la figure) pour assurer l'équilibre ? Le sommet de la parabole est en A *Rép.* 5,8 kN/m.

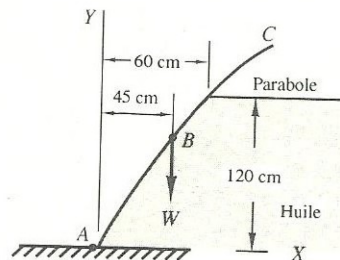


Fig. 3-38

3.48 Dans la figure 3-39, la porte automatique ABC pèse 44 kN/m de longueur et son centre de gravité est situé à 180 cm sur la droite du point A. La porte va-t-elle s'ouvrir sous l'action de l'eau à la profondeur représentée ? *Rép.* Oui.

3.49 Calculer la largeur minimale du mur en ciment de la figure 3-40 pour éviter le glissement. Le poids volumique du ciment est égal à 23,6 kN/m^3 et le coefficient de frottement entre la base du mur et les fondations est de 0,42. On prendra 1,5 comme coefficient de sécurité d'anti-glissement. Le mur sera-t-il à l'abri d'un basculement ?
Rép. 3,09 m, oui.

3.50 Résoudre le problème 3.20 en supposant que la poussée hydrostatique ascendante varie linéairement du point A au point B. *Rép.* (*a*) 1,02; (*b*) 1,81; (*c*) $p_A = 173{,}5$ kPa; $p_B = 14{,}5$ kPa.

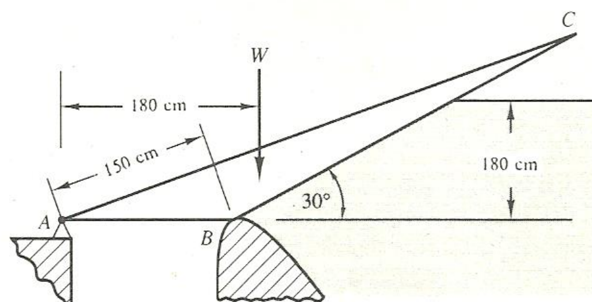


Fig. 3-39

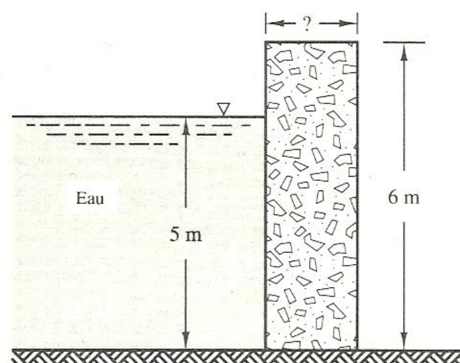


Fig. 3-40

3.51 Le barrage de la figure 3-41 est rempli d'eau. Trouver (*a*) le coefficient de sécurité d'anti-glissement, (*b*) le coefficient de sécurité d'anti-basculement et (*c*) la pression à la base du barrage. Le sol des fondations est perméable. On supposera que la poussée ascendante varie linéairement sur la base (poids volumique du ciment : 23,5 kN/m^3). *Rép.* (*a*) 1,36; (*b*) 2,20; (*c*) $p_A = 85,1$ kPa; $p_B = 300,3$ kPa.

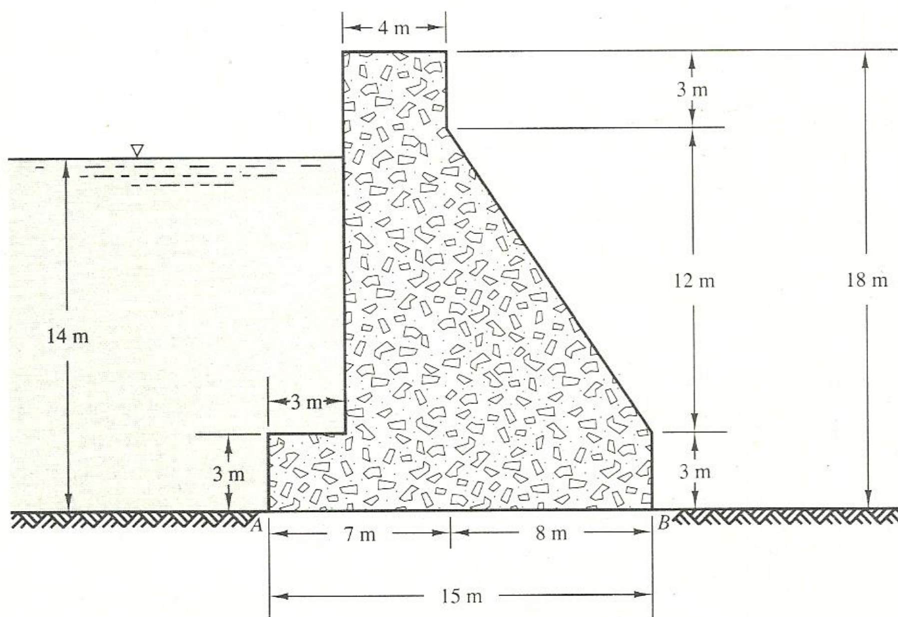


Fig. 3-41

Chapitre 4

Poussée et flottaison, le principe d'Archimède

LE PRINCIPE D'ARCHIMÈDE

Le principe de base de la flottabilité et de la flottaison a été découvert et établi par Archimède il y a environ 2 200 ans. Le principe d'Archimède peut s'énoncer comme suit : tout corps flottant ou immergé dans un liquide subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé. Cette force est connue sous le nom de *force de flottaison*. Il en résulte qu'un corps flottant déplace un volume de fluide égal à son propre poids. Autrement dit, un corps flottant déplace un volume suffisant de fluide pour contrebalancer exactement son propre poids. Le point d'application de cette force s'appelle *centre de poussée*. Il est situé au centre de gravité du fluide déplacé.

En appliquant le principe d'Archimède, on peut trouver le volume de solides irréguliers à partir de la perte de poids apparente du corps totalement immergé dans un liquide de densité connue. Les densités des liquides peuvent être déterminées en fonction de la profondeur de flottaison donnée par l'aréomètre. Des applications plus élaborées englobent des problèmes généraux de flottaison et de conception de constructions navales.

STABILITÉ DES CORPS FLOTTANTS ET DES CORPS SUBMERGÉS

Pour assurer *la stabilité d'un corps submergé*, le centre de gravité du corps doit se situer juste au-dessous du centre de poussée (de gravité) du liquide déplacé. Si les deux points sont confondus, le corps submergé est en équilibre indifférent pour toutes les positions.

Pour assurer *la stabilité des cylindres ou des sphères flottants*, le centre de gravité du corps doit se situer en dessous du centre de poussée.

La stabilité des autres objets flottants varie selon que le moment qui prend naissance quand le centre de gravité et le centre de poussée ne sont plus alignés verticalement l'un sous l'autre (à cause du déplacement du centre de poussée), tend à les redresser ou à les retourner. Le centre de poussée se déplace, quand l'objet flottant s'incline, ce qui entraîne une variation de la forme du volume du liquide déplacé donc un déplacement de centre de gravité.

La figure 4-1(a) montre un corps flottant en équilibre ayant son centre de gravité (CG) au-dessus du centre de poussée (CP). Si CG est à droite de la ligne d'action de la poussée d'Archimède F_B (Fig. 4-1(b)), lorsque le corps est tourné légèrement dans le sens des aiguilles d'une montre, l'équilibre du corps flottant est stable. Dans le cas contraire, (Fig. 4-1(c)), l'équilibre est instable. On peut encore déterminer la stabilité ou l'instabilité en déterminant le point d'intersection (mc) de l'axe (A-A) et de la ligne d'action poussée (B-B). Ce point (mc) est appelé *métacentre*. À partir des figures 4-1(b) et 4-1(c), il est clair que le corps flottant est stable si CG est au-dessous de mc et instable dans le cas contraire. Pour savoir si CG est au-dessous ou au-dessus de mc (stabilité ou instabilité), on calcule la distance $\overline{MB}$ à l'aide de la formule suivante :

$$\overline{MB} = \frac{I}{V_d}$$

où $\overline{MB}$ = distance de CP à mc (Fig. 4-1(d))
I = moment d'inertie de la section horizontale du corps, prise à la surface du fluide, à l'équilibre.
V_d = volume du fluide déplacé.

Une fois la distance $\overline{MB}$ déterminée, il est aisé de trouver la stabilité ou l'instabilité du corps (CG en-dessous ou au-dessus de CP).

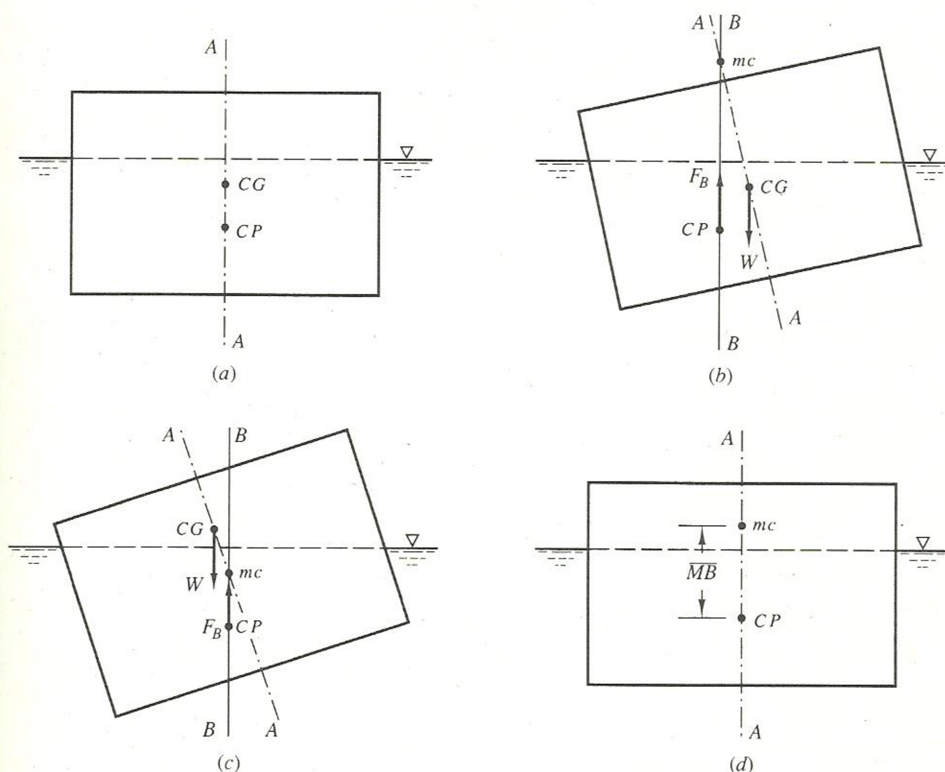


Fig. 4-1

Problèmes résolus

4.1 Une pierre pèse 90 N à l'air et 50 N quand elle est immergée dans l'eau. Calculer le volume de la pierre et sa densité (Fig. 4-2).

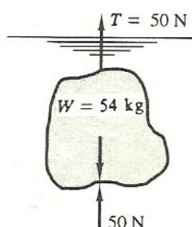


Fig. 4-2

Solution

On peut plus facilement traiter les problèmes techniques en utilisant un diagramme des forces appliquées au système en équilibre. En se reportant à la figure ci-dessus, on constate que le poids de 90 N agit vers le bas, que la tension de 50 N de la corde attachée à la balance agit vers le haut, ainsi que la poussée totale P_V. De

$$\sum Y = 0 \Longrightarrow W - T - P_V = 0$$

nous tirons

$$90 - 50 - P_V = 0 \quad \text{et} \quad P_V = 40 \text{ N}$$

Puisque la poussée égale le poids du fluide déplacé,

$$40 \text{ N} = 9\,810 \text{ N/m}^3 \times v \qquad \text{et} \qquad v = 0{,}004\,08 \text{ m}^3$$

$$\text{densité} = \frac{\text{poids de la pierre}}{\text{poids d'un égal volume d'eau}} = \frac{90}{40} = 2{,}25$$

4.2 On pèse dans l'eau un objet en forme de prisme de 20 cm d'épaisseur, 20 cm de large et 40 cm de long à une profondeur de 50 cm et on trouve 49 N. Quel est son poids dans l'air et sa densité (Fig. 4-3) ?

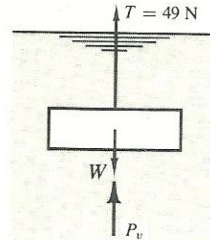


Fig. 4-3

Solution

Se reportant au diagramme du système de la figure 4-3, $\sum Y = 0$, alors

$$W - P_V - 49 = 0 \quad \text{ou} \quad (1) \quad W = 49 + P_V$$

La poussée P_V = poids du liquide déplacé = $w \times V$
$= 9\,807(0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}4) = 156{,}9$ N

Par conséquent, d'après (*1*), $W = 49 + 156{,}9 = 205{,}9$ N et $d = 205{,}9/156{,}9 = 1{,}31$

4.3 Un aréomètre pèse 0,0216 N et présente une tige cylindrique à son extrémité supérieure de 2,80 mm de diamètre. Calculer la différence d'enfoncement h entre les aréomètres (*1*) et (*2*), sachant que la densité de l'alcool vaut 0,821 et celle de l'huile 0,780 (Fig. 4-4)

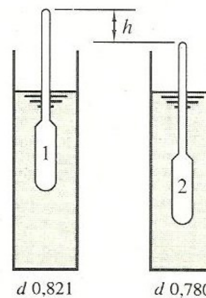


Fig. 4-4

Solution

Pour la position 1 de la figure 4-4, dans l'alcool,

$$\text{poids de l'aréomètre} = \text{poids du liquide déplacé}$$

$$0{,}021\,6 = 0{,}821 \times 9\,810 \times v_1$$

d'où $v_1 = 0{,}000\,002\,68$ m^3 (dans l'alcool).

Pour la position 2,

$$0{,}021\,6 = 0{,}780 \times 9\,810(v_1 + Ah)$$
$$= 0{,}780 \times 9\,810[0{,}000\,002\,68 + \frac{1}{4}\pi(0{,}28/100)^2 h]$$

d'où $$h = 0{,}022\,8 \text{ m} = 22{,}8 \text{ mm}.$$

4.4 Un morceau de bois de densité 0,651 a une section carrée de 7,50 cm de côté et 1,50 m de long. Combien de kilogrammes de plomb de masse volumique 11 200 kg/m^3 doit-on attacher à l'une de ses extrémités pour qu'il flotte verticalement en dépassant la surface de l'eau de 30 cm ?

Solution

Poids total du bois et du plomb = poids de l'eau déplacée

$$[0{,}651 \times 1\,000 \times 9{,}81 \times 1{,}5(0{,}075)^2 + 11\,200 \times 9{,}81v] = 1\,000 \times 9{,}81[(0{,}075)^2 \times 1{,}2 + v]$$

d'où $v = 0{,}000\,123\,2$ m^3 et la masse de plomb : $11\,200\ v = 11\,200 \times 0{,}000\,123\,2 = 1{,}38$ kg.

4.5 Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7,25 qui flotte à la surface d'un récipient de mercure de densité 13,57 (Fig. 4-5) ?

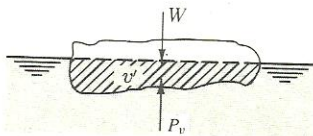


Fig. 4-5

Solution

Le diagramme du système montre que de $\sum Y = 0$, $W - P_V = 0$ ou poids du corps = poussée (poids du mercure déplacé)

$$7{,}25 \times 9\,810\ v = 13{,}57 \times 9\,810\ v'$$

alors, le rapport des volumes est $v'/v = 7{,}25/13{,}57 = 0{,}535$.

Ainsi la fraction du volume située au-dessus du mercure $= 1 - 0{,}535 = 0{,}465$.

4.6 Un compartiment rectangulaire ouvert, de 10 m par 4 m de base et de 5 m de profondeur, a une masse de 54 tonnes et flotte dans l'eau douce. (*a*) De combien s'enfonce-t-il ? (*b*) Si l'eau a 5 m de profondeur, quel poids de pierres faut-il placer dans le compartiment pour le faire reposer sur le fond ?

Solution

(*a*) Poids du compartiment = poids de l'eau déplacée

$$54 \times 9\,810 = 9\,810(10 \times 4 \times Y) \qquad Y = 1{,}35 \text{ m submergés}$$

(*b*) Poids du compartiment et de la pierre = poids de l'eau déplacée

$$54 \times 9\,810 + W_s = 9\,810(10 \times 4 \times 5) \qquad W_s = 1\,432 \text{ kN de pierres}$$

4.7 Un morceau de bois flotte dans l'eau en dépassant de 5 cm de la surface. Placé dans la glycérine de densité 1,35 il dépasse de 7,5 cm. Calculer la densité du bois.

Solution

Le poids total du morceau de bois est (*a*) W = densité $\times$ 9 810$(A \times h)$ et les poids d'eau et de glycérine déplacés sont respectivement (*b*) $W_W = 9\,810A(h - 0{,}05)$ et (*c*) $W_G = 1{,}35 \times 9\,810(h - 0{,}075)A$.

Puisque le poids de chacun des liquides déplacés est égal au poids total du morceau de bois, (*b*) = (*c*) ou

$$9\,810\,A(h - 0{,}05) = 1{,}35 \times 9\,810A(h - 0{,}075) \qquad h = 0{,}146\,4 \text{ m}$$

Comme (*a*) = (*b*) $\quad d \times 9\,810\,A \times 0{,}146\,4 = 9\,810 \times A(0{,}146\,4 - 0{,}05) \qquad d = 0{,}660$

4.8 De combien s'enfonce dans l'eau douce un tronc de 2,40 m de diamètre et de 4,50 m de long, de densité 0,425 ?

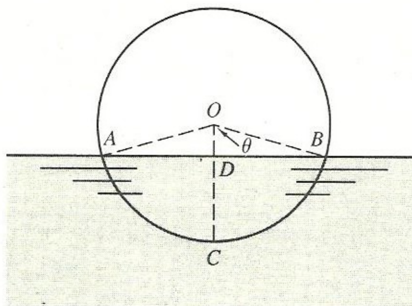


Fig. 4-6

Solution

On a représenté dans la figure 4-6 le tronc avec son centre O au-dessus de l'eau parce que la densité est inférieure à 0,500. Si la densité avait été de 0,500 le tronc aurait été à demi-submergé.

Poids total du tronc = poids du liquide déplacé (secteur – deux triangles)

$$0{,}425 \times 9\,810 \times \pi 1{,}2^2 \times 4{,}5 = 9\,810 \times 4{,}5\left(\frac{2\theta}{360}1{,}44\pi - 2 \times \frac{1}{2} \times 1{,}2\sin\theta \times 1{,}2\cos\theta\right)$$

En simplifiant et en remplaçant $\sin\theta\cos\theta$ par $\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$$0{,}425\pi = \theta\pi/180 - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

Résolvant par approximations successives :

Pour $\theta = 85°$: $\quad 1{,}335 \stackrel{?}{=} 85\pi/180 - \frac{1}{2}(0{,}1737)$

$1{,}335 \neq 1{,}397$

Pour $\theta = 83°$: $\quad 1{,}335 \stackrel{?}{=} 1{,}449 - \frac{1}{2}(0{,}242)$

$1{,}335 \neq 1{,}328$

Les approximations ont encadré le résultat.

Pour $\theta = 83°10'$ $\quad 1{,}335 \stackrel{?}{=} 1{,}451 - \frac{1}{2}(0{,}236)$

$= 1{,}333$ (approximation suffisante).

La profondeur de flottaison $DC = r - OD = 1{,}2 - 1{,}2\cos 83°10'$
$= 1{,}2(1 - 0{,}119) = 1{,}057$ m.

4.9 (*a*) En négligeant l'épaisseur des parois du réservoir de la figure 4-7(*a*), si le réservoir flotte dans la position indiquée, quel est son poids?

(*b*) Si le réservoir est maintenu de sorte que sa partie supérieure soit à 3 m au-dessous du niveau de l'eau, quelle est la force qui s'y exerce?

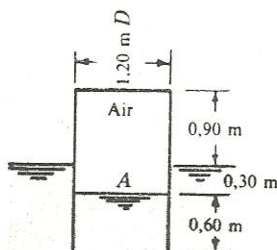


Fig. 4-7(*a*)

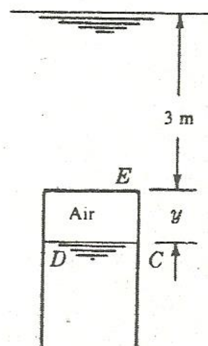


Fig. 4-7(*b*)

Solution

(*a*) Poids du réservoir = poids du liquide déplacé

$$= 9\,810\pi(0{,}6)^2(0{,}30) = 3{,}32 \text{ kN}$$

(*b*) L'espace occupé par l'air est moins grand à la nouvelle profondeur représentée dans la figure 4-7(*b*). En admettant que la température de l'air est constante, alors pour les positions (*a*) et (*b*),

$$p_A v_A = p_D v_D \quad \text{(on doit employer la pression absolue)}$$

$$w(10{,}33 + 0{,}3)(1{,}2 \times \text{aire}) = w(10{,}33 + 3 + y)(y \times \text{aire})$$

qui donne $y^2 + 13{,}33y - 12{,}75 = 0$ dont la racine positive cherchée est $y = 0{,}90$ m.

La pression en $D = 3{,}90$ m d'eau (man.) = pression en E. Ainsi la force s'exerçant sur la partie supérieure du réservoir est $whA = 9\,810(3{,}9)(\pi 0{,}6^2) = 43{,}3$ kN.

4.10 Un navire, dont les côtés sont verticaux à la hauteur de la ligne de flottaison «pèse» 4 000 tonnes et a un tirant d'eau de 6,7 m en eau salée ($\rho = 1\,025$ kg/m^3). La décharge de 200 tonnes d'eau de lest ramène le tirant à 6,4 m. Quel serait le tirant du navire dans l'eau douce (figure 4-8).

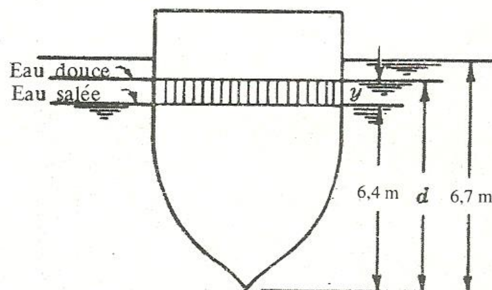


Fig. 4-8

Solution

Du fait qu'on ne connaît pas la forme de la partie immergée du navire, il vaut mieux résoudre le problème en se servant des volumes déplacés.

Une réduction du poids de 200 tonnes a provoqué une diminution de 0,30 m du tirant d'eau, soit

$$9{,}81 \times 200 \times 1\,000 = wv = 1\,025 \times 9{,}81(A \times 0{,}3)$$

où v représente le volume compris entre les tirants d'eau de 6,7 m et 6,4 m et $(A \times 0{,}3)$ représente l'aire de la section du navire à la ligne de flottaison $\times$ 0,3 m, soit le même volume v. Alors

$$v = A \times 0{,}3 = 200(1\,000)/1\,025 = 195\ \text{m}^3/0{,}3\ \text{m de prof.} = 650\ \text{m}^3/\text{m de prof} \Rightarrow A = 650\ \text{m}^2$$

La poussée $B = w\times$ volume du liquide déplacé. Alors B/w = volume du liquide déplacé.

Sur la figure, le volume hachuré représente la différence entre l'eau douce et l'eau salée déplacée. On peut exprimer cette différence par $(\dfrac{3\,800 \times 1\,000}{1\,000} - \dfrac{3\,800 \times 1\,000}{1\,025})$ et ce volume est aussi égal à 650 y. Égalant ces valeurs, $y = 0{,}142$ m.

Le tirant d'eau $d = 6{,}4 + 0{,}142 = 6{,}54$ soit environ 6,50 m.

4.11 Un tonneau contenant de l'eau pèse 1,26 kN. Quel sera le poids lu si on y maintient verticalement un morceau de bois de 5 cm par 5 cm à une profondeur de 60 cm ?

Solution

À toute force, s'oppose une réaction égale et opposée. La poussée exercée par l'eau vers le haut contre la partie inférieure du morceau de bois est compensée par la réaction exercée par la surface carrée de 5 cm de côté du morceau de bois sur l'eau. Cette force est égale à l'augmentation de poids lue.

$P_V = 9\,810 \times 0{,}05 \times 0{,}05 \times 0{,}60 = 14{,}7$ N. La lecture de la balance $= 1\,260 + 14{,}7 = 1\,275$ N.

4.12 Un bloc de bois de 1,80 m par 2,40 m sur 3,00 m flotte sur de l'huile de densité 0,751. Un couple agissant dans le sens des aiguilles d'une montre maintient le bloc dans la position représentée dans la figure 4-9. Calculer (a) la poussée agissant sur le bloc et déterminer son point d'application, (b) la grandeur du couple agissant sur le bloc et (c) la position du métacentre dans la position inclinée.

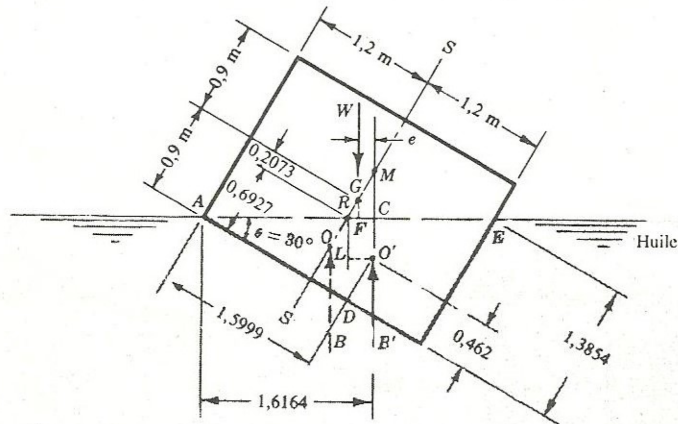


Fig. 4-9

Solution

(a) Poids du bloc = poids du prisme triangulaire d'huile (ou poussée)

$$W = B' = (0{,}751 \times 9\,810)(\frac{1}{2} \times 2{,}40 \times 1{,}3854 \times 3) = 36\,750\ \text{N}$$

Alors $B' = 36\,750$ N agissant vers le haut au centre de gravité O' du volume d'huile déplacée. Le centre de gravité se trouve à 1,599 9 m de A et 0,462 0 m de D, comme le montre la figure

$$AC = AR + RC = AR + LO' = 1{,}599\,9 \cos 30^\circ + 0{,}462\,0 \sin 30^\circ = 1{,}616\,4 \text{ m}$$

La poussée de 36 750 N agit vers le haut au centre de gravité du volume de l'huile déplacé, qui se trouve à 1,62 m à la droite de A.

(*b*) On peut obtenir la grandeur du couple tendant à redresser le bloc (qui doit être égale à celle du couple appliqué pour assurer l'équilibre) en calculant l'excentricité e. Cette grandeur est la distance entre les deux forces parallèles et égales W et B' qui constituent le couple de redressement.

$$e = FC = AC - AF = 1{,}616\,4 - AF = 1{,}616\,4 - 1{,}488\,9 = 0{,}127\,5 \text{ m}$$

puisque

$$AF = AR + RF = AR + GR \sin 30^\circ = 1{,}385\,4 + 0{,}207\,3(\frac{1}{2}) = 1{,}488\,9 \text{ m}$$

Le couple we ou $B'e = 36\,750 \times 0{,}1275 = 4\,686 \text{ N} \cdot \text{m}$. Ainsi le moment ou couple nécessaire pour maintenir le bloc dans la position représentée est de 4 686 N · m dans le sens des aiguilles d'une montre.

(*c*) Le point d'intersection du support de la poussée et de l'axe de symétrie S-S s'appelle le métacentre (point M de la figure). Si le métacentre se trouve au-dessus du centre de gravité d'un objet flottant, le poids de l'objet et la poussée forment un moment redresseur dans des positions inclinées.

$$\text{La distance métacentrique } MG = MR - GR = \frac{RC}{\sin 30^\circ} - GR = \frac{0{,}231}{0{,}5} - 0{,}207\,3 = 0{,}255 \text{ m.}$$

On doit noter que le produit de la distance MG par le sinus de l'angle θ est égal à l'excentricité e (calculée précédemment par une autre méthode).

En architecture navale, on prend un angle de quelque 10° pour limite maximale à l'intérieur de laquelle on considère que la distance métacentrique MG peut être considérée comme constante.

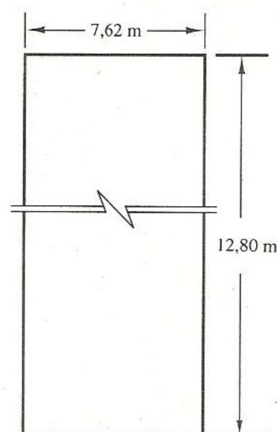
4.13 Une péniche à fond plat et à avant et arrière carrés (figure 4-10(a)) a un tirant d'eau (calaison) de 1,83 m quand elle est complètement chargée et équilibrée. La péniche est-elle stable ? Si oui, quel est le moment de rappel quand la quille s'incline de 12° ?

Solution

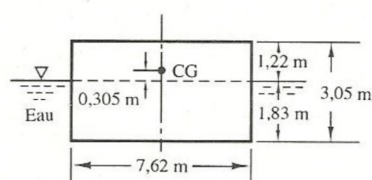
D'après (I) $$\overline{MB} = \frac{I}{V_d} = \frac{12{,}8[(7{,}62)^3/12]}{1{,}83 \times 7{,}62 \times 12{,}8} = \frac{472}{178{,}5} = 2{,}64 \text{ m}$$

Le métacentre est situé à 2,64 m au-dessus du centre de poussée CP (cf. la figure 4-10(b)) et à 1,42 m au-dessus du centre de gravité CG de la péniche; celle-ci est donc stable. La figure 4-10(c) donne une vue de profil de la péniche inclinée à 12° de gite.

$$\text{Moment de rappel} = Fx = 9\,810 \times 7{,}62 \times 12{,}8 \times 1{,}83 \times 1{,}42 \sin 12^\circ = 517 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(*a*) Vue de dessus



(*b*) Vue de profil

Fig. 4-10(*a*)

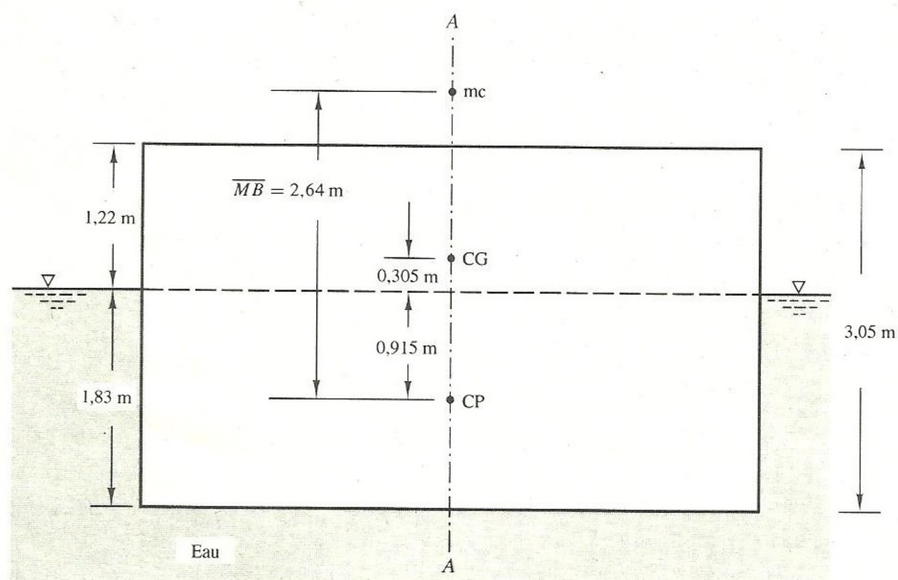


Fig. 4-10(*b*)

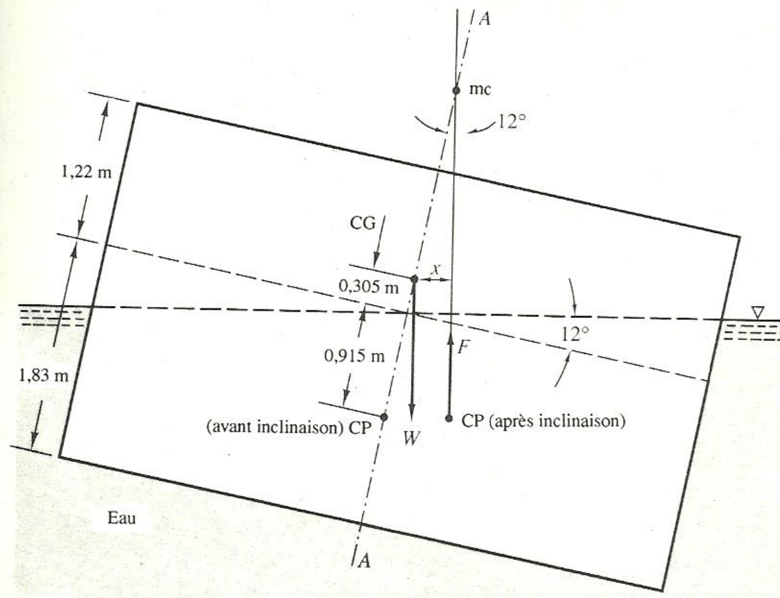


Fig. 4-10(*c*)

4.34 Le morceau de bois cylindrique de la figure 4-11(*a*) est-il stable lorsqu'on le place verticalement dans l'huile ? La densité du bois est égale à 0,61.

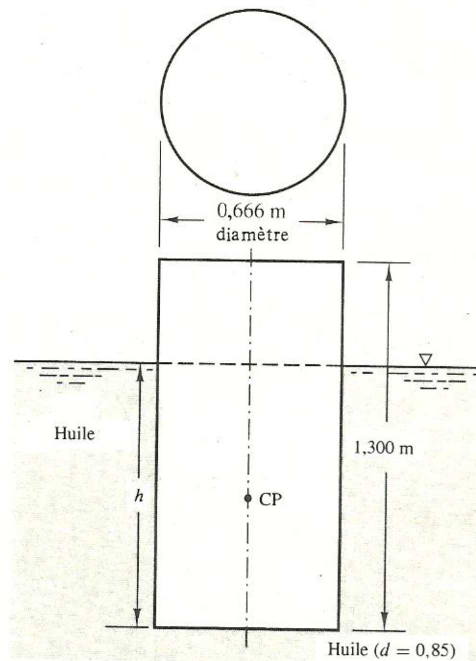


Fig. 4-11(*a*)

Fig. 4-11(*b*)

Solution

Cherchons d'abord la hauteur immergée lorqu'on met le cylindre dans l'huile (h sur la figure 4-11(a)) :

$$\text{poids du cylindre} = \text{poids de l'eau déplacée}$$

$$0{,}61(\pi R^2 g)(1{,}3) = 0{,}85(\pi R^2 g)(h) \qquad h = 0{,}933 \text{ m}$$

Le centre de poussée CP est situé à $\dfrac{0{,}933}{2}$ soit à 0,466 m de la base du cylindre (figure 4-11(b)).

$$\overline{MB} = \frac{I}{V_d} = \frac{\pi(0{,}666)^4/64}{0{,}933[\pi(0{,}666)^2/4]} = 0{,}030 \text{ m}$$

Le métacentre mc est donc à 3 cm au-dessus de CP, soit à 15,4 cm *au-dessous* du centre de gravité CG; le morceau de bois est instable.

Problèmes supplémentaires

4.15 Un objet pèse 289 N dans l'air et 187 N dans l'eau. Trouver son volume et sa densité. *Rép.* 0,010 4 m^3 ; 2,83.

4.16 Un objet pèse 289 N dans l'air et 0,014 m^3 dans de l'huile de densité 0,75. Trouver son volume et sa densité. *Rép.* 0,014 m^3 ; 2,12.

4.17 Si l'aluminium pèse 25,9 kN/m^3, combien pèse une sphère de 305 mm de diamètre, immergée dans l'eau ? Immergée dans de l'huile de densité 0,75 ? *Rép.* 238 N; 276 N.

4.18 Un cube d'aluminium de 153 mm de côté pèse 54,2 N lorsqu'il est immergé dans l'eau. Quel est son poids apparent lorsqu'il est immergé dans un liquide de densité 1,25? *Rép.* 45,6 N.

4.19 Une pierre pèse 600 N et, quand on l'introduit dans un réservoir carré de 610 mm de côté, le poids de la pierre dans l'eau est de 323 N. De combien l'eau a-t-elle monté dans le réservoir? *Rép.* 7,6 cm.

4.20 Un cylindre creux de 914 mm de diamètre et de 1,52 m de long pèse 3 825 N. (*a*) Combien doit-on attacher de kilogrammes de plomb de densité 11,20 au bas de son extrémité à l'extérieur pour que le cylindre flotte verticalement, immergé sur 914 mm? (*b*) Combien devrait-on en placer si on les met à l'intérieur? *Rép.* 231 kg; 211 kg.

4.21 Un aréomètre a une masse de 11,3 g et sa tige a 0,161 cm^2 de section. Quelle est la différence de profondeur de flottaison dans des liquides de densité 1,25 et 0,90? *Rép.* 21,9 cm.

4.22 Quelle longueur de bois de 76,2 cm par 30,5 cm, de densité 0,50 peut supporter un enfant de 45,4 kg qui se tient debout dessus? *Rép.* 3,72 m.

4.23 Un objet ayant un volume de 170 dm^3 nécessite une force de 267 N pour le maintenir immergé dans l'eau. On n'a besoin que de 160 N pour le maintenir immergé dans un autre liquide, quelle est la densité de ce liquide? *Rép.* 0,935.

4.24 Un cube d'acier, de 30 cm de côté, flotte sur du mercure. Calculer la hauteur immergée, sachant que les densités de l'acier et du mercure valent respectivement 7,8 et 13,6. *Rép.* 172 mm.

4.25 Une péniche de 3,05 m de profondeur a une section droite en forme de trapèze de 9,14 m de large en haut et de 6,14 m en bas. La péniche a 15,24 m de long et ses extrémités sont verticales. Déterminer (*a*) son poids, si elle tire 1,83 m d'eau et (*b*) son tirant d'eau si on y place 76,7 tonnes de pierres? *Rép.* 1,92 MN; 2,44 m.

4.26 Une sphère de 122 cm de diamètre flotte à demi-immergée dans l'eau salée ($\rho = 1\,025$ kg/m^3). Quelle est la masse minimum de béton ($\rho = 2\,400$ kg/m^3) qui, utilisé comme ancre, peut l'immerger complètement? *Rép.* 850 kg.

4.27 Un iceberg de masse volumique de 912 kg/m^3 flotte dans l'océan (1 025 kg/m^3) avec hors de l'eau un volume de 600 m^3. Quel est le volume total de l'iceberg? *Rép.* 5 440 m^3.

4.28 Un cube creux de 1 m de côté pèse 2,4 kN. Le cube est attaché à un bloc de ciment pesant 10,0 kN. Ces deux objets flottent-ils dans l'eau (on fera tous les calculs justificatifs)? Densité du ciment : 2,40. *Rép.* L'ensemble flotte.

4.29 Un ballon vide ainsi que l'équipement qui l'accompagne pèse 445 N. Quand on gonfle le ballon d'un gaz de poids spécifique 5,42 N/m^3, le ballon est sphérique et a 6,1 m de diamètre. Quelle est la charge maximale que peut enlever le ballon, en admettant que la masse volumique de l'air est de 1,230 kg/m^3? *Rép.* 338 N.

4.30 Un flotteur cubique de 122 cm de côté pèse 1,78 kN et est amarré au moyen d'un bloc de béton qui pèse 6,67 kN à l'air libre. Le flotteur est immergé de 23 cm quand la chaîne le reliant à l'amarre est tendue. Pour quelle élévation du niveau de la mer, le bloc de béton se détache-t-il du fond? Le poids spécifique du béton est de 23,56 kN/m^3. *Rép.* 16,1 cm.

4.31 Une péniche rectangulaire mesure extérieurement 6 m de large, 18 m de long et 3 m de haut et a une masse de 160 000 kg. Elle flotte en eau salée ($\rho = 1\,025$ kg/m^3) et le centre de gravité de la péniche chargée est à 1,35 m du haut. (*a*) Trouver la position du centre de poussée, quand elle flotte en eau calme et (*b*) quand elle s'incline de 10° et (*c*) trouver la position du métacentre pour une inclinaison de 10°. *Rép.* 0,722 m du fond sur le plan de symétrie; 0,362 m sur la droite, 1,152 m au-dessus de CG.

4.32 Un cube de ciment de 0,5 m de côté doit se maintenir en équilibre sous l'eau grâce à une mousse légère faisant fonction de bouée. Quel doit être le volume minimal de mousse? On donne les poids volumiques du ciment et de la mousse : 23,58 kN/m^3; 0,79 kN/m^3. *Rép.* 0,192 m^3.

4.33 Un cube d'aluminium de 15,2 cm de côté est suspendu par une corde. Le cube est immergé moitié dans l'huile (densité : 0,80) et moitié dans l'eau. Trouver la tension de la corde si le poids spécifique de l'aluminium est de 25,9 kN/m^3 *Rép.* 60,4 N.

4.34 Si le cube du problème précédent avait été placé moitié dans l'air, moitié dans l'huile, quelle serait la tension de la corde? *Rép.* 77,8 N.

4.35 La figure 4-12 représente la section droite et l'élévation d'un bateau. Est-il stable? Si oui, calculer le moment de rappel dans l'eau quand la quille s'incline de 10°. *Rép.* Stable; 16 920 $N \cdot m$.

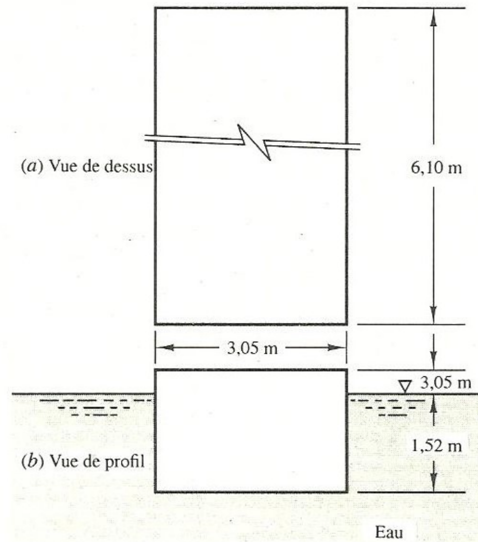


Fig. 4-12

4.36 Un cylindre de bois a un diamètre de 0,61 m et une hauteur de 1,22 m. Il est placé verticalement dans une huile. Est-il stable? *Données :* $d_{\text{bois}} = 0,60$; $d_{\text{huile}} = 0,85$. *Rép.* Non.

Chapitre 5

Translation et rotation de masses de liquide

INTRODUCTION

On peut soumettre un fluide à une translation ou à une rotation à accélération constante sans occasionner de mouvement relatif entre les particules du fluide. Dans ces conditions, il y a équilibre relatif et absence de tensions internes. Il n'existe, en général, pas de mouvement relatif entre le fluide et le récipient qui le contient. Les lois de la statique des fluides continuent à s'appliquer, avec des modifications tenant compte des effets de l'accélération.

MOUVEMENT HORIZONTAL

Dans un mouvement horizontal, la surface du liquide devient un plan incliné. La pente du plan se calcule par :

$$\tan\theta = \frac{a \text{ (accélération linéaire du récipient en m/s}^2\text{)}}{g \text{ (accélération de la pesanteur en m/s}^2\text{)}}$$

La démonstration de l'équation générale de la translation est donnée dans le problème 5.4.

MOUVEMENT VERTICAL

Pour un mouvement vertical, la pression (en Pa) en tout point du liquide est donnée par :

$$p = wh(1 \pm \frac{a}{g})$$

où on met le signe plus s'il s'agit d'une accélération constante vers le haut et le signe moins s'il s'agit d'une accélération constante vers le bas.

ROTATION DES MASSES DE FLUIDE – RÉCIPIENTS OUVERTS

La forme de la surface libre d'un liquide en rotation dans un récipient est celle d'un paraboloïde de révolution. Tout plan passant par l'axe de rotation coupe le fluide selon une parabole. L'équation de la parabole est :

$$y = \frac{\omega^2}{2g}\,x^2$$

où x et y sont les coordonnées, en mètres, de tout point de la surface, l'origine étant prise sur l'axe au sommet de la parabole, et où ω est la vitesse angulaire supposée constante, exprimée en rad/s. On a donné la démonstration de cette équation dans le problème 5.7.

ROTATION DES MASSES DE FLUIDE – RÉCIPIENTS FERMÉS

La pression régnant à l'intérieur d'un récipient fermé augmente lorsqu'on le fait tourner. L'augmenta de la pression entre un point situé sur l'axe de rotation et un point situé à x mètres de cet axe est :

$$p\ (\text{Pa}) = w\frac{\omega^2}{2g}x^2$$

ou encore, l'augmentation de la hauteur de pression (en m) est :

$$\frac{p}{w} = y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

qui est une équation semblable à celle des récipients ouverts. Puisque la vitesse $V = x\omega$, le te $x^2\omega^2/2g = V^2/2g$ que nous allons plus tard appeler hauteur due à la vitesse, en m.

Problèmes résolus

5.1 Un réservoir rectangulaire de 8 m de long, 3 m de profondeur et 2 m de large contient 1,5 m d' S'il est soumis à une accélération linéaire de 2,45 m/s^2 dans le sens de la longueur, (*a*) calculer la f totale provoquée par l'action de l'eau sur chaque extrémité du réservoir et (*b*) montrer que la différ entre ces forces est égale à la force non compensée nécessaire à l'accélération de la masse de liquide. S reporter à la figure 5-1.

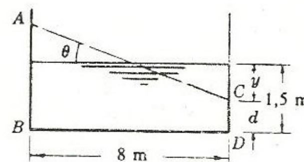


Fig. 5-1

Solution

(*a*)
$$\tan\theta = \frac{\text{accélération linéaire}}{\text{accélération de la pesanteur}} = \frac{2,45}{9,80} = 0,250 \quad \text{et} \quad \theta = 14°2'$$

D'après la figure, la profondeur d à l'extrémité la moins profonde est $d = 1,5 - y = 1,5 - 4\ \tan 14°$ 0,500 m, et à l'extrémité la plus profonde 2,50 m. Alors

$$F_{AB} = wh_{cg}A = 9\,800(2,50/2)(2,50 \times 2) = 61\,250\ \text{N}$$

$$F_{CD} = wh_{cg}A = 9\,800(0,500/2)(0,500 \times 2) = 2\,450\ \text{N}$$

(*b*) Force nécessaire = masse de l'eau × accélération linéaire = $8 \times 2 \times 1,5 \times 1\,000 \times 2,45 = 58\,800$ N et $F_{AB} - F_{CD} = 61\,250 - 2\,450 = 58\,800$ N qui coïncide avec la valeur trouvée antérieurement.

5.2 Si le réservoir du problème 5-1 est rempli d'eau jusqu'en haut et est soumis à une accélération d sens de sa longueur de 1,52 m/s^2, combien de litres d'eau sont renversés ? Se reporter à la figure 5-

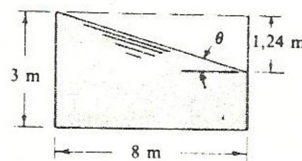


Fig. 5-2

Solution

Pente de la surface $= \tan\theta = 1{,}52/9{,}8 = 0{,}155$ et la différence de niveau entre les deux extrémités $= 8 \tan\theta = 1{,}24$ m.

Le volume renversé = 2 × section triangulaire représentée dans la figure 5-2.

$$= 2(\frac{1}{2} \times 8 \times 1{,}24) = 9{,}92\ \text{m}^3 = 9\,920\ \text{l}.$$

5.3 Un réservoir carré de 1,50 m de côté contient 1 m d'eau. Quelle doit être la hauteur de ses parois pour que l'eau ne déborde pas lorsque l'accélération est de 4,0 m/s^2 parallèlement à ses côtés ?

Solution

Pente de la surface $= \tan\theta = 4{,}0/9{,}8 = 0{,}408$.
Montée (ou descente) du niveau d'eau $= 0{,}75 \tan\theta = 0{,}75 \times 0{,}408 = 0{,}306$ m.
Le réservoir doit avoir au moins $1 + 0{,}31 = 1{,}31$ m de profondeur.

5.4 Un récipient ouvert est soumis à une accélération le long d'un plan incliné à 30° de 3,66 m/s^2 vers le haut. Quel est l'angle de la surface libre de l'eau avec l'horizontale ?

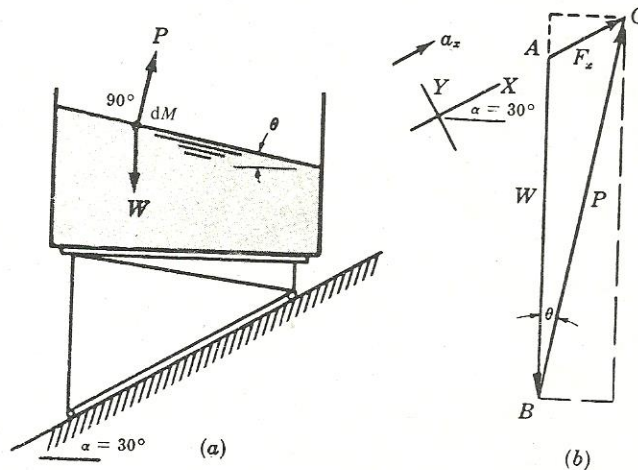


Fig. 5-3

Solution

Se reportant à la figure 5-3(a), les forces agissant sur chaque masse dM sont le poids W dirigé verticalement vers le bas et la force P exercée par les particules de liquide environnantes. La force P est normale au liquide puisque aucune composante de frottement n'entre en jeu. La force résultante F_x (provoquée par W et P) pour chacune des particules de liquide doit être dirigée vers le haut dans le plan XX faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale et doit provoquer l'accélération commune a_x. La figure 5-3(b) indique cette relation vectorielle. On peut alors écrire les équations suivantes :

$$F_x = \frac{W}{g} a_x \quad \text{ou} \quad \frac{F_x}{W} = \frac{a_x}{g} \tag{1}$$

$$F_x \sin\alpha = P\cos\theta - W \tag{2}$$

$$F_x \cos\alpha = P \sin\theta \quad \text{(d'après le diagramme vectoriel).} \tag{3}$$

Multipliant (2) par $\sin\theta$ et (3) par $\cos\theta$ et résolvant simultanément

$$F_x \sin\alpha \sin\theta + W \sin\theta - F_x \cos\alpha \cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{F_x}{W} = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta}$$

Substituant dans (*1*) et simplifiant,

$$\frac{a_x}{g} = \frac{1}{\cos\alpha \, \text{cotan}\,\theta - \sin\alpha} \qquad (4)$$

d'où, puisque $\alpha = 30°$

$$\text{cotan}\,\theta = \tan 30° + \frac{g}{a_x \cos 30°} \qquad (A)$$
$$= 0{,}577 + \frac{9{,}80}{3{,}66 \times 0{,}866} = 3{,}68$$

et $\theta = 15°12'$.

Note : Pour un plan horizontal, l'angle α vaut 0° et l'équation (*4*) s'écrit $a/g = \tan\theta$, équation donnée pour un mouvement accéléré horizontalement. Pour une accélération vers le bas, le signe placé devant tan 30° doit être remplacé par le signe moins dans l'équation (*A*).

5.5 Un réservoir cubique est rempli de 1,50 m d'huile de densité 0,752. Trouver la force agissant sur le côté du réservoir (*a*) quand l'accélération est de 4,90 m/s² dirigée vers le haut verticalement et (*b*) quand l'accélération est de 4,90 m/s² dirigée vers le bas verticalement.

Solution

(*a*) La figure 5-4 représente la distribution de charge sur le côté vertical AB. En B, l'intensité de la pression en Pa est

$$p_B = wh(1 + \frac{a}{g}) = 0{,}752 \times 9\,810(1{,}5)(1 + \frac{4{,}9}{9{,}81}) = 16\,600 \text{ Pa}$$

La force P_{AB} = aire du diagramme de charge × 1,5 m de long

$$(\frac{1}{2} \times 16\,600 \times 1{,}5)(1{,}5) = 18\,675 \text{ Pa}$$

Une autre solution consiste à écrire :

$$P_{AB} = wh_{cg}A = p_{cg}A = [0{,}752 \times 9\,810(0{,}75)(1 + \frac{4{,}9}{9{,}81})](1{,}5 \times 1{,}5)$$
$$= 18\,675 \text{ Pa} \approx 18{,}7 \text{ kPa}$$

(*b*)
$$P_{AB} = [0{,}72 \times 9\,810(0{,}75)(1 - \frac{4{,}9}{9{,}81})](1{,}5 \times 1{,}5) = 6\,230 \text{ N}$$

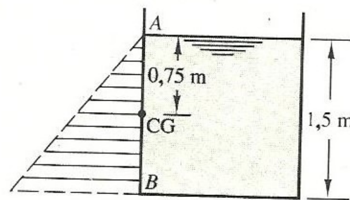


Fig. 5-4

5.6 Déterminer la pression s'exerçant sur le fond du réservoir du problème 5-5 si l'accélération est de 9,81 m/s² vers le bas.

Solution

$$p_B = 0{,}752 \times 9\,810(1{,}5)(1 - 9{,}81/9{,}81) = 0$$

Ainsi, pour une masse de liquide en chute libre, la pression en tout point de la masse est nulle, c'est-à-dire celle de l'atmosphère environnant. Cette conclusion est importante quand on considère un flot d'eau tombant dans l'espace.

5.7 Un récipient ouvert, partiellement rempli de liquide tourne autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire constante. Déterminer l'équation de la surface libre du liquide une fois qu'il a acquis la même vitesse angulaire que le récipient

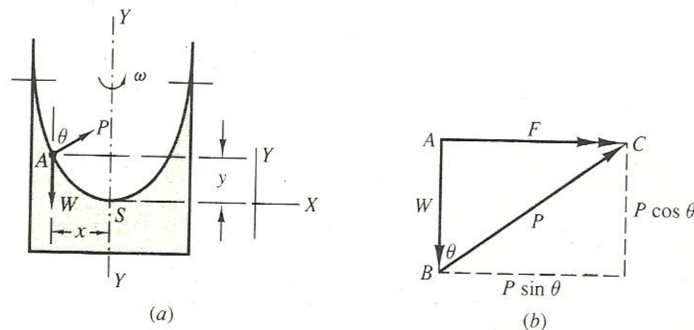


Fig. 5-5

Solution

La figure 5-5 (a) représente une coupe du récipient en rotation avec une particule A située à une distance x de l'axe de rotation. Les forces agissant sur le point matériel A sont le poids W dirigé verticalement vers le bas et P qui est normale à la surface puisque aucun frottement n'a lieu. L'accélération du point matériel A est dirigée vers l'axe de rotation. La direction de la résultante des forces W et P doit être celle de cette accélération, comme le montre la figure 5-5 (b).

D'après la deuxième loi de Newton, $F_x = Ma_x$ ou $P \sin\theta = \dfrac{W}{g} x\omega^2$ (*1*)

$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cos\theta = W$ (2)

Divisant (*1*) par (*2*), $\tan\theta = \dfrac{x\omega^2}{g}$ (*3*)

À présent, θ représente aussi l'angle entre l'axe des X et la tangente à la courbe en A dans la figure 5-5(a). La pente de cette tangente est $\tan\theta$ ou $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Substituant dans (*3*) ci-dessus,

on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x\omega^2}{g}$ d'où, par intégration, $y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2 + C_1$

La constante d'intégration C_1 est nulle car quand $x = 0$, $y = 0$.

5.8 Un réservoir cylindrique ouvert de 2 m de haut et de 1 m de diamètre, contient 1,50 m d'eau. Si le cylindre tourne autour de son axe, (a) quelle vitesse angulaire constante peut-on atteindre sans renverser d'eau? (b) quelle est la pression au fond du réservoir en C et D quand $\omega = 6{,}00$ rad/s? On prendra $g \approx 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Solution

(a) Volume du paraboloïde de révolution $= \dfrac{1}{2}$(volume du cylindre circonscrit) $= \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5 + y_1)]$
Si l'eau ne déborde pas, ce volume est égal au volume situé au-dessus du niveau d'eau initial A-A soit

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5 + y_1)] = \frac{1}{4}\pi 1^2(0{,}5)$$

et $y_1 = 0{,}5$ m.

Pour généraliser, le point situé sur l'axe de rotation s'abaisse autant que le liquide monte le long des parois du récipient.

Fig. 5-6

D'après ce renseignement, les coordonnées x et y du point B sont respectivement de 0,50 et 1,00 m en pre comme origine S. Alors,

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

$$1{,}00 = \frac{\omega^2}{2 \times 9{,}8}(0{,}50)^2$$

d'où $\omega = 8{,}86$ rad/s.

(*b*) Pour $\omega = 6{,}00$ rad/s.

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 = \frac{(6)^2}{2(9{,}8)}(0{,}5)^2 = 0{,}458 \text{ m de } S$$

L'origine S s'abaisse de $\frac{1}{2}y = 0{,}229$ m et S se trouve à présent à $1{,}50 - 0{,}229 = 1{,}271$ m du fond du réser
Sur les parois du réservoir, la profondeur : $1{,}271 + 0{,}458 = 1{,}729$ m (ou $1{,}60 + 0{,}229 = 1{,}729$ m).

En C, $p_C = wh = 9\,800 \times 1{,}271 = 12\,500$ Pa
En D, $p_D = wh = 9\,800 \times 1{,}729 = 16\,900$ Pa

5.9 Considérons le réservoir du problème 5-8 mais cette fois-ci fermé avec l'espace d'air soumis à la pre de 1,07 bar. Quand la vitesse angulaire est de 12,0 rad/s, quelles sont les pressions en bar aux poi et D de la figure 5-7 ($g \approx 9{,}8$ m · s^{-2})?

Solution

Puisque le volume d'air ne change pas à l'intérieur du récipient,

le volume au-dessus du niveau A-A = volume du paraboloïde

soit

$$\frac{1}{4}\pi 1^2 \times 0{,}50 = \frac{1}{2}\pi x_2^2 y_2$$

et

$$y_2 = \frac{(12{,}0)^2}{2(9{,}8)}x_2^2$$

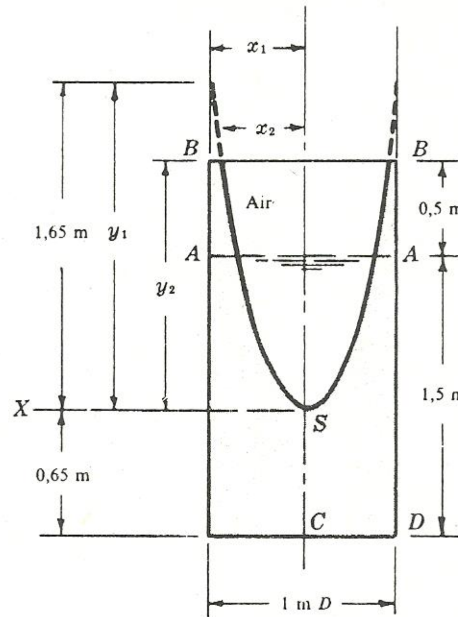


Fig. 5-7

En résolvant (*1*) et (*2*) simultanément, on a $x_2^4 = 0{,}034$. D'où $x_2 = 0{,}43$ m et $y_2 = 1{,}35$ m.
D'après la figure, S est situé à $2{,}00 - 1{,}35 = 0{,}65$ m au-dessus de C. Alors

$$p_{C'} = 107 + wh = 107 + 9{,}8(0{,}65) = 113 \text{ kPa} = 1{,}13 \text{ bar}$$

Pour calculer la pression en D, la hauteur de pression $y_1 = \dfrac{(12{,}0)^2}{2 \times 9{,}8}(0{,}5)^2 = 1{,}84$ m au-dessus de S et

$$p_{D'} = 9{,}8(1{,}84 + 0{,}65) + 107 = 131 \text{ kPa} = 1{,}31 \text{ bar}$$

5.10 (*a*) À quelle vitesse faut-il faire tourner le réservoir du problème 5-9 de façon qu'il y ait une profondeur d'eau nulle au centre du fond? (*b*) Si la paroi latérale du réservoir a 6,35 mm d'épaisseur, quelle est la tension qu'elle supporte au niveau inférieur?

Solution

(*a*) L'origine S va à présent se trouver au point C de la figure 5-7.
Le volume situé au-dessus de la surface du liquide = le volume du paraboloïde, soit

$$\frac{1}{4}\pi 1^2 \times 0{,}50 = \frac{1}{2}\pi\, x_2^2\,(2{,}00) \qquad (1)$$

et

$$y_2 = 2{,}00 = \frac{\omega^2}{2 \times 9{,}81}\, x_2^2 \qquad (2)$$

De (*1*) et (*2*) nous obtenons $\omega^2 = 313{,}6$ et $\omega = 17{,}7$ rad/s.

(*b*) $p_{D'} = 1{,}07 + \dfrac{wh}{10^5}$, où $h = y_1 = \dfrac{(17{,}7)^2(0{,}5)^2}{2 \times 9{,}81} = 4{,}0$ m

$= 1{,}07 + \dfrac{9\,810 \times 4}{10^5} = 1{,}46$ bar. La tension en $D = \sigma_D = \dfrac{p'r}{t} = \dfrac{1{,}46 \times 0{,}50}{6{,}35 \times 10^{-3}} = 115$ bar.

5.11 Un réservoir cylindrique fermé de 2 m de haut et de 1 m de diamètre contient 1,50 m d'eau. Q vitesse angulaire est constante et égale à 20,0 rad/s quelle est la surface du fond découverte ?

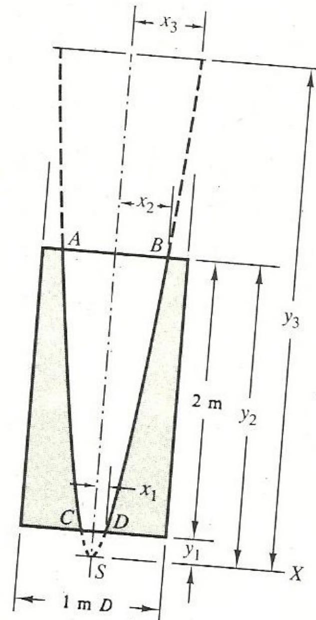


Fig. 5-8

Solution

Pour pouvoir tracer la parabole de la figure 5-8, on a calculé d'abord la valeur de y_3. À

$$y_3 = \frac{(20)^2}{2 \times 9{,}8}\,(0{,}50)^2 = 5{,}10 \text{ m}$$

et on peut maintenant représenter la surface de l'eau, avec S en dessous du fond du réservoir.

$$y_1 = \frac{(20)^2}{2 \times 9{,}8}\,x_1^2$$

$$y_2 = 2 + y_1 = \frac{(20)^2}{2 \times 9{,}8}\,x_2^2,$$

et puisque le volume de l'air est constant,

$$\frac{1}{4}\pi\,1^2 \times 0{,}50 = \text{volume du (paraboloïde } SAB - \text{paraboloïde } SCD)$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,x_2^2\,y_2 - \frac{1}{2}\,\pi\,x_1^2\,y_1.$$

En reportant les valeurs tirées de (*1*) et (*2*) et en résolvant

$$x_1^2 = 0{,}013\,6 \quad \text{et} \quad x_1 = 0{,}116\,6 \text{ m}.$$

D'où la surface découverte $= \pi(0{,}116\,6)^2 = 0{,}043 \text{ m}^2$.

5.12 Un cylindre de 1,80 m de diamètre et de 2,70 m de hauteur est complètement densité 1,60 sous une pression de 2,45 bar à la partie supérieure. Les plaques

cylindre ont 13 mm d'épaisseur et peuvent supporter une pression de 830 bar. Quelle est la vitesse maximale à imposer au cylindre en tours par minute?

Solution

D'après les conditions imposées au réservoir et la formule de la tension de circonférence $\sigma = pr/t$,

$$p_A = \sigma t/r = 830(1{,}3)/90 = 12 \text{ bar} = 1\,200 \text{ kPa}$$

En kPa, $p_A = \Sigma$ des pressions (245 imposée + provoquée par 2,70 m de glycérine + provoquée par la rotation), soit $1\,200 = 245 + 1{,}60 \times 9{,}8 \times 2{,}70 + \dfrac{\omega^2}{2 \times 9{,}8} \times 0{,}9^2 \times 1{,}60 \times 9{,}8$ kPa

En résolvant, $\omega = 37{,}5$ rad/s, soit 360 tours par minute.

On a représenté graphiquement dans la figure 5-9, les conditions de pression, sans respecter l'échelle cependant. La hauteur de pression de 15,6 m de glycérine avant rotation est indiquée par la droite RST. La courbe parabolique des pressions de sommet S est produite par la vitesse angulaire constante de 37,5 rad/s. Si le récipient avait été plein sans être sous pression, le sommet S aurait coïncidé avec l'extrémité supérieure interne du récipient.

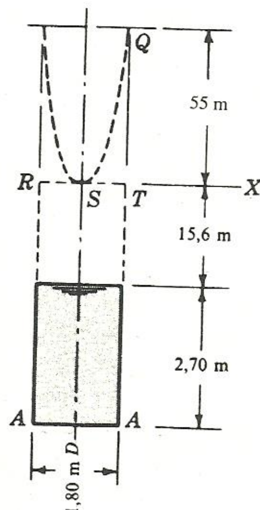


Fig. 5-9

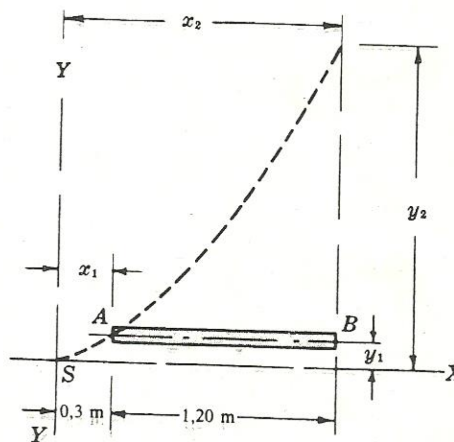


Fig. 5-10

5.13 Un tuyau de 7,50 cm de diamètre et de 1,20 m de long est rempli d'huile de densité 0,822 et ensuite ses extrémités sont scellées. Placé horizontalement, on le fait tourner à 27,5 rad/s autour d'un axe vertical situé à 30 cm d'une de ses extrémités. Quelle est la pression produite à l'autre extrémité en kPa?

Solution

Comme on l'a noté précédemment, la pression d'un bout à l'autre de AB dans la figure 5-10 va augmenter avec la rotation. À une certaine vitesse de rotation, la pression augmentant tendrait à comprimer le liquide et même à faire décroître la pression en A. Puisque les liquides sont pratiquement incompressibles, la rotation ne va pas faire baisser la pression en A, ni la faire monter. Entre A et B, la pression va augmenter avec le carré de la distance de l'axe YY.

Pour calculer la pression en B :

$$y_1 = \frac{(27{,}5)^2}{2g} \times 0{,}3^2 = 3{,}47 \text{ m} \qquad (1) \qquad\qquad y_2 = \frac{(27{,}5)^2}{2g} \times 1{,}5^2 = 86{,}8 \text{ m} \qquad (2)$$

et

$$p'_B = 0{,}822(9{,}80)(86{,}8 - 3{,}47) = 671 \text{ kPa}$$

Problèmes supplémentaires

5.14 Un récipient en partie rempli d'eau est soumis à une accélération horizontale constante. L'inclinaison de la surface de l'eau est de 30°. Quelle est l'accélération du récipient ? *Rép.* 5,66 m/s^2.

5.15 Un réservoir ouvert a la forme d'un carré de 1,82 m de côté, pèse 3 425 N et contient 91 cm d'eau. Il est soumis à l'action d'une force non compensée de 10,4 kN de direction parallèle à deux de ses côtés. Quelle doit être la hauteur du réservoir pour que l'eau ne déborde pas ? Quelle est la force s'exerçant sur le côté où l'eau est la plus profonde ? *Rép.* 1,19 m; 12,9 kN.

5.16 Un réservoir ouvert de 9,00 m de long, 1,20 m de large et 1,20 m de profondeur est rempli de 1,00 m d'huile de densité 0,822. Il est accéléré uniformément à partir de sa position de repos jusqu'à ce qu'il ait atteint une vitesse de 14 m/s. Quel est le temps minimal pendant lequel on peut accélérer le réservoir sans renverser d'huile ? *Rép.* 32,1 s.

5.17 Quant un réservoir rectangulaire de 1,50 m de large, 3,00 m de long et 1,80 de profondeur, contenant 1,20 m d'eau est accéléré horizontalement, parallèlement à sa longueur de 4,90 m/s^2, quelle est la quantité d'eau versée ? *Rép.* 7,6 m^3.

5.18 Avec quelle accélération le mouvement du réservoir du problème précédent doit-il s'effectuer pour que la profondeur d'eau à l'avant soit nulle ? *Rép.* 5,88 m/s^2.

5.19 Un réservoir d'eau ouvert est soumis à une accélération de 4,90 m/s^2 le long d'un plan incliné à 15°. Quelle est la pente de la surface libre de l'eau ? *Rép.* 29° 1'.

5.20 Un récipient contenant de l'huile de densité 0,762 se déplace verticalement vers le haut avec une accélération de + 2,5 m/s^2. Quelle est la pression à une profondeur de 2 m ? *Rép.* 18,7 kPa.

5.21 Si l'accélération du problème 5.20 est de −2,5 m/s^2, quelle est la pression à une profondeur de 2 m ? *Rép.* 11,1 kPa.

5.22 Une force non compensée de 267 N dirigée verticalement vers le haut accélère un volume d'eau de 43,9 l. Si l'eau a une profondeur de 91 cm dans un réservoir cylindrique, quelle est la force s'exerçant sur le fond du réservoir ? *Rép.* 700 N.

5.23 Un réservoir cylindrique ouvert de 120 cm de diamètre et de 180 cm de profondeur est rempli d'eau et tourne autour de son axe à 60 tours par minute. Quelle est la quantité de liquide versé et quelle est la profondeur de l'eau au niveau de l'axe ? *Rép.* 0,410 m^3, 1,074 m.

5.24 À quelle vitesse doit tourner le réservoir du problème 5.23 pour qu'au centre la profondeur soit nulle ? *Rép.* 9,9 rad/s.

5.25 Un récipient fermé de 1 m de diamètre est complètement rempli d'eau. Si le récipient tourne à 1 200 tours par minute, quelle est l'augmentation de pression à la partie supérieure du réservoir au niveau de la circonférence ? *Rép.* 1 970 kPa.

5.26 Un récipient ouvert, de 46 cm de diamètre et rempli d'eau, tourne autour de son axe à une vitesse telle que la surface de l'eau à 10 cm de l'axe fait un angle de 40° avec l'horizontale. Calculer la vitesse de rotation. *Rép.* 9 rad/s.

5.27 Un tube en U avec des coudes à angle droit a 305 mm de large et contient du mercure qui s'élève à 229 mm dans chaque branche quand le tube est au repos. À quelle vitesse doit-on faire tourner le tube autour d'un axe situé à 76 mm d'une des branches pour qu'il n'y ait plus de mercure dans cette dernière ? *Rép.* 13,9 rad/s.

5.28 Un tuyau de 2,13 m de long et 5,1 cm de diamètre est scellé et rempli d'eau à une pression de 0,86 bar. Placé horizontalement, on le fait tourner autour de l'une de ses extrémités à 3 rad/s. Quelle est la pression à l'autre extrémité ? *Rép.* 1,07 bar.

5.29 L'impulseur de 2,0 m de diamètre d'une pompe à eau centrifuge fermée tourne à 1 500 tours par minute. Si le corps est plein d'eau, quelle est la hauteur de pression produite par la rotation ? *Rép.* 1 260 m.

Problèmes supplémentaires

5.14 Un récipient en partie rempli d'eau est soumis à une accélération horizontale constante. L'inclinaison de la surface de l'eau est de 30°. Quelle est l'accélération du récipient ? *Rép.* 5,66 m/s^2.

5.15 Un réservoir ouvert a la forme d'un carré de 1,82 m de côté, pèse 3 425 N et contient 91 cm d'eau. Il est soumis à l'action d'une force non compensée de 10,4 kN de direction parallèle à deux de ses côtés. Quelle doit être la hauteur du réservoir pour que l'eau ne déborde pas? Quelle est la force s'exerçant sur le côté où l'eau est la plus profonde? *Rép.* 1,19 m; 12,9 kN.

5.16 Un réservoir ouvert de 9,00 m de long, 1,20 m de large et 1,20 m de profondeur est rempli de 1,00 m d'huile de densité 0,822. Il est accéléré uniformément à partir de sa position de repos jusqu'à ce qu'il ait atteint une vitesse de 14 m/s. Quel est le temps minimal pendant lequel on peut accélérer le réservoir sans renverser d'huile? *Rép.* 32,1 s.

5.17 Quant un réservoir rectangulaire de 1,50 m de large, 3,00 m de long et 1,80 de profondeur, contenant 1,20 m d'eau est accéléré horizontalement, parallèlement à sa longueur de 4,90 m/s^2, quelle est la quantité d'eau versée? *Rép.* 7,6 m^3.

5.18 Avec quelle accélération le mouvement du réservoir du problème précédent doit-il s'effectuer pour que la profondeur d'eau à l'avant soit nulle? *Rép.* 5,88 m/s^2.

5.19 Un réservoir d'eau ouvert est soumis à une accélération de 4,90 m/s^2 le long d'un plan incliné à 15°. Quelle est la pente de la surface libre de l'eau? *Rép.* 29° 1'.

5.20 Un récipient contenant de l'huile de densité 0,762 se déplace verticalement vers le haut avec une accélération de + 2,5 m/s^2. Quelle est la pression à une profondeur de 2 m? *Rép.* 18,7 kPa.

5.21 Si l'accélération du problème 5.20 est de −2,5 m/s^2, quelle est la pression à une profondeur de 2 m? *Rép.* 11,1 kPa.

5.22 Une force non compensée de 267 N dirigée verticalement vers le haut accélère un volume d'eau de 43,9 l. Si l'eau a une profondeur de 91 cm dans un réservoir cylindrique, quelle est la force s'exerçant sur le fond du réservoir? *Rép.* 700 N.

5.23 Un réservoir cylindrique ouvert de 120 cm de diamètre et de 180 cm de profondeur est rempli d'eau et tourne autour de son axe à 60 tours par minute. Quelle est la quantité de liquide versé et quelle est la profondeur de l'eau au niveau de l'axe? *Rép.* 0,410 m^3, 1,074 m.

5.24 À quelle vitesse doit tourner le réservoir du problème 5.23 pour qu'au centre la profondeur soit nulle? *Rép.* 9,9 rad/s.

5.25 Un récipient fermé de 1 m de diamètre est complètement rempli d'eau. Si le récipient tourne à 1 200 tours par minute, quelle est l'augmentation de pression à la partie supérieure du réservoir au niveau de la circonférence? *Rép.* 1 970 kPa.

5.26 Un récipient ouvert, de 46 cm de diamètre et rempli d'eau, tourne autour de son axe à une vitesse telle que la surface de l'eau à 10 cm de l'axe fait un angle de 40° avec l'horizontale. Calculer la vitesse de rotation. *Rép.* 9 rad/s.

5.27 Un tube en U avec des coudes à angle droit a 305 mm de large et contient du mercure qui s'élève à 229 mm dans chaque branche quand le tube est au repos. À quelle vitesse doit-on faire tourner le tube autour d'un axe situé à 76 mm d'une des branches pour qu'il n'y ait plus de mercure dans cette dernière? *Rép.* 13,9 rad/s.

5.28 Un tuyau de 2,13 m de long et 5,1 cm de diamètre est scellé et rempli d'eau à une pression de 0,86 bar. Placé horizontalement, on le fait tourner autour de l'une de ses extrémités à 3 rad/s. Quelle est la pression à l'autre extrémité? *Rép.* 1,07 bar.

5.29 L'impulseur de 2,0 m de diamètre d'une pompe à eau centrifuge fermée tourne à 1 500 tours par minute. Si le corps est plein d'eau, quelle est la hauteur de pression produite par la rotation? *Rép.* 1 260 m.

Chapitre 6

Analyse dimensionnelle et similitude hydraulique

INTRODUCTION

La théorie mathématique et les données expérimentales ont fourni des solutions pratiques à plusieurs problèmes d'hydraulique. À l'heure actuelle, on ne conçoit et on ne construit de structures hydrauliques importantes qu'après avoir fait des études de modèle approfondies. L'application de l'analyse dimensionnelle et de la similitude hydraulique permet à l'ingénieur d'organiser et de simplifier les expériences et d'en analyser le résultat.

ANALYSE DIMENSIONNELLE

L'analyse dimensionnelle est constituée par le calcul des dimensions des grandeurs; de plus c'est un outil supplémentaire de grande utilité dans la mécanique des fluides moderne. Dans une équation exprimant une relation physique entre grandeurs, l'égalité absolue des nombres et des dimensions doit exister. En général, toute relation physique de ce genre peut être réduite aux grandeurs fondamentales que sont la force F, la longueur L et le temps T (ou la masse M, la longueur L et le temps T). Les applications de cette technique comprennent (*1*) le passage d'un système d'unité à un autre, (*2*) l'établissement des équations, (*3*) la réduction du nombre des variables nécessaires à un programme expérimental et (*4*) l'établissement des principes de la conception d'un modèle.

Le théorème en Pi de Buckingham est exprimé et illustré dans les problèmes 6.13 à 6.17.

MODÈLES HYDRAULIQUES

Les modèles hydrauliques, en général, peuvent être soit des modèles vrais, soit des modèles déformés. Les modèles vrais ont toutes les caractéristiques importantes du prototype reproduites à l'échelle (géométriquement semblables) et vérifient les restrictions imposées à la conception (similitudes cinématique et dynamique). Les comparaisons de modèles à prototype ont montré clairement que la correspondance des comportements va souvent bien au-delà des limites attendues, comme en témoigne le fonctionnement satisfaisant de plusieurs structures élaborées d'après des tests sur modèles.

SIMILITUDE GÉOMÉTRIQUE

On a similitude géométrique entre modèle et prototype si les rapports de toutes les longueurs correspondantes du modèle et du prototype sont égales. De tels rapports peuvent s'écrire :

$$\frac{L_{\text{modèle}}}{L_{\text{prototype}}} = L_{\text{rap.}} \quad \text{ou} \quad \frac{L_m}{L_p} = L_r \tag{1}$$

et

$$\frac{A_{\text{modèle}}}{A_{\text{prototype}}} = \frac{L^2_{\text{modèle}}}{L^2_{\text{prototype}}} = L^2_{\text{rap.}} = L^2_r \tag{2}$$

Chapitre 6

Analyse dimensionnelle et similitude hydraulique

INTRODUCTION

La théorie mathématique et les données expérimentales ont fourni des solutions pratiques à plusieurs problèmes d'hydraulique. À l'heure actuelle, on ne conçoit et on ne construit de structures hydrauliques importantes qu'après avoir fait des études de modèle approfondies. L'application de l'analyse dimensionnelle et de la similitude hydraulique permet à l'ingénieur d'organiser et de simplifier les expériences et d'en analyser le résultat.

ANALYSE DIMENSIONNELLE

L'analyse dimensionnelle est constituée par le calcul des dimensions des grandeurs; de plus c'est un outil supplémentaire de grande utilité dans la mécanique des fluides moderne. Dans une équation exprimant une relation physique entre grandeurs, l'égalité absolue des nombres et des dimensions doit exister. En général, toute relation physique de ce genre peut être réduite aux grandeurs fondamentales que sont la force F, la longueur L et le temps T (ou la masse M, la longueur L et le temps T). Les applications de cette technique comprennent (*1*) le passage d'un système d'unité à un autre, (*2*) l'établissement des équations, (*3*) la réduction du nombre des variables nécessaires à un programme expérimental et (*4*) l'établissement des principes de la conception d'un modèle.

Le théorème en Pi de Buckingham est exprimé et illustré dans les problèmes 6.13 à 6.17.

MODÈLES HYDRAULIQUES

Les modèles hydrauliques, en général, peuvent être soit des modèles vrais, soit des modèles déformés. Les modèles vrais ont toutes les caractéristiques importantes du prototype reproduites à l'échelle (géométriquement semblables) et vérifient les restrictions imposées à la conception (similitudes cinématique et dynamique). Les comparaisons de modèles à prototype ont montré clairement que la correspondance des comportements va souvent bien au-delà des limites attendues, comme en témoigne le fonctionnement satisfaisant de plusieurs structures élaborées d'après des tests sur modèles.

SIMILITUDE GÉOMÉTRIQUE

On a similitude géométrique entre modèle et prototype si les rapports de toutes les longueurs correspondantes du modèle et du prototype sont égales. De tels rapports peuvent s'écrire :

$$\frac{L_{\text{modèle}}}{L_{\text{prototype}}} = L_{\text{rap.}} \quad \text{ou} \quad \frac{L_m}{L_p} = L_r \qquad (1)$$

et

$$\frac{A_{\text{modèle}}}{A_{\text{prototype}}} = \frac{L^2_{\text{modèle}}}{L^2_{\text{prototype}}} = L^2_{\text{rap.}} = L^2_r \qquad (2)$$

SIMILITUDE CINÉMATIQUE

On a similitude cinématique entre modèle et prototype (*1*) si les chemins des particules homologues en mouvement sont géométriquement semblables et (*2*) si les rapports des vitesses des particules homologues sont égaux. On a donné ci-dessous quelques-un des plus utiles de ces rapports.

$$\text{Vitesse :} \quad \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{L_m}{L_p} : \frac{T_m}{T_p} = \frac{L_r}{T_r} \tag{3}$$

$$\text{Accélération :} \quad \frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m/T_m^2}{L_p/T_p^2} = \frac{L_m}{L_p} : \frac{T_m^2}{T_p^2} = \frac{L_r}{T_r^2} \tag{4}$$

$$\text{Débit :} \quad \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_m^3}{L_p^3} : \frac{T_m}{T_p} = \frac{L_r^3}{T_r} \tag{5}$$

SIMILITUDE DYNAMIQUE

On a similitude dynamique entre systèmes géométriquement et cinématiquement semblables si les rapports entre toutes les forces homologues sont égaux. On déduit les conditions nécessaires pour la similitude complète de la deuxième loi du mouvement de Newton, $\Sigma F_x = Ma_x$. La force agissante peut être unique ou la résultante de plusieurs d'entre elles : forces visqueuses, forces de pression, forces de la pesanteur, forces de tension superficielle et d'élasticité. Il s'ensuit la relation suivante entre forces agissant sur le modèle et sur le prototype :

$$\frac{\Sigma \text{ forces (visqueuse} + \rightarrow \text{pression} + \rightarrow \text{pesanteur} + \rightarrow \text{tension superficielle} + \rightarrow \text{élasticité})_m}{\Sigma \text{ forces (visqueuse} + \rightarrow \text{pression} + \rightarrow \text{pesanteur} + \rightarrow \text{tension superficielle} + \rightarrow \text{élasticité})_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

LE RAPPORT DES FORCES D'INERTIE s'établit comme suit :

$$F_r = \frac{\text{force}_{\text{modèle}}}{\text{force}_{\text{prototype}}} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m L_m^3}{\rho_p L_p^3} \frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r L_r^2 (\frac{L_r}{T_r})^2$$

$$F_r = \rho_r L_r^2 V_r^2 = \rho_r A_r V_r^2 \tag{6}$$

Cette équation exprime la loi générale de la similitude dynamique entre modèle et prototype et on s'y reportera en l'appelant l'*équation newtonienne.*

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE LA PRESSION (*nombre d'Euler*) donne la relation (utilisant $T = L/V$)

$$\frac{Ma}{pA} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{pL^2} = \frac{\rho L^2(L^2/T^2)}{pL^2} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^2} = \frac{\rho V^2}{p} \tag{7}$$

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE LA VISCOSITÉ (*nombre de Reynolds*) se déduit de

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y})A} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu(\frac{V}{L})L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} \tag{8}$$

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE LA PESANTEUR se déduit de

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} \tag{9}$$

La racine carré de ce rapport, $\dfrac{V}{\sqrt{Lg}}$, est connue sous le nom de *nombre de Froude.*

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE L'ÉLASTICITÉ (*nombre de Cauchy*) se déduit de

$$\frac{Ma}{EA} = \frac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E} \tag{10}$$

La racine carrée de ce rapport $\dfrac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, est connue sous le nom de *nombre de Mach.*

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE À LA TENSION SUPERFICIELLE (*nombre de Weber*) se déduit de

$$\frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \tag{11}$$

En général, l'ingénieur doit s'occuper de l'effet de la force dominante. Dans la plupart des problèmes d'écoulement des fluides, la pesanteur, la viscosité et (ou) l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément. Les solutions envisagées dans cet ouvrage ne couvrent que les cas où une force prédominante influe sur la configuration de l'écoulement, les autres forces ayant des effets négligeables ou compensateurs. Si plusieurs forces influent ensemble sur les conditions de l'écoulement, le problème devient très compliqué et dépasse le cadre de cet ouvrage. Les problèmes 6.21 et 6.34 en suggèrent la possibilité.

RAPPORTS DE TEMPS

Les rapports de temps établis pour les configurations d'écoulement dominées essentiellement par la viscosité, la pesanteur, la tension superficielle et l'élasticité sont

$$T_r = \frac{L_r^2}{\upsilon_r} \quad \text{(voir problème 6.20)} \tag{12}$$

$$T_r = \sqrt{\frac{L_r}{g_r}} \quad \text{(voir problème 6.18)} \tag{13}$$

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \tag{14}$$

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r/\rho_r}} \tag{15}$$

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE LA PESANTEUR se déduit de

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} \qquad (9)$$

La racine carré de ce rapport, $\dfrac{V}{\sqrt{Lg}}$, est connue sous le nom de *nombre de Froude.*

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE ET DE L'ÉLASTICITÉ (*nombre de Cauchy*) se déduit de

$$\frac{Ma}{EA} = \frac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E} \qquad (10)$$

La racine carrée de ce rapport $\dfrac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, est connue sous le nom de *nombre de Mach.*

LE RAPPORT DE LA FORCE D'INERTIE À LA TENSION SUPERFICIELLE (*nombre de Weber*) se déduit de

$$\frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \qquad (11)$$

En général, l'ingénieur doit s'occuper de l'effet de la force dominante. Dans la plupart des problèmes d'écoulement des fluides, la pesanteur, la viscosité et (ou) l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément. Les solutions envisagées dans cet ouvrage ne couvrent que les cas où une force prédominante influe sur la configuration de l'écoulement, les autres forces ayant des effets négligeables ou compensateurs. Si plusieurs forces influent ensemble sur les conditions de l'écoulement, le problème devient très compliqué et dépasse le cadre de cet ouvrage. Les problèmes 6.21 et 6.34 en suggèrent la possibilité.

RAPPORTS DE TEMPS

Les rapports de temps établis pour les configurations d'écoulement dominées essentiellement par la viscosité, la pesanteur, la tension superficielle et l'élasticité sont

$$T_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \quad \text{(voir problème 6.20)} \qquad (12)$$

$$T_r = \sqrt{\frac{L_r}{g_r}} \quad \text{(voir problème 6.18)} \qquad (13)$$

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \qquad (14)$$

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r/\rho_r}} \qquad (15)$$

Problèmes résolus

6.1 Exprimer chacune des grandeurs suivantes (*a*) en fonction de la force F, de la longueur L et du temps T et (*b*) en fonction de la masse M, de la longeur L et du temps T.

Solution

	Quantité	*Symbole*	(*a*) *F-L-T*	(*b*) *M-L-T*
(*a*)	Aire en m^2	A	L^2	L^2
(*b*)	Volume v en m^3	v	L^3	L^3
(*c*)	Vitesse V en m/s	V	LT^{-1}	LT^{-1}
(*d*)	Accélération a ou g en m/s^2	a, g	LT^{-2}	LT^{-2}
(*e*)	Vitesse angulaire ω en rad/s	ω	T^{-1}	T^{-1}
(*f*)	Force F en N	F	F	MLT^{-2}
(*g*)	Masse M en kg	M	FT^2L^{-1}	M
(*h*)	Poids spécifique w en N/m^3	w	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
(*i*)	Masse volumique ρ en kg/m^3	ρ	FT^2L^{-4}	ML^{-3}
(*j*)	Pression p en Pa	p	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*k*)	Viscosité absolue μ en Pa · s	μ	FTL^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$
(*l*)	Viscosité cinématique ν en m^2/s	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
(*m*)	Module d'élasticité E en Pa	E	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*n*)	Puissance P en W	P	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}
(*o*)	Moment T en N · m	T	FL	ML^2T^{-2}
(*p*)	Vitesse d'écoulement Q en m^3/s	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
(*q*)	Contrainte visqueuse τ en Pa	τ	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*r*)	Tension superficielle σ en N/m	σ	FL^{-1}	MT^{-2}
(*s*)	Poids W en N	W	F	MLT^{-2}
(*t*)	Débit pondéral W en N/s	W	FT^{-1}	MLT^{-3}

6.2 Établir une équation donnant la distance parcourue pendant le temps T par un corps en chute libre, en admettant que la distance dépend du poids du corps, de l'accélération de la pesanteur et du temps.

Solution

$$\text{Distance } s = f(W, g, T)$$

soit

$$s = KW^a g^b T^c$$

où K est un coefficient *sans dimension*, à déterminer expérimentalement.

Cette équation doit être dimensionnellement homogène. Les exposants de chacune de ces grandeurs doivent être les mêmes des deux côtés de l'équation. On peut écrire

$$F^0L^1T^0 = (F^a)(L^bT^{-2b})(T^c)$$

En égalant les exposants de F, L et T respectivement, on obtient $0 = a$, $1 = b$ et $0 = -2b + c$, d'où $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. En substituant,

$$s = KW^0gT^2 \quad \text{ou} \quad s = KgT^2$$

Notons que l'exposant du poids W est nul, ce qui signifie que la distance est indépendante du poids. Le facteur K doit être déterminé par l'analyse physique et (ou) l'expérience.

6.3 *Le nombre de Reynolds* est fonction de la densité, de la viscosité et de la vitesse d'un fluide, et d'une longueur caractéristique. Établir la relation donnant le *nombre de Reynolds* par l'analyse dimensionnelle.

Problèmes résolus

6.1 Exprimer chacune des grandeurs suivantes (*a*) en fonction de la force F, de la longueur L et du temps T et (*b*) en fonction de la masse M, de la longueur L et du temps T.

Solution

	Quantité	*Symbole*	(*a*) *F-L-T*	(*b*) *M-L-T*
(*a*)	Aire en m^2	A	L^2	L^2
(*b*)	Volume v en m^3	v	L^3	L^3
(*c*)	Vitesse V en m/s	V	LT^{-1}	LT^{-1}
(*d*)	Accélération a ou g en m/s^2	a, g	LT^{-2}	LT^{-2}
(*e*)	Vitesse angulaire ω en rad/s	ω	T^{-1}	T^{-1}
(*f*)	Force F en N	F	F	MLT^{-2}
(*g*)	Masse M en kg	M	FT^2L^{-1}	M
(*h*)	Poids spécifique w en N/m^3	w	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
(*i*)	Masse volumique ρ en kg/m^3	ρ	FT^2L^{-4}	ML^{-3}
(*j*)	Pression p en Pa	p	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*k*)	Viscosité absolue μ en Pa · s	μ	FTL^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$
(*l*)	Viscosité cinématique ν en m^2/s	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
(*m*)	Module d'élasticité E en Pa	E	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*n*)	Puissance P en W	P	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}
(*o*)	Moment T en N · m	T	FL	ML^2T^{-2}
(*p*)	Vitesse d'écoulement Q en m^3/s	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
(*q*)	Contrainte visqueuse τ en Pa	τ	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(*r*)	Tension superficielle σ en N/m	σ	FL^{-1}	MT^{-2}
(*s*)	Poids W en N	W	F	MLT^{-2}
(*t*)	Débit pondéral W en N/s	W	FT^{-1}	MLT^{-3}

6.2 Établir une équation donnant la distance parcourue pendant le temps T par un corps en chute libre, en admettant que la distance dépend du poids du corps, de l'accélération de la pesanteur et du temps.

Solution

$$\text{Distance } s = f(W, g, T)$$

soit

$$s = KW^a g^b T^c$$

où K est un coefficient *sans dimension*, à déterminer expérimentalement.

Cette équation doit être dimensionnellement homogène. Les exposants de chacune de ces grandeurs doivent être les mêmes des deux côtés de l'équation. On peut écrire

$$F^0L^1T^0 = (F^a)(L^bT^{-2b})(T^c)$$

En égalant les exposants de F, L et T respectivement, on obtient $0 = a$, $1 = b$ et $0 = -2b + c$, d'où $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. En substituant,

$$s = KW^0gT^2 \quad \text{ou} \quad s = KgT^2$$

Notons que l'exposant du poids W est nul, ce qui signifie que la distance est indépendante du poids. Le facteur K doit être déterminé par l'analyse physique et (ou) l'expérience.

6.3 *Le nombre de Reynolds* est fonction de la densité, de la viscosité et de la vitesse d'un fluide, et d'une longueur caractéristique. Établir la relation donnant le *nombre de Reynolds* par l'analyse dimensionnelle.

Solution

$$R_E = f(\rho, \mu, V, L)$$

ou
$$R_E = K\rho^a \mu^b V^c L^d$$

Alors, en dimensions, $F^0 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c T^{-c})(L^d)$

En égalant les exposants de F, L et T, nous obtenons

$$0 = a + b, \quad 0 = -4a - 2b + c + d, \quad 0 = 2a + b - c$$

d'où $a = -b$, $c = -b$, $d = -b$. En substituant

$$R_E = K\rho^{-b} \mu^b V^{-b} L^{-b} = K\left(\frac{VL\rho}{\mu}\right)^{-b}$$

Les valeurs de K et de b doivent être déterminées par l'analyse physique et (ou) l'expérience. Ici, $K = 1$ et $b = -1$.

6.4 Pour un liquide idéal, exprimer le débit Q à travers un orifice à bord mince en fonction de la masse volumique du liquide, du diamètre de l'orifice et de la différence de pression.

Solution

$$Q = f(\rho, p, d)$$

ou
$$Q = K\rho^a p^b d^c$$

Alors, en dimensions
$$F^0 L^3 T^{-1} = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b L^{-2b})(L^c)$$

et
$$0 = a + b, \quad 3 = -4a - 2b + c, \quad -1 = 2a$$

d'où $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$. Reportant

$$Q = K\rho^{-1/2} p^{1/2} d^2$$

ou
$$Q(\text{idéal}) = Kd^2\sqrt{p/\rho}$$

On doit calculer K par l'analyse et (ou) l'expérience.

Pour un orifice situé sur le côté d'un réservoir sous une hauteur de pression h, $p = wh$. Pour obtenir la formule courante de l'orifice à bord mince du chapitre 12, on a $K = \sqrt{2}(\pi/4)$. Alors

$$Q(\text{idéal}) = \sqrt{2}(\pi/4)d^2\sqrt{wh/\rho}$$

Mais $g = w/\rho$; d'où
$$Q(\text{idéal}) = \frac{1}{4}\pi d^2\sqrt{2gh}$$

6.5 Déterminer la pression d'arrêt exercée par l'écoulement d'un fluide incompressible sur un objet immergé, en admettant que cette pression est fonction de la densité et de la vitesse.

Solution

$$P = f(\rho, V)$$

ou
$$P = K\rho^a V^b$$

Alors, en dimensions $F^1L^{-2}T^0 = (F^aT^{2a}L^{-4a})(L^bT^{-b})$
et $1 = a, -2 = -4a + b, 0 = 2a - b$, d'où $a = 1, b = 2$. Soit

$$p = K\rho V^2$$

6.6 En admettant que la puissance fournie par une pompe est fonction du poids spécifique du fluide, du débit en m³/s et de la hauteur de pression fournie, établir une équation par l'analyse dimensionnelle.

Solution

$$P = f(w, Q, H)$$

ou

$$P = K w^a Q^b H^c$$

Alors, en dimensions $F^1L^1T^{-1} = (F^aL^{-3a})(L^{3b}T^{-b})(L^c)$
et $1 = a, 1 = -3a + 3b + c, -1 = -b$, d'où $a = 1, b = 1, c = 1$. Soit

$$P = KwQH$$

6.7 On tire un projectile avec un angle θ et une vitesse initiale V. Trouver la portée R dans le plan horizontal en admettant que la portée est fonction de V, θ et g.

Solution

$$R = f(V, g, \theta) = KV^a g^b \theta^c \qquad (A)$$

En dimensions

$$L^1 = (L^aT^{-a})(L^bT^{-2b}) \qquad (B)$$

Puisque θ est sans dimension, il n'apparaît pas dans (B).

En résolvant en d et b, $a = 2$ et $b = -1$. En reportant, $R = KV^2/g$. Il est évident que cette équation n'est pas satisfaisante puisqu'il y manque la contribution de l'angle θ. On montrera au problème 6.8 comment on peut trouver une solution malgré tout.

6.8 Résoudre le problème 6.7, en utilisant la notation vectorielle.

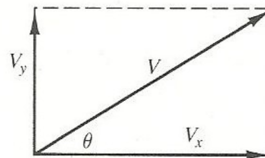


Fig. 6-1

Solution

Dans les cas d'un mouvement à deux dimensions, on doit introduire les composantes selon X et Y pour avoir une analyse complète. L'équation (A) du problème 6.7 peut s'écrire

$$R_x = K\, V_x^a\, V_y^b\, g_y^c\, \theta^d$$

En dimensions,

$$L_x^1 = (L_x^aT^{-a})(L_y^bT^{-b})(L_y^cT^{-2c})$$

Alors, en dimensions $F^1L^{-2}T^0 = (F^aT^{2a}L^{-4a})(L^bT^{-b})$
et $1 = a, -2 = -4a + b, 0 = 2a - b$, d'où $a = 1, b = 2$. Soit

$$p = K\rho V^2$$

6.6 En admettant que la puissance fournie par une pompe est fonction du poids spécifique du fluide, du débit en m^3/s et de la hauteur de pression fournie, établir une équation par l'analyse dimensionnelle.

Solution

$$P = f(w, Q, H)$$

ou

$$P = Kw^aQ^bH^c$$

Alors, en dimensions $F^1L^1T^{-1} = (F^aL^{-3a})(L^{3b}T^{-b})(L^c)$
et $1 = a, 1 = -3a + 3b + c, -1 = -b$, d'où $a = 1, b = 1, c = 1$. Soit

$$P = KwQH$$

6.7 On tire un projectile avec un angle θ et une vitesse initiale V. Trouver la portée R dans le plan horizontal, en admettant que la portée est fonction de V, θ et g.

Solution

$$R = f(V, g, \theta) = KV^ag^b\theta^c \qquad (A)$$

En dimensions

$$L^1 = (L^aT^{-a})(L^bT^{-2b}) \qquad (B)$$

Puisque θ est sans dimension, il n'apparaît pas dans (B).

En résolvant en d et b, $a = 2$ et $b = -1$. En reportant, $R = KV^2/g$. Il est évident que cette équation n'est pas satisfaisante puisqu'il y manque la contribution de l'angle θ. On montrera au problème 6.8 comment on peut trouver une solution malgré tout.

6.8 Résoudre le problème 6.7, en utilisant la notation vectorielle.

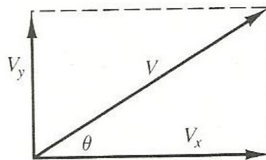


Fig. 6-1

Solution

Dans les cas d'un mouvement à deux dimensions, on doit introduire les composantes selon X et Y pour avoir une analyse complète. L'équation (A) du problème 6.7 peut s'écrire

$$R_x = K\,V_x^a\,V_y^b\,g_y^c\,\theta^d$$

En dimensions,

$$L_x^1 = (L_x^aT^{-a})(L_y^bT^{-b})(L_y^cT^{-2c}) \qquad (C)$$

ce qui donne

$$L_x : 1 = a$$
$$T : 0 = -a - b - 2c$$
$$L_y : 0 = b + c$$

Alors $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$. Reportant dans (C),

$$R = K\left(\frac{V_x V_y}{g}\right) \qquad (D)$$

D'après le diagramme vectoriel, $\cos\theta = V_x/V$, $\sin\theta = V_y/V$ et $\cos\theta \ \sin\theta = V_x V_y/V^2$. Reportant dans (D),

$$R = K\,\frac{V^2 \cos\theta \ \sin\theta}{g} = K\,\frac{V^2 \ \sin 2\theta}{2g} \qquad (E)$$

D'après la statique, R s'écrit en général $\dfrac{V^2 \sin 2\theta}{g}$; ainsi $K = 2$ dans l'équation (E).

6.9 En admettant que la résistance exercée par un fluide en mouvement sur un corps est fonction de la masse volumique, de la viscosité et de la vitesse du fluide, et d'une longueur caractéristique du corps, établir l'équation générale.

Solution

$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$

ou

$$F = K\rho^a \mu^b L^c V^d$$

D'où

$$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c)(L^d T^{-d})$$

et $1 = a + b$, $0 = -4a - 2b + c + d$, $0 = 2a + b - d$.

On notera qu'il y a plus d'exposants inconnus que d'équations. Une méthode d'approche consiste à exprimer trois des inconnues en fonction de la quatrième. La résolution en fonction de b donne

$$a = 1 - b, \quad d = 2 - b, \quad c = 2 - b$$

Reportant

$$F = K\rho^{1-b}\mu^b L^{2-b} V^{2-b}$$

Pour exprimer cette équation sous la forme la plus communément utilisée, multiplier par 2/2 et réordonner les termes comme suit :

$$F = 2K\rho\left(\frac{VL\rho}{\mu}\right)^{-b} L^2 \frac{V^2}{2}$$

Reconnaissant dans $\dfrac{VL\rho}{\mu}$ le *nombre de Reynolds* et constatant que L^2 représente une aire, nous obtenons

$$F = [2K R_E^{-b}]\rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{ou} \quad F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}$$

6.10 Établir une expression de la contrainte tangentielle visqueuse d'un fluide s'écoulant dans une conduite, en admettant que la contrainte est fonction du diamètre, de la rugosité du tuyau, de la densité, de la viscosité et de la vitesse du fluide.

Solution

$$\tau = f(V, d, \rho, \mu, K)$$

ou

$$\tau = CV^a d^b \rho^c \mu^d K^e$$

La rugosité K s'exprime en général comme le rapport de la taille des aspérités superficielles au diamètre du tuyau, ε/d, un nombre sans dimension.

Alors
$$F^1L^{-2}T^0 = (L^aT^{-a})(L^b)(F^cT^{2c}L^{-4c})(F^dT^dL^{-2d})(L^e/L^e)$$

et $1 = c + d$, $-2 = a + b - 4c - 2d + e - e$, $0 = -a + 2c + d$. Résolvant en fonction de d, on trouve

$$c = 1 - d, \quad a = 2 - d, \quad b = -d$$

Reportant
$$\tau = CV^{2-d}d^{-d}\rho^{1-d}\mu^d K^e$$

Rassemblant les termes
$$\tau = C\left(\frac{Vd\rho}{\mu}\right)^{-d} K^e V^2 \rho$$

ou
$$\tau = (C' R_E^{-d}) V^2 \rho$$

6.11 Établir l'expression de la perte de charge pour l'écoulement turbulent isovolume dans une conduite horizontale.

Solution

Pour tout fluide, la perte de charge s'exprime par une chute du gradient des pressions et mesure la résistance du tuyau à l'écoulement. La résistance est fonction du diamètre du tuyau, de la viscosité et de la densité du fluide, de la longueur du tuyau, de la vitesse et la rugosité K du tuyau. Nous pouvons écrire

$$(p_1 - p_2) = f(d, \mu, \rho, L, V, K)$$

ou

$$(p_1 - p_2) = Cd^a \mu^b \rho^c L^d V^e (\varepsilon/d)^f$$

D'après l'expérience et l'observation, l'exposant de la longuer L vaut un. La valeur de K s'exprime en général comme rapport de la taille des aspérités superficielles ε au diamètre d du tuyau, un nombre sans dimension. Nous pouvons maintenant écrire

$$F^1L^{-2}T^0 = (L^a)(F^bT^bL^{-2b})(F^cT^{2c}L^{-4c})(L^1)(L^eT^{-e})(L^f/L^f)$$

et $1 = b + c$, $-2 = a - 2b - 4c + 1 + e + f - f$, $0 = b + 2c - e$, d'où on peut calculer les valeurs de a, b et c en fonction de e, soit

$$c = e - 1, \quad b = 2 - e, \quad a = e - 3$$

En reportant dans (*1*),

$$(p_1 - p_2) = Cd^{e-3}\mu^{2-e}\rho^{e-1}L^1V^e(e/d)^f$$

En divisant le membre de gauche de l'équation par w et le membre de droite par son équivalent ρg, on a :

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{perte de charge} = \frac{C(\varepsilon/d)^f L(d^{e-3}V^e\rho^{e-1}\mu^{2-e})}{\rho g}$$

qui devient (en multipliant par 2 numérateur et dénominateur)

$$\text{Perte de charge} = 2C\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^f \frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}\left[\frac{d^{e-2}V^{e-2}\rho^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right]$$

$$= K'(R_E^{e-2})\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right) = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} \qquad \text{(Formule de Darcy)}$$

6.12 Établir l'expression de la puissance dépensée par une hélice, en admettant que la puissance peut s'exprimer en fonction de la masse volumique de l'air, du diamètre, de la vitesse du courant d'air, de la vitesse de rotation, du coefficient de viscosité et de la vitesse du son.

Solution

$$\text{Puissance} = K\rho^a d^b V^c \omega^d \mu^e c^f$$

et, en utilisant la masse, la longueur et le temps comme grandeurs fondamentales,

$$ML^2T^{-3} = (M^a L^{-3a})(L^b)(L^cT^{-c})(T^{-d})(M^eL^{-e}T^{-e})(L^fT^{-f})$$

Alors,
$$\begin{aligned} 1 &= a+e \\ 2 &= -3a+b+c-e+f \\ -3 &= -c-d-e-f \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} a &= 1-e \\ b &= 5-2e-c-f \\ d &= 3-c-e-f \end{aligned}$$

En reportant,
$$\text{Puissance} = K\rho^{1-e}d^{5-2e-c-f}V^c\omega^{3-c-e-f}\mu^e c^f$$

En réordonnant et en rassemblant les termes d'exposants égaux, nous obtenons :

$$\text{puissance} = K\left[\left(\frac{\rho d^2\omega}{\mu}\right)^{-e}\left(\frac{d\omega}{V}\right)^{-c}\left(\frac{d\omega}{c}\right)^{-f}\right]\omega^3 d^5\rho$$

L'examen des termes entre parenthèses indique qu'ils sont tous sans dimension. Le premier terme peut être considéré comme le nombre de Reynolds puisque la vitesse linéaire = rayon × vitesse angulaire. Le deuxième terme est le pas de l'hélice et le troisième terme, rapport de la vitesse du courant d'air à la vitesse du son, est le nombre de Mach. Rassemblant tous les termes, l'équation se ramène à :

$$\text{puissance} = C'\rho\omega^3 d^5$$

6.13 Donner les grandes lignes de la méthode à suivre quand on emploie le théorème en pi de Buckingham.

Introduction

À partir de quatre grandeurs ou variables physiques, le théorème en pi de Buckingham fournit un excellent outil pour rassembler ces grandeurs en groupements significatifs sans dimension, dont le nombre est minimal, à partir desquels on peut établir une équation. On appelle les groupements sans dimension des termes en pi. S'il y a n quantités physiques q (telle que la vitesse, la masse volumique, la viscosité, la pression d'air) et k grandeurs fondamentales (telles que la force, la longueur, et le temps, ou la masse, la longueur et le temps), on écrit sous forme mathématique :

$$f_1(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = 0$$

Cette expression peut être remplacée par l'équation

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-k}) = 0$$

où n'importe quel terme en π ne dépend pas de plus de $(k+1)$ quantités physiques q et où tous les termes en π sont des monômes des quantités q indépendants et sans dimension.

Méthode

1. Faire la liste des n grandeurs q entrant dans un problème particulier, en notant leurs dimensions et le nombre k des grandeurs fondamentales. Il y aura donc $(n-k)$ termes en π.
2. Choisir k de ces quantités, aucune n'étant sans dimensions, et deux d'entre elles n'ayant pas les mêmes dimensions. Toutes les grandeurs fondamentales doivent être comprises dans les grandeurs choisies.
3. Le premier terme en π peut s'exprimer comme produit des grandeurs choisies chacune élevée à un exposant inconnu, par une autre quantité élevée à une puissance connue (généralement prise comme égale à un).

4. Retenir les grandeurs choisies en (2) comme variables de référence et choisir l'une des variables restantes pour établir le prochain terme en π. Répéter ce procédé pour les termes en π successifs.
5. Pour chaque terme en π, trouver les exposants inconnus par l'analyse dimensionnelle.

Relations utiles

(*a*) Si une grandeur est sans dimension, c'est un terme en π et il est inutile d'employer le procédé ci-dessus.
(*b*) Si deux quantités physiques ont les mêmes dimensions, le rapport va être l'un des termes en π. Par exemple L/L est sans dimension, donc un terme en π.
(*c*) On peut remplacer n'importe quel terme en π par une de ses puissances, π^{-1} inclus. Par exemple, on peut remplacer π_3 par π_3^2 et π_2 par $1/\pi_2$.
(*d*) On peut multiplier tout terme en π par une constante numérique. Par exemple, on peut remplacer π_1, par $3\pi_1$.
(*e*) On peut exprimer tout terme en π comme fonction des autres termes en π. Par exemple, s'il y a deux termes en π, $\pi_1 = \Phi(\pi_2)$.

6.14 Résoudre le problème 6.2, en utilisant le théorème en pi de Buckingham.

Solution

On peut exprimer le problème en disant qu'une certaine fonction de la distance s, du poids W, de l'accélération de la pesanteur g, et du temps T est nulle ou, en écriture mathématique :

$$f_1(s, W, g, T) = 0$$

Étape 1

Faire la liste des quantités et des unités,

$$s = \text{longueur } L, \quad W = \text{force } F, \quad g = \text{accélération } L/T^2, \quad T = \text{temps } T$$

Il y a 4 grandeurs physiques et 3 unités fondamentales, d'où $(4 - 3)$ soit un terme en π.

Étape 2

En choisissant, s, W et T comme grandeurs physiques de référence, on a les trois grandeurs fondamentales, F, L et T.

Étape 3

Puisque des quantités physiques de dimensions différentes ne peuvent être ajoutées, ou retranchées, le terme en π s'exprime comme produit, comme suit :

$$\pi_1 = (s^{x_1})(W^{y_1})(T^{z_1})(g) \qquad (1)$$

En utilisant l'homogénéité dimensionnelle, on obtient :

$$F^0 L^0 T^0 = (L^{x_1})(F^{y_1})(T^{z_1})(LT^{-2})$$

En égalant les exposants de F, L et T respectivement, on obtient : $0 = y_1$, $0 = x_1 + 1$, $0 = z_1 - 2$, d'où $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 2$. Reportant dans (*1*),

$$\pi_1 = s^{-1} W^0 T^2 g = \frac{W^0 T^2 g}{s}$$

En résolvant en s et en notant que $1/\pi_1 = K$ nous obtenons $s = KgT^2$.

6.15 Résoudre le problème 6.6, en utilisant le théorème en π de Buckingham.

Solution

Le problème peut s'écrire sous forme mathématique :

$$f(P, w, Q, H) = 0$$

Les grandeurs physiques avec leurs dimensions exprimées par F, L et T sont :

$$\text{puissance } P = FLT^{-1} \qquad \text{débit } Q = L^3T^{-1}$$
$$\text{poids spécifique } w = FL^{-3} \qquad \text{hauteur de charge } H = L.$$

Il y a 4 grandeurs physiques et 3 unités fondamentales, donc (4 − 3) soit 1 terme en π. En choisissant Q, w et H comme grandeurs d'exposants inconnues, nous établissons le terme en π comme suit :

$$\pi_1 = (Q^{x_1})(w^{y_1})(H^{z_1})P$$

ou

$$\pi_1 = (L^{3x_1}T^{-x_1})(F^{y_1}L^{-3y_1})(L^{z_1})(FLT^{-1}) \qquad (1)$$

En égalant les exposants de F, L et T respectivement, nous obtenons

$$0 = y_1 + 1, \quad 0 = 3x_1 - 3y_1 + z_1 + 1, \quad 0 = -x_1 - 1,$$

d'où $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -1$. En reportant dans (*1*),

$$\pi_1 = Q^{-1}w^{-1}H^{-1}P = \frac{P}{wQH} \quad \text{ou} \quad P = KwQH.$$

6.16 Résoudre le problème 6.9, en utilisant le théorème en π de Buckingham.

Solution

On peut exprimer le problème par :

$$\Phi(F, \rho, \mu, L, V) = 0$$

Les quantités physiques exprimées en fonction des grandeurs fondamentales F, L et T sont :

$$\text{force } F = F \qquad \text{longueur } L = L$$
$$\text{densité } \rho = FT^2L^{-4} \qquad \text{vitesse } V = LT^{-1}$$
$$\text{viscosité absolue } \mu = FTL^{-2}$$

Il y a 5 grandeurs physiques et 3 unités fondamentales, d'où (5 − 3) soit deux termes en π.

Choisissant la longueur L, la vitesse V, et la densité ρ comme les trois variables de référence qui se répètent avec exposants inconnus, nous établissons les termes en π comme suit :

$$\pi_1 = (L^{a_1}(L^{b_1}T^{-b_1})(F^{c_1}T^{2c_1}L^{-4c_1})(F) \qquad (1)$$

En égalant les exposants de F, L et T respectivement, nous obtenons

$$0 = c_1 + 1, \quad 0 = a_1 + b_1 - 4c_1, \quad 0 = -b_1 + 2c_1$$

d'où $c_1 = -1$, $b_1 = -2$, $a_1 = -2$. En reportant dans (*1*) $\pi_1 = \dfrac{F}{L^2V^2\rho}$.

Pour calculer le deuxième terme en π, reprendre les trois premières grandeurs physiques et ajouter une autre grandeur, dans le cas présent, la viscosité absolue μ (voir le problème 6.13, méthode 4).

$$\pi_2 = (L^{a_2})(L^{b_2}T^{-b_2})(F^{c_2}T^{2c_2}L^{-4c_2})(FTL^{-2}) \tag{2}$$

En égalant les exposants en F, L et T respectivement, nous obtenons

$$0 = c_2 + 1, \quad 0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2, \quad 0 = -b_2 + 2c_2 + 1$$

d'où $c_2 = -1$, $b_2 = -1$, $a_2 = -1$. Ainsi $\pi_2 = \dfrac{\mu}{LV\rho}$. Cette expression s'écrit $\pi_2 = \dfrac{LV\rho}{\mu}$ qu'on reconnaît être le nombre de Reynolds.

La nouvelle relation écrite en fonction de π_1 et π_2 est

$$f_1\left(\frac{F}{L^2V^2\rho}, \frac{LV\rho}{\mu}\right) = 0$$

où
$$\text{la force } F = (L^2V^2\rho) f_2\left(\frac{LV\rho}{\mu}\right)$$

qui peut s'écrire
$$F = (2KR_E)\rho L^2 \frac{V^2}{2}$$

Reconnaissant que L^2 est une aire, l'équation finale peut s'écrire $F = C_D \rho A \dfrac{V^2}{2}$. (Voir le chapitre 13).

6.17 Résoudre le problème 6.11, en se servant du théorème en π de Buckingham.

Solution

Ce problème peut s'écrire mathématiquement :

$$f(\Delta p, d, \mu, \rho, L, V, K) = 0$$

où K est la rugosité relative ou le rapport de la taille des aspérités de la surface ε au diamètre d du tuyau (Voir le chapitre 8).

Les grandeurs physiques exprimées en fonction des grandeurs fondamentales F, L et T sont :

perte de charge Δp	=	FL^{-2}	longueur L	=	L
diamètre d	=	L	vitesse V	=	LT^{-1}
viscosité absolue μ	=	FTL^{-2}	rugosité relative K	=	L_1/L_2
masse volumique ρ	=	FT^2L^{-4}			

Il y a 7 grandeurs physiques et 3 fondamentales, d'où $(7-3)$ soit 4 termes en π. Choisissant le diamètre, la vitesse et la masse volumique comme variables qui se répètent avec les exposants inconnus, les termes en π sont

$$\pi_1 = (L^{x_1})(L^{y_1}T^{-y_1})(F^{z_1}T^{2z_1}L^{-4x_1})(FL^{-2})$$
$$\pi_2 = (L^{x_2})(L^{y_2}T^{-y_2})(F^{z_2}T^{2z_2}L^{-4z_2})(FTL^{-2})$$
$$\pi_3 = (L^{x_3})(L^{y_3}T^{-y_3})(F^{z_3}T^{2z_3}L^{-4z_3})(L)$$
$$\pi_4 = K = L_1/L_2$$

En calculant les exposants, terme par terme, on obtient

$$\pi_1: \quad 0 = z_1 + 1, \quad 0 = x_1 + y_1 - 4z_1 - 2, \quad 0 = -y_1 + 2z_1$$

Alors, $x_1 = 0$, $y_1 = -2$, $z_1 = -1$.

$$\pi_2: \quad 0 = z_2 + 1, \quad 0 = x_2 + y_2 - 4z_2 - 2, \quad 0 = -y_2 + 2z_2 + 1$$

Alors, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $z_2 = -1$.

$$\pi_3 : \quad 0 = z_3, \quad 0 = x_3 + y_3 - 4z_3 + 1, \quad 0 = -y_3 + 2z_3$$

Alors, $x_3 = -1$, $y_3 = 0$, $z_3 = 0$.
Ainsi les termes en π sont :

$$\pi_1 = d^0 V^{-2} \rho^{-1} \Delta p = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \text{(nombre d'Euler)}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{dV\rho} \quad \text{et} \quad \frac{dV\rho}{\mu} \quad \text{(nombre de Reynolds)}$$

$$\pi_3 = d^{-1} V^0 \rho^0 L = \frac{L}{d} \quad \text{(comme on aurait pu s'y attendre : voir l'article } b\text{, problème 6.13)}$$

$$\pi_4 = L_1/L_2 = \frac{\varepsilon}{d} \quad \text{(voir le chapitre 8)}$$

La nouvelle relation peut à présent s'écrire

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{dV\rho}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right) = 0$$

En résolvant en Δ, on obtient :

$$\Delta p = \frac{w}{g} V^2 f_2\left(R_E, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

où $\rho = w/g$.
Ainsi la chute de la hauteur de pression serait :

$$\frac{\Delta p}{w} = \frac{V^2}{2g}(2) f_2\left(R_E, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

S'il fallait obtenir une expression du type Darcy, l'expérience indiquerait que la chute de pression est fonction de L/d au premier degré. Ainsi

$$\frac{\Delta p}{w} = \left(\frac{V^2}{2g}\right)\left(\frac{L}{d}\right)(2) f_3\left(R_E, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

qui peut s'exprimer :

$$\frac{\Delta p}{w} = (\text{facteur } f)\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

Note 1

Si le fluide était compressible, une autre grandeur physique, le module cubique d'élasticité E devrait être pris en considération et le cinquième terme en π serait le rapport sans dimension $\frac{E}{\rho V^2}$. On l'écrit généralement sous la forme $\frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, qu'on appelle le nombre de Mach.

Note 2

Si la pesanteur devait entrer dans le problème d'écoulement général, l'intensité de la pesanteur serait une autre grandeur physique et un sixième terme en π donnerait le rapport sans dimension $\frac{V^2}{gL}$. On reconnaît dans ce terme le nombre de Froude.

Note 3

Si la tension superficielle σ avait un rôle dans le problème d'écoulement général, il faudrait faire intervenir une nouvelle grandeur physique, ce qui introduirait un septième terme en π. Ce terme en π prendrait la forme $\dfrac{V^2 L\rho}{\sigma}$ qui est le nombre de Weber.

6.18 Pour le modèle et le prototype, montrer que, quand l'inertie et l'accélération de la pesanteur sont les seuls facteurs entrant en jeu, le rapport des débits Q est égal au rapport des longueurs à la puissance 5/2.

Solution

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_r^3}{T_r}$$

On doit établir le rapport des temps pour les conditions influençant l'écoulement. On écrit d'abord les expressions correspondantes pour les poids et les forces d'inertie comme suit :

$$\text{Poids : } \frac{F_m}{F_p} = \frac{W_m}{W_p} = \frac{w_m}{w_p}\,\frac{L_m^3}{L_p^3} = w_r L_r^3$$

$$\text{Inertie : } \frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p}\,\frac{L_m^3}{L_p^3}\,\frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r L_r^3 \frac{L_r}{T_r^2}$$

En égalant les rapports pour les forces, on a :

$$w_r L_r^3 = \rho_r L_r^3 \frac{L_r}{T_r^2}$$

équation qui, résolue par rapport au rapport des temps, donne

$$T_r^2 = L_r \frac{\rho_r}{w_r} = \frac{L_r}{g_r} \qquad (1)$$

Nous souvenant que la valeur de g_r est 1, et reportant dans le rapport des débits, nous obtenons

$$Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_r^3}{L_r^{1/2}} = L_r^{5/2} \qquad (2)$$

6.19 Les conditions étant celles qui ont été fixées dans le problème précédent, établir (*a*) le rapport des vitesses et (*b*) le rapport des pressions et des forces.

Solution

(*a*) En divisant les deux membres de l'équation (*1*) du problème précédent par L_r^2 on obtient :

$$\frac{T_r^2}{L_r^2} = \frac{L_r}{L_r^2 g_r} \quad \text{soit, puisque} \quad V = \frac{L}{T}, \qquad V_r^2 = L_r g_r$$

Mais la valeur g_r peut être considérée comme égale à 1. Ce qui signifie que, pour le modèle et le prototype, $V_r^2 = L_r$, loi qu'on appelle la *loi de Froude* pour le rapport des vitesses dans un modèle.

(*b*) Le rapport des forces, pour les forces de pression $= \dfrac{p_m L_m^2}{p_p L_p^2} = p_r L_r^2$.

Le rapport des forces, pour les forces d'inertie $= \dfrac{\rho_r L_r^4}{T_r^2} = w_r L_r^3$.

En égalant ceux-ci, nous obtenons

$$p_r L_r^2 = w_r L_r^3$$
$$p_r = w_r L_r. \qquad (1)$$

Dans les études de modèles avec surface libre, les nombres de Froude relatifs au modèle et au prototype sont les mêmes. Les nombres d'Euler du modèle et du prototype sont aussi les mêmes.
En utilisant $V_r^2 = L_r$, nous pouvons écrire l'équation (*1*) :

$$p_r = w_r V_r^2$$

et, puisque la force $F = pA$, $$F_r = p_r L_r^2 = w_r L_r^3. \qquad (2)$$

6.20 Établir la loi de Reynolds relative au modèle pour les rapports des temps et des vitesses de liquides incompressibles.

Solution

Pour les configurations d'écoulement soumises à des forces d'inertie et à des forces visqueuses seules (les autres effets étant négligeables), on peut calculer ces forces pour le modèle et pour le prototype.

Pour l'inertie : $\dfrac{F_m}{F_p} = \rho_r L_r^3 \dfrac{L^r}{T_r^2}$ (d'après le problème précédent)

Pour la viscosité : $$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\tau_m A_m}{\tau_p A_p} = \frac{\mu_m (dV/dy)_m A_m}{\mu_p (dV/dy)_p A_p} = \frac{\mu_m \left(\dfrac{L_m}{T_m}\dfrac{1}{L_m}\right) L_m^2}{\mu_p \left(\dfrac{L_p}{T_p}\dfrac{1}{L_p}\right) L_p^2}$$

$$= \frac{\mu_m \dfrac{L_m^2}{T_m}}{\mu_p \dfrac{L_p^2}{T_p}} = \frac{\mu_r L_r^2}{T_r}$$

En égalant les deux rapports, nous obtenons $\rho_r \dfrac{L_r^4}{T_r^2} = \dfrac{\mu_r L_r^2}{T_r}$ d'où $T_r = \dfrac{\rho_r L_r^2}{\mu_r}$

Puisque $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, on peut écrire $$T_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \qquad (1)$$

Le rapport des vitesses $$V_r = \frac{L_r}{T_r} = \frac{L_r}{L_r^2}\nu_r = \frac{\nu_r}{L_r} \qquad (2)$$

En écrivant ces rapports en fonction de leur valeur développée pour le modèle et le prototype, nous obtenons d'après (*2*)

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{L_p}{L_m}$$

En rassemblant les termes relatifs au modèle et au prototype, nous obtenons $V_m L_m/\nu_m = V_p L_p/\nu_p$, dont le lecteur reconnaîtra sans peine la signification : le nombre de Reynolds du modèle = le nombre de Reynolds du prototype.

6.21 De l'huile de viscosité cinématique égale à 4,65 × 10^{-5} m^2/s doit être utilisée dans un prototype où dominent à la fois le poids et les forces de frottement visqueux. On désire aussi en faire un modèle dont l'échelle est de 1/5. Quelle est la viscosité du liquide du modèle nécessaire pour que les nombres de Froude et de Reynolds soient les mêmes dans le modèle et dans le prototype ?

Solution

En se servant des rapports d'échelle pour la vitesse dans les lois de Froude et de Reynolds (voir les problèmes 6.19 et 6.20), nous écrivons

$$(L_r g_r)^{1/2} = \frac{\nu_r}{L_r}$$

Puisque $g_r = 1$, $L_r^{3/2} = \nu_r$ et $\nu_r = (1/5)^{3/2} = 0{,}089\,4$.
Cela signifie que $\dfrac{\nu_m}{\nu_p} = 0{,}089\,4 = \dfrac{\nu_m}{4{,}65 \times 10^{-5}}$ et ainsi $\nu_m = 4{,}16 \times 10^{-6}$ m^2/s.

Si on avait utilisé les rapports des temps, des accélérations ou des débits, on aurait trouvé le même résultat. Par exemple, en égalant les rapports des temps (problèmes 6.18 et 6.20) on obtient :

$$\frac{L_r^{1/2}}{g_r^{1/2}} = \frac{\rho_r L_r^2}{\mu_r} \text{ soit, puisque } g_r = 1,\ \frac{\mu_r}{\rho_r} = \nu_r = L_r^{3/2}, \text{ comme précédemment.}$$

6.22 De l'eau à 15,6 °C s'écoule à 3,66 m/s dans une conduite de 152,4 mm de diamètre. À quelle vitesse doit s'écouler un fuel moyen à 32 °C dans une conduite de 76,2 mm de diamètre pour que les deux écoulements soient dynamiquement semblables ?

Solution

Puisque la configuration de l'écoulement dans les tuyaux n'est soumise qu'aux forces d'inertie et de frottement visqueux, c'est le nombre de Reynolds qui est le critère de similitude. D'autres propriétés de l'écoulement du fluide, comme l'élasticité et la tension superficielle, aussi bien que le poids, n'affectent pas la configuration de l'écoulement. Ainsi, pour qu'il y ait similitude dynamique,

$$\text{nombre de Reynolds de l'eau} = \text{nombre de Reynolds du fuel}$$

$$\frac{Vd}{\nu} = \frac{V'd'}{\nu'}$$

En cherchant les valeurs de la viscosité dynamique dans la table 2 de l'annexe, et en reportant les valeurs ainsi trouvées,

$$\frac{3{,}66 \times 152{,}4}{1{,}13 \times 10^{-6}} = \frac{V' \times 76{,}2}{2{,}96 \times 10^{-6}}$$

et $V' = 19{,}2$ m/s pour l'huile de pétrole.

6.23 De l'air à 20 °C doit s'écouler le long d'une conduite de 61 cm de diamètre à une vitesse moyenne de 1,83 m/s. Pour assurer la similitude dynamique, quelle doit être la taille d'une conduite transportant de l'eau à 15,6 °C à une vitesse de 1,11 m/s ?

Solution

Égalons les deux nombres de Reynolds

$$\frac{1{,}83 \times 0{,}61}{14{,}86 \times 10^{-6}} = \frac{1{,}11 \times d}{1{,}13 \times 10^{-6}}$$

d'où $d = 0{,}076$ m $= 76$ mm.

6.24 Un modèle réduit de 1/15 d'un sous-marin doit être essayé dans un bassin de halage contenant de l'eau salée. Si le sous-marin se déplace à la vitesse de 20 km/h, à quelle vitesse faut-il haler le modèle pour assurer la similitude dynamique ?

Solution

En se servant des rapports d'échelle pour la vitesse dans les lois de Froude et de Reynolds (voir les problèmes 6.19 et 6.20), nous écrivons

$$(L_r g_r)^{1/2} = \frac{\nu_r}{L_r}$$

Puisque $g_r = 1$, $L_r^{3/2} = \nu_r$ et $\nu_r = (1/5)^{3/2} = 0{,}089\,4$.
Cela signifie que $\dfrac{\nu_m}{\nu_p} = 0{,}089\,4 = \dfrac{\nu_m}{4{,}65 \times 10^{-5}}$ et ainsi $\nu_m = 4{,}16 \times 10^{-6}$ m²/s.

Si on avait utilisé les rapports des temps, des accélérations ou des débits, on aurait trouvé le même résultat. Par exemple, en égalant les rapports des temps (problèmes 6.18 et 6.20) on obtient :

$$\frac{L_r^{1/2}}{g_r^{1/2}} = \frac{\rho_r L_r^2}{\mu_r} \text{ soit, puisque } g_r = 1,\ \frac{\mu_r}{\rho_r} = \nu_r = L_r^{3/2}\text{, comme précédemment.}$$

6.22 De l'eau à 15,6 °C s'écoule à 3,66 m/s dans une conduite de 152,4 mm de diamètre. À quelle vitesse doit s'écouler un fuel moyen à 32 °C dans une conduite de 76,2 mm de diamètre pour que les deux écoulements soient dynamiquement semblables ?

Solution

Puisque la configuration de l'écoulement dans les tuyaux n'est soumise qu'aux forces d'inertie et de frottement visqueux, c'est le nombre de Reynolds qui est le critère de similitude. D'autres propriétés de l'écoulement du fluide, comme l'élasticité et la tension superficielle, aussi bien que le poids, n'affectent pas la configuration de l'écoulement. Ainsi, pour qu'il y ait similitude dynamique,

$$\text{nombre de Reynolds de l'eau} = \text{nombre de Reynolds du fuel}$$

$$\frac{Vd}{\nu} = \frac{V'd'}{\nu'}$$

En cherchant les valeurs de la viscosité dynamique dans la table 2 de l'annexe, et en reportant les valeurs ainsi trouvées,

$$\frac{3{,}66 \times 152{,}4}{1{,}13 \times 10^{-6}} = \frac{V' \times 76{,}2}{2{,}96 \times 10^{-6}}$$

et $V' = 19{,}2$ m/s pour l'huile de pétrole.

6.23 De l'air à 20 °C doit s'écouler le long d'une conduite de 61 cm de diamètre à une vitesse moyenne de 1,83 m/s. Pour assurer la similitude dynamique, quelle doit être la taille d'une conduite transportant de l'eau à 15,6 °C à une vitesse de 1,11 m/s ?

Solution

Égalons les deux nombres de Reynolds

$$\frac{1{,}83 \times 0{,}61}{14{,}86 \times 10^{-6}} = \frac{1{,}11 \times d}{1{,}13 \times 10^{-6}}$$

d'où $d = 0{,}076$ m $= 76$ mm.

6.24 Un modèle réduit de 1/15 d'un sous-marin doit être essayé dans un bassin de halage contenant de l'eau salée. Si le sous-marin se déplace à la vitesse de 20 km/h, à quelle vitesse faut-il haler le modèle pour assurer la similitude dynamique ?

Solution

Égalons les nombres de Reynolds pour le prototype et le modèle :

$$\frac{20 \times L}{\nu} = \frac{V \times L/15}{\nu}$$

d'où $V = 300$ km/h.

6.25 On essaye un modèle réduit de 1/80 d'un avion se déplaçant dans l'air à 20 °C à la vitesse de 46 m/s. (*a*) À quelle vitesse doit-on tirer le modèle totalement immergé dans l'eau à 27 °C ? (*b*) Quelle traînée dans le prototype représente une résistance dans le modèle de 5,56 N dans l'eau ?

Solution

(*a*) Égalons les nombres de Reynolds :

$$\frac{46 \times L}{1{,}49 \times 10^{-5}} = \frac{V \times L}{0{,}864 \times 10^{-6}}$$

d'où $V = 2{,}65$ m/s dans l'eau.

(*b*) Comme p varie avec ρV^2, en égalant les nombres d'Euler, on obtient

$$\frac{\rho_m V_m^2}{p_m} = \frac{\rho_p V_p^2}{p_p} \quad \text{ou} \quad \frac{p_m}{p_p} = \frac{\rho_m V_m^2}{\rho_p V_p^2}$$

Mais les forces agissantes sont «la pression × la surface», ou pL^2, d'où

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{p_m L_m^2}{p_p L_p^2} = \frac{\rho_m V_m^2 L_m^2}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

ou $$F_r = \rho_r V_r^2 L_r^2 \qquad \text{[équation (6) du cours].}$$

Pour obtenir la vitesse du prototype dans l'air, égalons les nombres de Reynolds. Nous obtenons

$$\frac{V_m L_m}{\nu_{air}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{air}} \quad \text{ou} \quad \frac{46 \times L_p/80}{\nu_{air}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{air}} \quad \text{et} \quad V_p = 0{,}572 \text{ m/s}$$

Alors, $$\frac{5{,}56}{F_p} = \left(\frac{1\,000}{1{,}202}\right)\left(\frac{2{,}60}{0{,}572}\right)^2\left(\frac{1}{80}\right)^2 \quad \text{et} \quad F_p = 2{,}0 \text{ N}$$

6.26 On essaye un modèle de torpille dans un bassin de halage à une vitesse de 24,4 m/s. Ce prototype a été conçu pour atteindre la vitesse de 6,1 m/s dans l'eau à 16 °C. (*a*) Quel rapport de réduction a-t-on utilisé ? (*b*) Quelle doit être la vitesse du modèle lorsqu'on l'essaye dans une soufflerie à une pression de 20 bar et à une température constante de 27 °C ?

Solution

(*a*) En égalant les nombres de Reynolds pour le protoype et pour le modèle, $\frac{6{,}0 \times L}{\nu} = \frac{24{,}0 \times L/x}{\nu}$ soit $x = 4$. L'échelle du modèle est de 1/4.

(*b*) Pour l'air, d'après la table 1 (*B*), la viscosité absolue est de $1{,}845 \times 10^{-5}$ N · s/m² et la masse volumique $\rho = \frac{w}{g} = \frac{p}{rT} = \frac{20 \times 10^5}{(287)(273+27)} = 23{,}2$ kg/m³ (soit $\rho = 20$ fois la valeur de la table 1(*B*) pour 27 °C $= 20 \times 1{,}17 = 23{,}4$). Alors

$$\frac{6{,}1 \times L}{1{,}13 \times 10^{-6}} = \frac{V \times L/4}{18{,}4 \times 10^{-6}/23{,}2} \quad \text{et} \quad V = 17{,}1 \text{ m/s}$$

6.27 Une pompe centrifuge fait circuler de l'huile de lubrification moyenne à 1 200 tours par minute et à 15,6 °C. On doit essayer un modèle de cette pompe, qui utilise de l'air à 20 °C. Si le diamètre du modèle est trois fois le diamètre du prototype, à quelle vitesse doit-on faire tourner le modèle ?

Solution

En utilisant les vitesses périphériques (égales au produit du rayon par la vitesse angulaire en radians/s) comme vitesses entrant dans l'expression du nombre de Reynolds, nous obtenons

$$\frac{(d/2)\omega_p(d)}{17{,}5 \times 10^{-5}} = \frac{(3d/2)\omega_m(3d)}{1{,}49 \times 10^{-5}}$$

Ainsi $\omega_p = 106\,\omega_m$ et la vitesse du modèle $= 1\,200/106 = 11{,}3$ tours par minute $= 0{,}188$ Hz.

6.28 Une aile d'avion de 1 m de corde doit se mouvoir à 40,2 m/s dans l'air. Un modèle de 83 mm de corde est essayé dans une soufflerie avec une vitesse de 48,3 m/s. Pour une température de l'air de 20 °C dans les deux cas, quelle devrait être la pression dans la soufflerie ?

Solution

En égalant les nombres de Reynolds du modèle et du prototype, et en utilisant les vitesses comme grandeurs de référence,

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}, \quad \frac{48{,}3 \times 0{,}083}{\nu_{\text{soufflerie}}} = \frac{40{,}2 \times 1}{14{,}86 \times 10^{-6}}$$

d'où $\nu_{\text{soufflerie}} = 1{,}48 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$.

On peut calculer la pression produisant cette viscosité cinématique à 20 °C en se rappelant que la viscosité absolue n'est pas influencée par les variations de pression. La viscosité cinématique est égale au quotient de la viscosité absolue par la masse volumique. Mais la masse volumique augmente avec la pression (la température étant constante) ; alors

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{14{,}86 \times 10^{-6}}{1{,}48 \times 10^{-6}} = 10{,}0$$

Ainsi la masse volumique de l'air dans la soufflerie doit être 10 fois ce qu'elle est normalement à 20 °C et la pression qui en résulte dans la soufflerie est donc de dix atmosphères.

6.29 Un navire dont la longueur de la quille est de 140 m doit se déplacer à 7, 60 m/s. (*a*) Calculer le nombre de Froude N_F. (*b*) Pour assurer la similitude dynamique, à quelle vitesse doit-on haler dans l'eau un modèle au 1/30ᵉ ?

Solution

(*a*)

$$N_F = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{7{,}60}{\sqrt{9{,}81 \times 140}} = 0{,}205$$

(*b*) Quand les deux configurations d'écoulement de frontières géométriquement semblables sont soumises à l'influence des forces d'inertie et du poids, c'est le nombre de Froude qui est la grandeur importante dans les études de modèle.

Alors le nombre de Froude du prototype = le nombre de Froude du modèle, soit :

$$\frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{V'}{\sqrt{g'L'}}$$

Puisque $g = g'$ dans pratiquement tous les cas, nous pouvons écrire

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{V'}{\sqrt{L'}}, \quad \frac{7{,}60}{\sqrt{140}} = \frac{V'}{\sqrt{140/30}}, \quad V' = 1{,}39 \text{ m/s pour le modèle.}$$

6.30 On construit un modèle de déversoir à une échelle de 1/25e sur une rigole de 61 cm de large. Le prototype a 11,4 m de haut et on prévoit une hauteur de charge maximale de 1,52 m. (*a*) Quelle doit être la hauteur du modèle et la hauteur de charge à utiliser? (*b*) Si l'écoulement par dessus le modèle est de 0,020 m^3/s pour une hauteur de charge de 61 mm, à quel débit par mètre dans le prototype doit-on s'attendre? (*c*) Si un ressaut mesuré de 26 mm apparaît sur le modèle, quel est le ressaut sur le prototype? (*d*) Si l'énergie dissipée dans le modèle au ressaut est de 112 W, quelle est la dissipation d'énergie dans le prototype?

Solution

(*a*) Puisque $\dfrac{\text{longueur du modèle}}{\text{longueur du prototype}} = \dfrac{1}{25}$, hauteur du modèle $= \dfrac{1}{25} \times 11{,}4 \text{ m} = 0{,}456 \text{ m}$

et hauteur de charge exercée sur le modèle $= \dfrac{1}{25} \times 1{,}52 \text{ m}$

$= 0{,}061 = 6{,}1 \text{ cm}$

(*b*) D'après le problème 6.18, $Q_r = L_r^{5/2}$, puisque les forces gravitationnelles prédominent, alors

$$Q_p = \frac{Q_m}{L_r^{5/2}} = 20 \times 10^{-3}(25 \times 25 \times 5) = 62{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$

On doit s'attendre à cette quantité sur les $0{,}61 \times 25 = 15{,}25$ m de longueur du prototype. Ainsi le débit par mètre du prototype $= 62{,}5/15{,}25 = 4{,}1 \text{ m}^3/\text{s}$

(*c*)
$$\frac{h_m}{h_p} = L_r \quad \text{ou} \quad h_p = \frac{h_m}{L_r} = \frac{26}{1/25} = 650 \text{ mm (hauteur du ressaut)}$$

(*d*) Rapport des puissances

$$P_r = \frac{M_r L_r^2}{T_r^3} = \frac{\rho_r L_r^3 L_r^2}{(\sqrt{L_r/g_r})^3}.$$

Mais $g_r = 1$ et $\rho_r = 1$. Alors

$$\frac{P_m}{P_p} = L_r^{7/2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{7/2} \quad \text{et} \quad P_p = P_m(25)^{7/2} = 112(25)^{7/2} = 8{,}75 \times 10^6 \text{ W}$$

6.31 On vide le modèle d'un réservoir en 4 minutes en ouvrant l'écluse. L'échelle du modèle est de 1/225e. Combien faut-il de temps pour vider le prototype?

Solution

Puisque la pesanteur est la force dominante, le rapport pour Q, d'après le problème 6.18, vaut $L_r^{5/2}$. De plus, $Q_r = \dfrac{Q_m}{Q_p} = \dfrac{L_m^3}{L_p^3} : \dfrac{T_m}{T_p}$. Alors

$$L_r^{5/2} = L_r^3 \frac{T_p}{T_m} \quad \text{et} \quad T_p = \frac{T_m}{L_r^{1/2}} = 4(225)^{1/2} = 60 \text{ min.}$$

6.32 Une jetée rectangulaire aménagée sur une rivière a 1,20 m de large et 3,60 m de long et la profondeur moyenne de l'eau est de 2,70 m. On en construit un modèle à l'échelle de 1/16e. La vitesse du courant est de 0,75 m/s pour le modèle et la force qui s'exerce dessus est de 3,9 N. (*a*) Quelles sont les valeurs de la vitesse pour le prototype et de la force qui s'y exerce? (*b*) S'il se forme devant le modèle une vague stationnaire de 5 cm de haut, quelle sera la hauteur de celle-ci pour la jetée en vraie grandeur? (*c*) Quel est le coefficient de la résistance ou traînée?

Solution

(*a*) Puisque ce sont les forces de pesanteur qui dominent, d'après le problème 6.19 nous obtenons

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} \quad \text{et} \quad V_p = \frac{0,75}{(1/16)^{1/2}} = 3,0 \text{ m/s}$$

De plus,

$$\frac{F_m}{F_p} = w_r L_r^3 \quad \text{et} \quad F_p = \frac{3,9}{1,0(1/16)^3} = 16,0 \times 10^3 \text{ N}$$

(*b*) Puisque $\dfrac{V_m}{V_p} = \dfrac{\sqrt{L_m}}{\sqrt{L_p}}$, $\sqrt{h_p} = \sqrt{0,05} \times \dfrac{3,00}{0,75}$ et $h_p = 0,90$ m de hauteur pour la vague.

(*c*) Force de résistance $= C_D \rho A \dfrac{V^2}{2}$; $3,9 = C_D(1\,000)\left(\dfrac{1,2}{16} \times \dfrac{2,7}{16}\right)\dfrac{(0,75)^2}{2}$ et $C_D = 1,10$.
Si on avait calculé ces valeurs sur le prototype, on aurait obtenu l'équation suivante

$$16\,000 = C_D(1\,000)(1,2 \times 2,7)\frac{(3,0)^2}{2} \quad \text{et} \quad C_D = 1,10, \quad \text{comme prévu.}$$

6.33 La résistance mesurée dans l'eau douce d'un modèle de navire de 2,44 m se déplaçant à la vitesse de 1,98 m/s est de 43 N. (*a*) Quelle aurait été la vitesse d'un prototype de 39,0 m? (*b*) Quelle serait la force nécessaire pour faire marcher le prototype à cette vitesse-là dans l'eau de mer?

Solution

(*a*) Puisque ce sont les forces de pesanteur qui dominent, nous obtenons

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} = \sqrt{8/128} = 0,25 \quad \text{et} \quad V_p = \frac{1,98}{(1/16)^{1/2}} = 7,92 \text{ m/s}$$

(*b*)

$$\frac{F_m}{F_p} = \omega_r L_r^3 \quad \text{et} \quad F_p = \frac{43}{\left(\dfrac{1\,000}{1\,025}\right)\left(\dfrac{1}{16}\right)^3} = 179\,300 \text{ N}$$

On peut obtenir cette dernière valeur en utilisant la formule de la résistance :
Force de résistance $= C_f \rho \dfrac{A}{2} V^2$.

Pour le modèle, $43 = C_f \dfrac{1\,000}{2} \dfrac{A}{(16)^2}(1,98)^2$ et $\dfrac{C_f A}{2} = \dfrac{43(16)^2}{1\,000(1,98)^2}$ (*1*)

Pour le prototype, la force $= C_f \dfrac{1\,025}{2}(7,92)^2 A$ et $\dfrac{C_f A}{2} = \dfrac{\text{Force}}{1\,025(7,92)^2}$ (*2*)

En égalant (*1*) et (*2*) puisque la valeur de C_f est la même pour le modèle et pour le prototype, nous obtenons

$$\frac{(43)(16)^2}{1\,000(1,98)^2} = \frac{\text{force}}{1\,025(7,92)^2} \quad \text{d'où la force} = 179\,300 \text{ N comme précédemment.}$$

6.34 (*a*) Calculer l'échelle du modèle quand on doit assurer la similitude à la fois pour les forces de frottement visqueux et pour les forces de pesanteur. (*b*) Quelle doit être l'échelle du modèle si on utilise de l'huile de viscosité $92{,}9 \times 10^{-6}$ m²/s pour les essais du modèle, tandis que le liquide du prototype a pour viscosité 743×10^{-6} m²/s? (*c*) Quelles sont les valeurs des rapports des vitesses et des débits pour cette échelle de 1/4?

Solution

(*a*) Dans ce cas-là, on doit vérifier à la fois l'égalité du nombre de Reynolds et du nombre de Froude. Nous allons écrire l'égalité des rapports des vitesses pour chacune des lois relatives au modèle. En utilisant les renseignements obtenus dans les problèmes 6.19 et 6.20,

$$\text{nombre de Reynolds } V_r = \text{nombre de Froude } V_r$$
$$(\nu/L)_r = \sqrt{L_r g_r}$$

Puisque $g_r = 1$, nous obtenons $L_r = \nu_r^{2/3}$.

(*b*) En utilisant le rapport des longueurs ci-dessus,

$$L_r = \left(\frac{92{,}9 \times 10^{-6}}{743 \times 10^{-6}}\right)^{2/3} = \frac{1}{4}$$

L'échelle du modèle est de 1/4.

(*c*) En employant les lois de Froude relatives au modèle (voir les problèmes 6.18 et 6.19) :

$$V_r = \sqrt{L_r G_r} = \sqrt{L_r} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Q_r = L_r^{5/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{5/2} = \frac{1}{32}$$

Ou, en utilisant les lois de Reynolds relatives au modèle (voir le problème 6.20).

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r} = \frac{92{,}9/743}{1/4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Q_r = A_r V_r = L_r^2 \times \frac{\nu_r}{L_r} = L_r \nu_r = \frac{1}{4}\left(\frac{92{,}9}{743}\right) = \frac{1}{32}$$

Problèmes supplémentaires

6.35 Vérifier l'expression $\tau = \mu\left(\dfrac{dV}{dy}\right)$ en dimensions.

6.36 Montrer que l'énergie cinétique d'un corps vaut KMV^2 en utilisant les méthodes de l'analyse dimensionnelle.

6.37 En utilisant les méthodes de l'analyse dimensionnelle, démontrer que la force centrifuge vaut $\dfrac{KMV^2}{r}$.

6.38 Un corps tombe en chute libre en parcourant une distance s en partant d'une position de repos. Établir une équation donnant la vitesse. *Rép.* $V = K\sqrt{sg}$.

6.39 Un corps tombe en chute libre pendant un temps T en partant d'une position de repos. Établir une équation donnant la vitesse. *Rép.* $V = KgT$.

6.40 Établir une expression de la fréquence du pendule simple, en admettant qu'elle est fonction de la longueur et de la masse du pendule et de l'accélération de la pesanteur *Rép.* Fréquence $= K\sqrt{g/L}$.

6.41 En admettant que le débit par dessus un déversoir à bord mince rectangulaire varie directement avec la longueur L et est fonction de la charge H et de l'accélération de la pesanteur g, établir une formule du déversoir. *Rép.* $Q = KLH^{3/2}g^{1/2}$.

6.42 Établir une relation donnant la distance s parcourue par un corps en chute libre, en admettant que cette distance dépend de la vitesse initiale V, du temps T et de l'accélération de la pesanteur g. *Rép.* $s = KVT\left(\frac{gT}{V}\right)^b$.

6.43 Établir l'expression du nombre de Froude si on suppose qu'il est fonction de la vitesse V, de l'accélération g et de la longueur L. *Rép.* $N_F = K\left(\frac{V^2}{Lg}\right)^{-c}$.

6.44 Établir l'expression du nombre de Weber, si on suppose qu'il est fonction de la vitesse V, de la masse volumique ρ, de la longueur L et la tension superficielle σ. *Rép.* $N_w = K\left(\frac{\rho L V^2}{\sigma}\right)^{-d}$.

6.45 Établir l'expression d'un nombre sans dimension qui soit fonction de l'accélération de la pesanteur g, de la tension superficielle σ, de la viscosité absolue μ, et de la masse volumique ρ. *Rép.* Nombre $= K\left(\frac{\sigma^3\rho}{g\mu^4}\right)^d$.

6.46 En admettant que la force de résistance appliquée à un navire est fonction de la viscosité absolue μ et de la masse volumique ρ du fluide, de la vitesse V, de l'accélération de la pesanteur g et de la taille (facteur de longueur L) du navire, établir une formule pour cette résistance. *Rép.* Force $= K(R_E^{-a}N_F^{-d}\rho V^2L^2)$.

6.47 Résoudre le problème 6.9 en prenant en compte l'effet de compressibilité en ajoutant la variable c, vitesse du son. *Rép.* Force $= K'R_E^{-b}N_M^{-e}\rho AV^2/2$.

6.48 Montrer que, pour des orifices à bords minces, géométriquement semblables, le rapport des vitesses est essentiellement la racine carrée du rapport des charges.

6.49 Montrer que les rapports des temps et des vitesses, lorsque la tension superficielle est la force dominante sont respectivement :

$$T_r = \sqrt{L_r^3\frac{\rho_r}{\sigma_r}} \quad \text{et} \quad V_r = \sqrt{\frac{\sigma_r}{L_r\rho_r}}.$$

6.50 Montrer que les rapports des temps et des vitesses, quand l'élasticité est la force dominante, sont respectivement égaux à

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}}} \quad \text{et} \quad V_r = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}}.$$

6.51 On construit un modèle de déversoir à l'échelle 1/36e. Si la vitesse pour le modèle est de 0,381 m/s et le débit de 0,070 8/s, quelles sont les valeurs correspondantes pour le prototype? *Rép.* 2,3 m/s et 550 m^3/s.

6.52 À quelle vitesse doit-on faire les essais en soufflerie d'une aile d'avion de 15,2 cm de corde pour que le nombre de Reynolds soit le même que dans le prototype de 91,4 cm de corde se déplaçant à 145 km/h? L'air de la soufflerie est à la pression arithmétique. *Rép.* 241 m/s

6.53 De l'huile ($\nu = 5{,}65 \times 10^{-6}$ m^2/s) doit s'écouler à 3,66 m/s dans une conduite de 152 mm de diamètre. À quelle vitesse doit s'écouler de l'eau à 15 °C dans une conduite de 30,5 cm de diamètre pour que les nombres de Reynolds soient les mêmes? *Rép.* 0,366 m/s.

6.54 De l'essence à 16 °C s'écoule dans une conduite de 10 cm à 3,05 m/s. Quelle doit être la taille de la conduite employée pour transporter de l'eau à 16 °C à 1,52 m/s pour que les nombres de Reynolds soient les mêmes? *Rép.* 338 mm.

6.55 De l'eau à 15,6 °C s'écoule à 3,66 m/s dans une conduite de 15,24 cm. Pour assurer la similitude dynamique. (*a*) Quelle doit être la vitesse d'un fuel moyen à 32,2 °C dans une conduite de 30,5 cm? (*b*) Quelle doit être la taille de la conduite si le fuel a la vitesse de 19,2 m/s? *Rép.* 4,80 m/s, $d = 76$ mm.

6.56 On essaye un modèle dans l'air dans les conditions normales (20 °C) à une vitesse de 27,4 m/s. À quelle vitesse doit-on l'essayer quand on l'immerge complètement dans de l'eau à 15,6 °C dans un bassin de halage pour avoir les mêmes conditions dynamiques? *Rép.* 2,08 m/s.

6.57 Un navire de surface de 156 m de long doit se déplacer à 6,83 m/s. À quelle vitesse faut-il faire les essais sur un modèle géométriquement semblable de 2,44 m de long? *Rép.* 0,85 m/s.

6.58 Quelle est la force s'exerçant sur une digue de mer, si un modèle au 1/36e de 0,914 m de long est soumis à une force due aux vagues de 120 N? *Rép.* 171 kN/m.

6.59 Un objet immergé est amarré dans de l'eau douce à 15,6 °C coulant à la vitesse de 2,44 m/s. La résistance d'un modèle au 1/5e dans une soufflerie dans les conditions normales est de 20 N. Quelle est la force agissant sur le prototype dans des conditions dynamiquement semblables? *Rép.* 96,5 N.

6.60 Pour un écoulement avec forces de frottement visqueux et forces de pression dominantes, établir une expression du rapport des vitesses et du rapport de la perte de charge pour le modèle et le prototype. *Rép.* $V_r = \dfrac{p_r L_r}{\mu_r}$ et $H_r = \dfrac{V_r \mu_r}{w_r L_r}$.

6.61 Établir une relation donnant le coefficient de frottement f si ce coefficient dépend du diamètre du tuyau d, de la vitesse moyenne V, de la masse volumique du fluide ρ, de la viscosité μ et de la rugosité absolue du tuyau ε. Utiliser le théorème en π de Buckingham. *Rép.* $f = \Phi(R_E, \varepsilon/d)$.

Chapitre 7

Notions fondamentales sur l'écoulement des fluides

INTRODUCTION

Dans les chapitres 1 à 5, on a considéré des fluides au repos dans lesquels le poids du fluide était la seule propriété importante. Dans ce chapitre-ci, nous allons tracer les grandes lignes des concepts supplémentaires nécessaires à l'étude des fluides en mouvement. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe et ne se prête pas toujours à une analyse mathématique rigoureuse. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes et être soumis à des accélérations différentes. Les trois notions importantes en ce qui concerne l'écoulement des fluides sont :

(*a*) le principe de la conservation de la masse, à partir duquel on établit l'équation de continuité,

(*b*) le théorème de l'énergie cinétique, à partir duquel on établit certaines équations relatives à l'écoulement et,

(*c*) le principe de conservation de la quantité de mouvement, à partir duquel on établit les équations donnant les forces dynamiques exercées par les fluides en mouvement (voir les chapitres 13 et 14).

ÉCOULEMENT DES FLUIDES

L'écoulement d'un fluide peut être permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, laminaire ou turbulent (chapitre 8), à une dimension, à deux dimensions ou à trois dimensions, rotationnel ou irrotationnel.

On se trouve en présence d'un véritable écoulement unidimensionnel dans un fluide incompressible, quand la direction et la grandeur de la vitesse en tous points est identique. Cependant, on peut considérer qu'il s'agit d'un écoulement unidimensionnel lorsque l'unique dimension est choisie selon la ligne de courant médiane et lorsque les vitesses et les accélérations qui lui sont normales sont négligeables. Dans de tels cas, on considère que les valeurs moyennes de la vitesse, de la pression et de la cote représentent l'écoulement dans son ensemble et qu'on peut négliger les petites variations par rapport à ces moyennes. Par exemple, on analyse l'écoulement dans les conduites courbes à l'aide des principes de l'écoulement unidimensionnel bien que la structure des conduites ait trois dimensions et que la vitesse varie dans toute section droite normale à l'écoulement.

On se trouve en présence d'un écoulement à deux dimensions quand les particules du fluide se déplacent dans un plan ou dans des plans parallèles et que la configuration des lignes de courant est la même dans chaque plan.

Dans un fluide idéal dans lequel il n'y a pas de contraintes visqueuses et où, par conséquent, il n'y a pas de moments, il ne peut y avoir de mouvement de rotation des particules du fluide autour de leur centre de masse. On appelle un tel écoulement idéal qu'on peut représenter par un réseau de lignes de courant, un *écoulement irrotationnel*.

Dans le chapitre 5, le mouvement du liquide contenu dans des réservoirs tournants donne un exemple d'écoulement rotationnel où la vitesse de chaque particule varie proportionnellement à la distance du centre de rotation.

ÉCOULEMENT PERMANENT

On se trouve en présence d'un écoulement permanent si, en tout point, la vitesse des particules de fluide qui se succèdent est la même à tout instant. Ainsi, la vitesse est constante par rapport au temps ou $\partial V/\partial t = 0$, mais elle peut varier en différents points ou avec la distance. De cette proposition on déduit que d'autres variables relatives au fluide n'évoluent pas dans le temps, soit $\partial p/\partial t = 0$, $\partial \rho/\partial t = 0$, $\partial Q/\partial t = 0$, etc. La plupart des problèmes techniques et pratiques d'écoulement mettent en jeu des conditions d'écoulement permanent. Ainsi des liquides circulant dans des conduites ou s'écoulant au travers d'orifices sous une charge constante sont des exemples d'écoulements permanents. Ces écoulements peuvent être uniformes ou non uniformes.

La complexité de l'écoulement non permanent dépasse le cadre d'un ouvrage portant sur une introduction à la mécanique des fluides. L'écoulement est dit non permanent quand les conditions en un point quelconque du fluide varient avec le temps, ou $\partial V/\partial t \neq 0$. Dans le problème 7.7, nous allons établir une équation générale pour l'écoulement non permanent, et dans le chapitre 12 nous allons présenter quelques problèmes simples où la hauteur de pression et le débit varient avec le temps.

ÉCOULEMENT UNIFORME

L'écoulement est dit uniforme quand la grandeur et la direction de la vitesse ne changent pas d'un point à un autre du fluide, soit si $\partial V/\partial s = 0$. Cette proposition implique que d'autres variables relatives au fluide ne varient pas avec la distance, soit $\partial y/\partial s = 0$, $\partial \rho/\partial s = 0$, $\partial p/\partial s = 0$, etc.. L'écoulement de liquides sous pression le long de longues canalisations de diamètre constant est uniforme qu'il soit permanent ou non.

On se trouve en présence d'un écoulement non uniforme, quand la vitesse, la profondeur, la pression, etc., varient d'un point à un autre sur le parcours du fluide, ou $\partial V/\partial s \neq 0$, etc. (voir le chapitre 10).

LIGNES DE COURANT

Les lignes de courant sont des lignes imaginaires tracées dans le liquide pour indiquer la direction du mouvement en différentes sections du parcours du système relatif au fluide. La tangente en un point quelconque de la ligne représente la direction instantanée de la vitesse des particules de fluide en ce point. La direction moyenne de la vitesse peut être de manière analogue représentée par les tangentes aux lignes de courant. Puisque le vecteur vitesse a sa composante normale à la ligne de courant nulle, il est clair qu'il ne peut s'écouler de liquide de part et d'autre d'une ligne de courant, quel que soit le point considéré.

TUBES DE COURANT

Un tube de courant représente une partie élémentaire du fluide en mouvement limitée par des lignes de courant. Si la surface transverse du tube de courant est assez petite, on peut prendre la vitesse du point milieu de n'importe quelle section droite du tube comme vitesse moyenne de la section tout entière. On va utiliser le tube de courant pour établir l'équation de continuité pour un écoulement régulier à une dimension d'un fluide incompressible (problème 7.1).

ÉQUATION DE CONTINUITÉ

L'équation de continuité résulte du principe de conservation de la masse pour un écoulement permanent, la masse de fluide traversant toutes les sections droites d'un tube de courant par unité de temps est la même. On peut calculer cette masse sous la forme :

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constante} \qquad (1)$$

ou

$$\left(\frac{w_1}{g}\right) A_1 V_1 = \left(\frac{w_2}{g}\right) A_2 V_2 \qquad \text{(en kg/s)} \tag{2}$$

Pour les fluides *incompressibles* ($\rho_1 = \rho_2$) ou considérés comme tels pour des besoins pratiques, cette équation s'écrit :

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante (en m}^3\text{/s)} \tag{3}$$

où A_1 et V_1 désignent respectivement la surface de la section droite du tube de courant en m^2 et la vitesse moyenne en m/s du fluide s'y écoulant pour la section 1, les facteurs étant semblables pour la section 2. (Voir le problème 7.1). Les unités de débit couramment utilisées sont le m^3 par seconde (m^3/s), bien qu'on emploie également les litres par secondes (l/s) et les millions de litres par jour (Ml/jour) dans les travaux relatifs aux adductions d'eau.

L'équation de continuité de l'écoulement permanent à deux dimensions d'un fluide incompressible est :

$$A_{n1} V_1 = A_{n2} V_2 = A_{n3} V_3 = \text{constante} \tag{4}$$

où les termes A_n représentent les aires normales aux vecteurs vitesses correspondants (voir les problèmes 7.10 et 7.11).

On a établi l'équation de continuité de l'écoulement à trois dimensions dans le problème 7.7 dans le cas de l'écoulement permanent et non permanent. Pour des conditions d'écoulement permanent, on a également ramené cette équation générale aux écoulements à deux et une dimension.

RÉSEAUX DE LIGNES DE COURANT ET D'ÉQUIPOTENTIELLES

On trace des réseaux de lignes de courant et d'équipotentielles pour représenter la configuration de l'écoulement dans des cas d'écoulement à deux dimensions ou même à trois dimensions. Le réseau de lignes de courant et d'équipotentielles est constitué par (*a*) un système de lignes de courant espacées de telle façon que le débit q soit le même entre deux couples de lignes successifs et (*b*) par un autre système de lignes normales aux lignes de courant et espacées de telle sorte que la distance entre les lignes normales soit égale à la distance entre deux lignes de courant adjacentes. Il faudrait un nombre infini de lignes de courant pour décrire complètement l'écoulement dans des conditions aux limites données. Cependant, on utilise généralement un petit nombre de ces lignes de courant, autant que la précision l'exige.

La méthode de tracé des réseaux de lignes de courant et l'équipotentielle dépasse le cadre d'une introduction à la mécanique des fluides, cependant l'importance des réseaux de lignes de courant et d'équipotentielles est telle qu'on l'emploie dans les problèmes 7.13 et 7.14. Une fois qu'on a obtenu un réseau de lignes de courant et d'équipotentielles pour des conditions aux limites particulières, on peut l'utiliser à nouveau pour tous les autres écoulements irrotationnels de limites géométriquement semblables.

ÉNERGIE ET CHARGE TOTALE

Un système possède de l'énergie s'il peut produire du travail. Ce travail résulte du déplacement du point d'application d'une force; il se définit comme produit de l'intensité de la force par la distance parcourue dans la direction de cette force. Énergie et travail s'expriment donc dans la même unité : le joule (J); ($1\ N \cdot m = 1\ J$).

Les fluides en mouvement possèdent de l'énergie sous trois formes : énergie potentielle, énergie cinétique et énergie de pression. On les considère séparément.

Soit un élément de fluide à l'intérieur d'un conduit (figure 7-1). L'élément est situé à la cote z au-dessus d'un repère de niveau, il possède la vitesse V et la pression p. L'*énergie potentielle* dépend de l'énergie que possède l'élément de fluide en fonction de sa cote au-dessus d'un repère. Cette énergie potentielle E_p est déterminée quantitativement par le produit du poids W de l'élément par la cote z. Donc :

$$E_p = W z \tag{5}$$

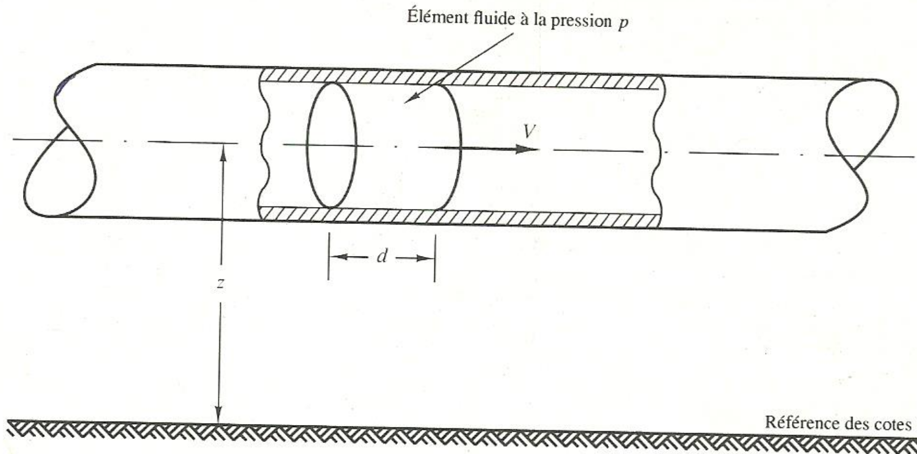


Fig. 7-1

L'*énergie cinétique* E_c résulte du mouvement de l'élément de fluide. E_c s'obtient en multipliant la masse (m) de l'élément par le carré de la vitesse et en prenant le demi-produit ainsi formé :

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2 \tag{6}$$

Comme $W = mg$ (g : accélération de la pesanteur), on peut encore écrire :

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{W}{g} V^2 \tag{7}$$

L'*énergie de pression*, parfois appelée *énergie de courant*, correspond au travail nécessaire pour contrecarrer la pression exercée sur l'élément de fluide, sur une certaine distance. L'énergie de pression (E_f) s'évalue en déterminant le travail accompli par l'élément de fluide sur une distance (d). La force, créant le travail est égale au produit de la pression (p) par la section d'aire (A) de l'élément.

$$E_f = pAd \tag{8}$$

Le terme Ad (volume de l'élément) peut être remplacé par $\dfrac{W}{w}\left(= \dfrac{m}{\rho}\right)$ donc :

$$E_f = \frac{pW}{\rho g} = \frac{pm}{\rho} \tag{9}$$

L'énergie totale E est la somme $E_p + E_c + E_f$ soit :

$$E = Wz + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{W}{g}V^2 + \frac{pW}{w} = mgz + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{mp}{\rho} \tag{10}$$

Un examen attentif de l'équation (*10*) révèle que chaque terme s'exprime en J (N · m). Dans les problèmes de mécanique des fluides et d'hydraulique, il est commode d'utiliser des énergies exprimées en «hauteurs» de charge, c'est-à-dire en unités d'énergie par unité de poids du fluide (J/N = N · m/N = m).

On modifie l'équation (*10*) en la divisant, membre à membre, par le poids de fluide W (ou mg), de façon à exprimer l'énergie totale en «hauteur» (de charge totale) (H). On obtient alors :

$$H = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{w} \tag{11}$$

Le terme z est appelé *cote*; $\dfrac{V^2}{2g}$ est appelé *hauteur due à la vitesse* et le terme $\dfrac{p}{w}$ *hauteur due à la pression.* Comme il a été précisé plus haut, chaque terme de l'équation (*11*) s'exprime en unité de longueur (m).

ÉQUATION DE L'ÉNERGIE

L'équation de l'énergie est la conséquence de l'application du principe de la conservation de l'énergie à l'écoulement des fluides. L'énergie d'un fluide en mouvement est constituée par de l'énergie interne et de l'énergie due à la pression, à la vitesse et à la position. Dans la direction de l'écoulement, le principe de l'énergie peut se résumer dans l'équation générale suivante :

$$\begin{matrix}\text{Énergie à la} \\ \text{section 1}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Énergie} \\ \text{ajoutée}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Énergie} \\ \text{perdue}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Énergie} \\ \text{dépensée}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Énergie à la} \\ \text{section 2}\end{matrix}$$

Cette équation, pour l'écoulement permanent de fluides incompressibles où la variation de l'énergie interne est négligeable, se simplifie et s'écrit :

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) + H_A - H_L - H_E = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \tag{12}$$

Cette équation est connue sous le nom de *théorème de Bernoulli.* On trouvera une démonstration de cette équation et de ses modifications pour les fluides compressibles dans le problème 7.21.

Les unités employées sont le J/N de fluide ou «mètre de fluide». Dans presque tous les problèmes relatifs à l'écoulement des liquides on utilise cette équation comme fondement de la solution. L'écoulement des gaz, dans plusieurs circonstances, met en jeu les principes de la thermodynamique et les transferts de chaleur qui dépassent le cadre de cet ouvrage.

HAUTEUR DUE À LA VITESSE

La hauteur due à la vitesse représente l'énergie cinétique par unité de poids existant en un point particulier. Si la vitesse en une section droite était uniforme, alors la hauteur due à la vitesse, calculée avec cette vitesse uniforme ou moyenne serait la véritable énergie cinétique par unité de poids du fluide. Mais en général, la distribution des vitesses n'est pas uniforme. On calcule la valeur exacte de l'énergie cinétique en intégrant les énergies cinétiques différentielles d'une ligne de courant à l'autre (voir le problème 7.17). Le coefficient de correction de l'énergie cinétique α à appliquer au terme $V_m^2/2g$ est donné par l'expression

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 \mathrm{d}A \tag{13}$$

où V = vitesse moyenne pour la section droite
v = vitesse au point courant de la section droite
A = aire de la section droite.

Les calculs montrent que $\alpha = 1{,}0$ pour une distribution de vitesse uniforme, $\alpha = 1{,}02$ à $1{,}15$ pour des écoulements turbulents, et $\alpha = 2{,}00$ pour un écoulement laminaire. Dans la plupart des calculs relatifs à la mécanique des fluides, on prend $\alpha = 1{,}0$, sans que le résultat soit entaché d'une erreur grave, puisque la hauteur due à la vitesse n'est en général qu'une petite fraction de la charge totale (énergie).

APPLICATION DU THÉORÈME DE BERNOULLI

L'application du théorème de Bernoulli doit être rationnelle et systématique. La méthode suggérée est la suivante :

(1) Tracer un schéma du système, en choisissant et en donnant un nom à toutes les sections droites du tube de courant considéré.

(2) Appliquer l'équation de Bernoulli dans le sens du courant. Choisir un plan de référence pour chaque équation écrite. Il est logique de prendre le point le plus bas pour éviter les signes moins et ainsi réduire les risques d'erreur.

(3) Calculer l'énergie vers l'amont à la section 1. Cette énergie est en J/N, qui se ramène à des mètres de fluide. Pour les liquides on peut exprimer la hauteur de pression en unités manométriques ou absolues, mais le même choix doit être fait à la section 2. Les unités manométriques sont plus commodes pour les liquides et on les utilisera tout au long de cet ouvrage. On emploiera des hauteurs de pression absolues quand la masse volumique ρ n'est pas constante. Comme dans l'équation de continuité, on prend V_1 comme vitesse moyenne à la section, sans perdre en précision.

(4) Ajouter en mètres de fluide, tout apport d'énergie effectué par des dispositifs mécaniques, comme les pompes.

(5) Soustraire, en mètres de liquide, toute énergie perdue au cours de l'écoulement.

(6) Soustraire, en mètres de fluide, toute énergie dépensée par des dispositifs mécaniques comme les turbines.

(7) Égaler cette somme d'énergies à la somme de la hauteur due à la pression, de la hauteur due à la vitesse et de la cote à la section 2.

(8) Si les deux hauteurs dues à la vitesse sont inconnues, trouver une relation entre elles à l'aide de l'équation de continuité.

LIGNE DE CHARGE

La ligne de charge est une représentation graphique de l'énergie en chaque section. Par rapport à un plan de référence, on peut reporter l'énergie totale (comme valeur linéaire en mètres de fluide) pour chaque section représentative, et la ligne ainsi obtenue est un outil précieux dans plusieurs problèmes d'écoulement. La ligne de charge est descendante dans le sens de l'écoulement sauf lorsqu'on ajoute de l'énergie par des moyens mécaniques.

LIGNE PIÉZOMÉTRIQUE(*)

La ligne piézométrique est située en dessous de la ligne de charge, à une distance égale à la hauteur due à la vitesse dans la section considérée. Les deux lignes sont parallèles pour toutes les sections dont l'aire est égale. La différence des ordonnées entre la ligne médiane de la veine liquide et la ligne piézométrique mesure la hauteur due à la pression de la section.

PUISSANCE

On calcule la puissance en multipliant le poids w de fluide circulant par seconde (wQ) par l'énergie H en J/N. On en déduit l'équation :

$$\text{Puissance } P \text{ (en watt)} = wQH \;(\text{N/m}^3 \times \text{m}^3/\text{s} \times \text{J/N}) = \text{J/s} = W \quad \text{(en watt)}$$

$$\text{Puissance (en ch)} = \frac{wQH}{735{,}5}$$

(*) N.d.T. : $Z + p/w$ s'appelle *hauteur piézométrique*.

ÉQUATION DE L'ÉNERGIE

L'équation de l'énergie est la conséquence de l'application du principe de la conservation de l'énergie à l'écoulement des fluides. L'énergie d'un fluide en mouvement est constituée par de l'énergie interne et de l'énergie due à la pression, à la vitesse et à la position. Dans la direction de l'écoulement, le principe de l'énergie peut se résumer dans l'équation générale suivante :

$$\begin{matrix}\text{Énergie à la}\\ \text{section 1}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Énergie}\\ \text{ajoutée}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Énergie}\\ \text{perdue}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Énergie}\\ \text{dépensée}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Énergie à la}\\ \text{section 2}\end{matrix}$$

Cette équation, pour l'écoulement permanent de fluides incompressibles où la variation de l'énergie interne est négligeable, se simplifie et s'écrit :

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) + H_A - H_L - H_E = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \qquad (12)$$

Cette équation est connue sous le nom de *théorème de Bernoulli.* On trouvera une démonstration de cette équation et de ses modifications pour les fluides compressibles dans le problème 7.21.

Les unités employées sont le J/N de fluide ou «mètre de fluide». Dans presque tous les problèmes relatifs à l'écoulement des liquides on utilise cette équation comme fondement de la solution. L'écoulement des gaz, dans plusieurs circonstances, met en jeu les principes de la thermodynamique et les transferts de chaleur qui dépassent le cadre de cet ouvrage.

HAUTEUR DUE À LA VITESSE

La hauteur due à la vitesse représente l'énergie cinétique par unité de poids existant en un point particulier. Si la vitesse en une section droite était uniforme, alors la hauteur due à la vitesse, calculée avec cette vitesse uniforme ou moyenne serait la véritable énergie cinétique par unité de poids du fluide. Mais en général, la distribution des vitesses n'est pas uniforme. On calcule la valeur exacte de l'énergie cinétique en intégrant les énergies cinétiques différentielles d'une ligne de courant à l'autre (voir le problème 7.17). Le coefficient de correction de l'énergie cinétique α à appliquer au terme $V_m^2/2g$ est donné par l'expression

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 \mathrm{d}A \qquad (13)$$

où V = vitesse moyenne pour la section droite
v = vitesse au point courant de la section droite
A = aire de la section droite.

Les calculs montrent que $\alpha = 1{,}0$ pour une distribution de vitesse uniforme, $\alpha = 1{,}02$ à 1,15 pour des écoulements turbulents, et $\alpha = 2{,}00$ pour un écoulement laminaire. Dans la plupart des calculs relatifs à la mécanique des fluides, on prend $\alpha = 1{,}0$, sans que le résultat soit entaché d'une erreur grave, puisque la hauteur due à la vitesse n'est en général qu'une petite fraction de la charge totale (énergie).

APPLICATION DU THÉORÈME DE BERNOULLI

L'application du théorème de Bernoulli doit être rationnelle et systématique. La méthode suggérée est la suivante :

(1) Tracer un schéma du système, en choisissant et en donnant un nom à toutes les sections droites du tube de courant considéré.

(2) Appliquer l'équation de Bernoulli dans le sens du courant. Choisir un plan de référence pour chaque équation écrite. Il est logique de prendre le point le plus bas pour éviter les signes moins et ainsi réduire les risques d'erreur.

(3) Calculer l'énergie vers l'amont à la section 1. Cette énergie est en J/N, qui se ramène à des mètres de fluide. Pour les liquides on peut exprimer la hauteur de pression en unités manométriques ou absolues, mais le même choix doit être fait à la section 2. Les unités manométriques sont plus commodes pour les liquides et on les utilisera tout au long de cet ouvrage. On emploiera des hauteurs de pression absolues quand la masse volumique ρ n'est pas constante. Comme dans l'équation de continuité, on prend V_1 comme vitesse moyenne à la section, sans perdre en précision.

(4) Ajouter en mètres de fluide, tout apport d'énergie effectué par des dispositifs mécaniques, comme les pompes.

(5) Soustraire, en mètres de liquide, toute énergie perdue au cours de l'écoulement.

(6) Soustraire, en mètres de fluide, toute énergie dépensée par des dispositifs mécaniques comme les turbines.

(7) Égaler cette somme d'énergies à la somme de la hauteur due à la pression, de la hauteur due à la vitesse et de la cote à la section 2.

(8) Si les deux hauteurs dues à la vitesse sont inconnues, trouver une relation entre elles à l'aide de l'équation de continuité.

LIGNE DE CHARGE

La ligne de charge est une représentation graphique de l'énergie en chaque section. Par rapport à un plan de référence, on peut reporter l'énergie totale (comme valeur linéaire en mètres de fluide) pour chaque section représentative, et la ligne ainsi obtenue est un outil précieux dans plusieurs problèmes d'écoulement. La ligne de charge est descendante dans le sens de l'écoulement sauf lorsqu'on ajoute de l'énergie par des moyens mécaniques.

LIGNE PIÉZOMÉTRIQUE(*)

La ligne piézométrique est située en dessous de la ligne de charge, à une distance égale à la hauteur due à la vitesse dans la section considérée. Les deux lignes sont parallèles pour toutes les sections dont l'aire est égale. La différence des ordonnées entre la ligne médiane de la veine liquide et la ligne piézométrique mesure la hauteur due à la pression de la section.

PUISSANCE

On calcule la puissance en multipliant le poids w de fluide circulant par seconde (wQ) par l'énergie H en J/N. On en déduit l'équation :

$$\text{Puissance } P \text{ (en watt)} = wQH \; (\text{N/m}^3 \times \text{m}^3/\text{s} \times \text{J/N}) = \text{J/s} = W \quad \text{(en watt)}$$

$$\text{Puissance (en ch)} = \frac{wQH}{735{,}5}$$

(*) N.d.T. : $Z + p/w$ s'appelle *hauteur piézométrique*.

Problèmes résolus

7.1 Établir l'équation de continuité pour l'écoulement permanent (*a*) d'un fluide compressible et (*b*) d'un fluide incompressible.

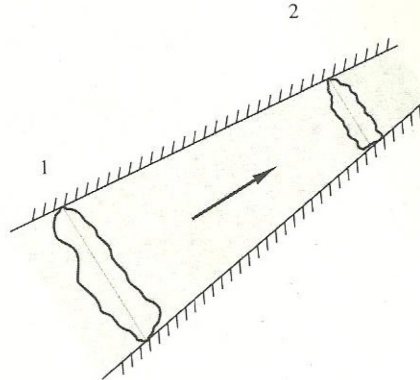


Fig. 7-2

Solution

(*a*) Considérons l'écoulement d'un bout à l'autre d'un tube de courant dans lequel les sections 1 et 2 sont normales aux lignes de courant constituant le tube (Fig. 7-2). Pour les valeurs ρ_1 de la masse volumique et V_1 de la vitesse normale, la masse traversant la section 1 par unité de temps est $\rho_1 V_1\, \mathrm{d}A_1$, puisque $V_1\, \mathrm{d}A_1$ est le volume la traversant par unité de temps. D'une façon analogue, la masse traversant la section 2 est $\rho_2 V_2\, \mathrm{d}A_2$. Puisque pour un écoulement permanent, la masse ne peut changer par rapport au temps, et qu'il ne peut s'écouler de fluide à travers les limites d'un tube de courant, la masse parcourant le tube est alors constante. Par conséquent,

$$\rho_1 V_1 \mathrm{d}A_1 = \rho_2 V_2\, \mathrm{d}A_2 \qquad (A)$$

Les densités ρ_1 et ρ_2 sont constantes en toute section $\mathrm{d}A$, et les vitesses V_1 et V_2 représentent les vitesses du tube de courant aux sections 1 et 2. Alors

$$\rho_1 V_1 \int_{A_1} \mathrm{d}A_1 = \rho_2 V_2 \int_{A_2} \mathrm{d}A_2$$

En intégrant

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \text{ou} \quad w_1 V_1 A_1 = w_2 V_2 A_2 \qquad (B)$$

(*b*) Pour des fluides incompressibles (et pour certains cas d'écoulements de fluide compressibles) la densité est constante, soit $\rho_1 = \rho_2$. Par conséquent,

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante (en m}^3/\text{s)} \qquad (C)$$

Ainsi le débit est constant le long d'une famille de tubes de courant. Dans plusieurs cas d'écoulement de fluides, on peut utiliser la vitesse en une section dans les équations de continuité (*B*) et (*C*).

7.2 Dans une conduite de 30 cm de diamètre, circulent 1 800 l/min, ensuite le diamètre passe à 15 cm. Calculer les vitesses moyennes dans les deux conduites.

Solution

$$Q \text{ en m}^3/\text{s} = \frac{1\,800}{60} \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}030\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$V_{30} = \frac{Q \text{ en m}^3/\text{s}}{A \text{ en m}^2} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}30)^2} = 0{,}43\ \text{m/s} \quad \text{et} \quad V_{15} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 1{,}70\ \text{m/s}$$

7.3 Si la vitesse dans une conduite de 30 cm de diamètre est de 0,50 m/s, quelle est la vitesse d'un jet de 7,5 cm de diamètre sortant d'une buse fixée au tuyau?

Solution

$Q = A_{30}V_{30} = A_{7,5}V_{7,5}$ soit, puisque les surfaces varient comme le carré des diamètres, $(30)^2 V_{30} = (7,5)^2 V_{7,5}$. Alors $V_{7,5} = (30/7,5)^2 V_{30} = 16 \times 0,50 = 8,0$ m/s

7.4 De l'air circule dans un tuyau de 15 cm à une pression manométrique de 2,06 bar et à une température de 37 °C. Si la pression barométrique est de 1,01 bar et la vitesse de 3,20 m/s, quel est le nombre de kg d'air circulant par seconde?

Solution

Les lois des gaz utilisent des unités absolues de température et de pression (en Pa). Ainsi

$$\rho_{\text{air}} = \frac{p}{rT} = \frac{(2,06 + 1,01) \times 10^5}{287,1(37 + 273)} = 3,45 \text{ kg/m}^3$$

où $r = 287,1$ constante des gaz pour l'air, a été prise dans la table 1 de l'annexe.

$$M \text{ en kg/s} = \rho Q = \rho A_{15} V_{15} = 3,45 \text{ kg/m}^3 \times \frac{1}{4}\pi(0,15)^2 \text{ m}^2 \times 3,20 \text{ m/s} = 0,195 \text{ kg/s}$$

7.5 Du gaz carbonique passe au point A d'un tuyau de 75 mm de diamètre à la vitesse de 4,50 m/s. La pression en A est de 2,06 bar et la température de 21 °C. En un point B situé en aval, la pression est de 1,37 bar et la température de 32 °C. Pour une pression atmosphérique de 1,01 bar, calculer la vitesse en B et comparer les débits volumétriques en A et B. La valeur de r pour le gaz carbonique est de 187,8 d'après la table 1 de l'annexe.

Solution

$$\rho_A = \frac{p_A}{rT} = \frac{3,07 \times 10^5}{187,8 \times 294} = 5,56 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_B = \frac{2,38 \times 10^5}{187,8 \times 305} = 4,15 \text{ kg/m}^3$$

(*a*) M en kg/s $= \rho_A A_A V_A = \rho_B A_B V_B$. Mais comme $A_A = A_B$, alors

$$\rho_A V_A = \rho_B V_B = 5,56 \times 4,50 = 4,15 V_B \quad \text{et} \quad V_B = 6,03 \text{ m/s}$$

(*b*) Le débit massique est constant, mais le débit en volume varie parce que la masse volumique varie.

$$Q_A = A_A V_A = \frac{1}{4}\pi(0,075)^2 \times 4,50 = 19,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_B = A_B V_B = \frac{1}{4}\pi(0,075)^2 \times 6,03 = 26,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

7.6 Quel est le diamètre minimal de la conduite qu'il faut prendre pour transporter 0,230 kg/s d'air avec une vitesse maximale de 5,50 m/s? La température de l'air est de 27 °C et la pression absolue de 2,35 bar.

Solution

$$\rho_{\text{air}} = \frac{p}{rT} = \frac{2,35 \times 10^5}{287,1(27 + 273)} = 2,73 \text{ kg/m}^3$$

$$Q_m = 0,230 \text{ kg/s} = \rho Q \quad \text{ou} \quad Q = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{0,230 \text{ kg/s}}{2,73 \text{ kg/m}^3} = 0,084 \text{ m}^3/\text{s}$$

Problèmes résolus

7.1 Établir l'équation de continuité pour l'écoulement permanent (*a*) d'un fluide compressible et (*b*) d'un fluide incompressible.

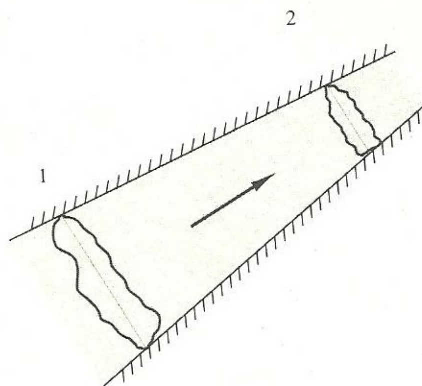


Fig. 7-2

Solution

(*a*) Considérons l'écoulement d'un bout à l'autre d'un tube de courant dans lequel les sections 1 et 2 sont normales aux lignes de courant constituant le tube (Fig. 7-2). Pour les valeurs ρ_1 de la masse volumique et V_1 de la vitesse normale, la masse traversant la section 1 par unité de temps est $\rho_1 V_1 \, dA_1$, puisque $V_1 \, dA_1$ est le volume la traversant par unité de temps. D'une façon analogue, la masse traversant la section 2 est $\rho_2 V_2 \, dA_2$. Puisque pour un écoulement permanent, la masse ne peut changer par rapport au temps, et qu'il ne peut s'écouler de fluide à travers les limites d'un tube de courant, la masse parcourant le tube est alors constante. Par conséquent,

$$\rho_1 V_1 dA_1 = \rho_2 V_2 \, dA_2 \qquad (A)$$

Les densités ρ_1 et ρ_2 sont constantes en toute section dA, et les vitesses V_1 et V_2 représentent les vitesses du tube de courant aux sections 1 et 2. Alors

$$\rho_1 V_1 \int_{A_1} dA_1 = \rho_2 V_2 \int_{A_2} dA_2$$

En intégrant

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \text{ou} \quad w_1 V_1 A_1 = w_2 V_2 A_2 \qquad (B)$$

(*b*) Pour des fluides incompressibles (et pour certains cas d'écoulements de fluide compressibles) la densité est constante, soit $\rho_1 = \rho_2$. Par conséquent,

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante (en m}^3/\text{s)} \qquad (C)$$

Ainsi le débit est constant le long d'une famille de tubes de courant. Dans plusieurs cas d'écoulement de fluides, on peut utiliser la vitesse en une section dans les équations de continuité (*B*) et (*C*).

7.2 Dans une conduite de 30 cm de diamètre, circulent 1 800 l/min, ensuite le diamètre passe à 15 cm. Calculer les vitesses moyennes dans les deux conduites.

Solution

$$Q \text{ en m}^3/\text{s} = \frac{1\,800}{60} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}030 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_{30} = \frac{Q \text{ en m}^3/\text{s}}{A \text{ en m}^2} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}30)^2} = 0{,}43 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad V_{15} = \frac{0{,}030}{\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 1{,}70 \text{ m/s}$$

7.3 Si la vitesse dans une conduite de 30 cm de diamètre est de 0,50 m/s, quelle est la vitesse d'un jet de 7,5 cm de diamètre sortant d'une buse fixée au tuyau?

Solution

$Q = A_{30}V_{30} = A_{7,5}V_{7,5}$ soit, puisque les surfaces varient comme le carré des diamètres, $(30)^2V_{30} = (7,5)^2V_{7,5}$. Alors $V_{7,5} = (30/7,5)^2V_{30} = 16 \times 0,50 = 8,0$ m/s

7.4 De l'air circule dans un tuyau de 15 cm à une pression manométrique de 2,06 bar et à une température de 37 °C. Si la pression barométrique est de 1,01 bar et la vitesse de 3,20 m/s, quel est le nombre de kg d'air circulant par seconde?

Solution

Les lois des gaz utilisent des unités absolues de température et de pression (en Pa). Ainsi

$$\rho_{air} = \frac{p}{rT} = \frac{(2,06 + 1,01) \times 10^5}{287,1(37 + 273)} = 3,45 \text{ kg/m}^3$$

où $r = 287,1$ constante des gaz pour l'air, a été prise dans la table 1 de l'annexe.

$$M \text{ en kg/s} = \rho Q = \rho A_{15}V_{15} = 3,45 \text{ kg/m}^3 \times \frac{1}{4}\pi(0,15)^2 \text{ m}^2 \times 3,20 \text{ m/s} = 0,195 \text{ kg/s}$$

7.5 Du gaz carbonique passe au point A d'un tuyau de 75 mm de diamètre à la vitesse de 4,50 m/s. La pression en A est de 2,06 bar et la température de 21 °C. En un point B situé en aval, la pression est de 1,37 bar et la température de 32 °C. Pour une pression atmosphérique de 1,01 bar, calculer la vitesse en B et comparer les débits volumétriques en A et B. La valeur de r pour le gaz carbonique est de 187,8 d'après la table 1 de l'annexe.

Solution

$$\rho_A = \frac{p_A}{rT} = \frac{3,07 \times 10^5}{187,8 \times 294} = 5,56 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_B = \frac{2,38 \times 10^5}{187,8 \times 305} = 4,15 \text{ kg/m}^3$$

(*a*) M en kg/s $= \rho_A A_A V_A = \rho_B A_B V_B$. Mais comme $A_A = A_B$, alors

$$\rho_A V_A = \rho_B V_B = 5,56 \times 4,50 = 4,15 V_B \quad \text{et} \quad V_B = 6,03 \text{ m/s}$$

(*b*) Le débit massique est constant, mais le débit en volume varie parce que la masse volumique varie.

$$Q_A = A_A V_A = \frac{1}{4}\pi(0,075)^2 \times 4,50 = 19,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$
$$Q_B = A_B V_B = \frac{1}{4}\pi(0,075)^2 \times 6,03 = 26,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

7.6 Quel est le diamètre minimal de la conduite qu'il faut prendre pour transporter 0,230 kg/s d'air avec une vitesse maximale de 5,50 m/s? La température de l'air est de 27 °C et la pression absolue de 2,35 bar.

Solution

$$\rho_{air} = \frac{p}{rT} = \frac{2,35 \times 10^5}{287,1(27 + 273)} = 2,73 \text{ kg/m}^3$$
$$Q_m = 0,230 \text{ kg/s} = \rho Q \quad \text{ou} \quad Q = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{0,230 \text{ kg/s}}{2,73 \text{ kg/m}^3} = 0,084 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Aire minimale } A \text{ nécessaire} = \frac{\text{débit } Q \text{ en m}^3/\text{s}}{\text{vitesse moyenne } V} = \frac{0{,}084}{5{,}50} = 0{,}015\,3 \text{ m}^2 = 153 \text{ cm}^2$$

Ainsi, le diamètre minimal = 14 cm.

7.7 Établir l'équation générale de continuité pour l'écoulement d'un fluide compressible à trois dimensions, (*a*) dans le cas d'un écoulement non permanent et (*b*) dans le cas d'un écoulement permanent.

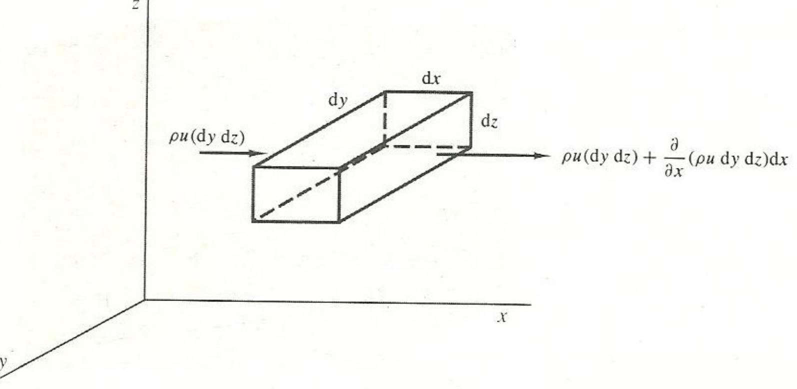


Fig. 7-3

Solution

(*a*) Soit les composantes de la vitesse dans les directions x, y et z respectivement u, v, w. Considérons l'écoulement à travers un parallélépipède dont les dimensions sont dx, dy et dz. La masse de fluide traversant une face quelconque de ce volume par unité de temps est égale au produit de la masse volumique du fluide par la surface de la section droite de la face, par la composante de la vitesse normale à la face, soit dans la direction x, $\rho u(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$. Dans la direction x, les débits approximatifs sont (voir la figure 7-3).

$$\text{débit entrant } \rho u(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \text{ et débit sortant } \rho u(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}x,$$

soit le débit entrant approximatif net est $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}x$ ou $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

Si on écrit les expressions analogues pour les termes représentant le débit entrant net dans les dimensions y et z, et si nous faisons la somme de ces valeurs, nous obtenons

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Ces équations deviennent plus précises quand dx, dy, dz tendent vers zéro.

Le taux de variation positif de la masse au sein du parallélépipède est

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$$

où $\partial\rho/\partial t$ est le taux de variation de la densité au sein du volume par rapport au temps. Puisque le débit entrant net est identique au taux de variation de la masse, nous obtenons

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$$

Ainsi l'équation de continuité pour l'écoulement non permanent à trois dimensions, d'un fluide compressible prend la forme

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (A)$$

(*b*) Pour un écoulement permanent, les propriétés du fluide ne varient pas avec le temps, soit $\partial\rho/\partial t = 0$. L'équation de continuité, pour l'écoulement permanent d'un fluide compressible est

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right] = 0 \qquad (B)$$

De plus, pour l'écoulement permanent isovolume (ρ = constante) l'équation à trois dimensions s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (C)$$

Au cas, où $\partial w/\partial z = 0$, l'écoulement permanent est à deux dimensions et

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (D)$$

Au cas où, à la fois $\partial w/\partial z$ et $\partial v/\partial y = 0$, l'écoulement permanent est à une dimension et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (E)$$

Cette expression représente un écoulement uniforme.

7.8 L'équation de la continuité pour l'écoulement permanent isovolume est-elle vérifiée si les composantes de la vitesse sont les suivantes :

$$u = 2x^2 - xy + z^2, \quad v = x^2 - 4xy + y^2, \quad w = -2xy - yz + y^2$$

Solution

Dérivant chacune des composantes par rapport à la variable convenable,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4x + 2y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -y$$

Reportons dans l'équation (*C*) ci-dessus : $(4x - y) + (-4x + 2y) + (-y) = 0$. Elle est vérifiée.

7.9 Les composantes de la vitesse pour l'écoulement permanent isovolume sont $u = (2x-3y)t$, $v = (x-2y)t$ et $w = 0$. L'équation de la continuité est-elle vérifiée?

Solution

En dérivant chaque composante par rapport à la variable convenable

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2t, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2t, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Reportant dans l'équation (*C*) du problème 7, on trouve 0. Elle est vérifiée.

7.10 Pour l'écoulement permanent isovolume, les valeurs suivantes de u et v sont-elles possibles?

(*a*) $u = 4xy + y^2, \quad v = 6xy + 3x$ (*b*) $u = 2x^2 + y^2, \quad v = -4xy$

Solution

Pour les écoulements à deux dimensions indiqués, l'équation (*D*) du problème 7.7 doit être vérifiée.

(*a*) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4y,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 6x,\quad 4y + 6x \neq 0$ Écoulement impossible

(*b*) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -4x,\quad 4x - 4x = 0$ Écoulement possible

7.11 Un fluide coule entre deux plaques convergentes de 45 cm de largeur, et la vitesse varie selon l'expression

$$\frac{v}{v_{\max}} = 2\frac{n}{n_0}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)$$

Pour les valeurs $n_0 = 5$ cm et $v_{\max} = 0{,}30$ m/s, déterminer (*a*) le débit total en m³/s, (*b*) la vitesse moyenne en une section et (*c*) la vitesse moyenne pour la section où $n = 2$ cm (Fig. 7-4).

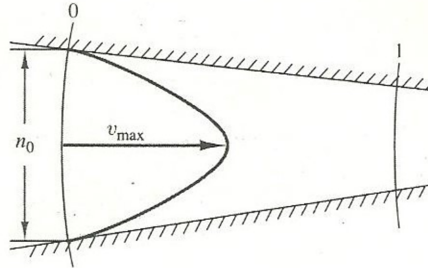


Fig. 7-4

Solution

(*a*) Le débit par unité de longueur perpendiculaire au plan de la figure est

$q = \int_0^{n_0} v\,\mathrm{d}n = \dfrac{2v_{\max}}{n_0}\int_0^{n_0}\left(n - \dfrac{n^2}{n_0}\right)\mathrm{d}n = \dfrac{1}{3}\, v_{\max} n_0 = 5 \times 10^{-3}$ m³/s par m de largeur et le débit total $Q = 5 \times 10^{-3}(0{,}45) = 2{,}25 \times 10^{-3}$ m³/s.

(*b*) La vitesse moyenne $V_0 = \dfrac{q}{n_0} = 0{,}10$ m/s, d'où $n_0 = 0{,}05$ m. Soit $V_0 = \dfrac{Q}{A} = 0{,}10$ m/s.

(*c*) Se servant de l'équation (*4*), $V_0 A_{n_0} = V_1 A_{n_1}$, $0{,}10(0{,}05)(0{,}45) = V_1(0{,}02)(0{,}45)$, et $V_1 = 0{,}25$ m/s.

7.12 Si on mesure la grandeur et la direction des vitesses dans un plan vertical YY, en des points situés à une distance Δy, les uns des autres, montrer que le débit q par unité de largeur peut s'écrire $\Sigma v_x \Delta y$ (Fig. 7-5).

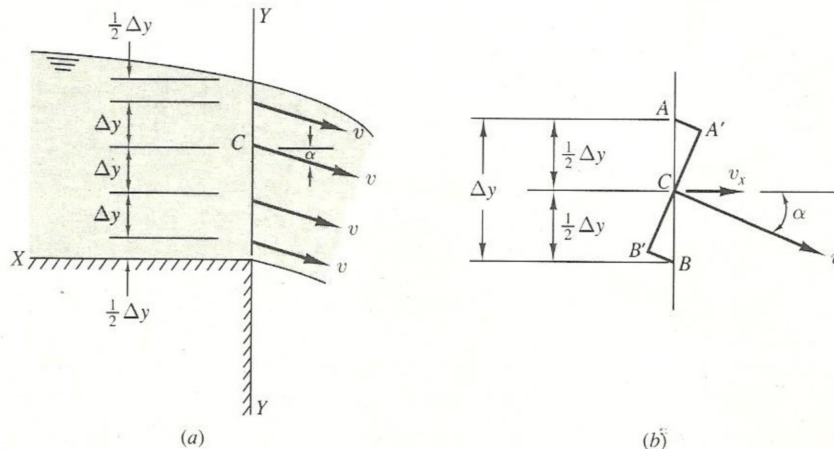


Fig. 7-5

Solution

Débit par unité de longueur : $q = \Sigma \Delta q$ où chacun des Δq peut s'écrire $v(\Delta A_n)$.
D'après la figure 6-4(*b*) $A'B' = \Delta A_n = \Delta_y \cos\alpha$. Alors $q = \Sigma v(\Delta y \cos\alpha) = \Sigma v_x \Delta y$ par unité de largeur.

7.13 (*a*) Donner les grandes lignes du procédé permettant de tracer le réseau de lignes de courant et d'équipotentielles pour l'écoulement permanent à deux dimensions d'un fluide idéal circulant entre les limites représentées sur la figure 7-6.
(*b*) Si la vitesse uniforme à la section 2 vaut 9,0 m/s et si les valeurs de Δn_2 sont chacune de 30 mm, déterminer le débit q et les vitesses uniformes à la section 1, où les valeurs de Δn_1 sont de 90 mm.

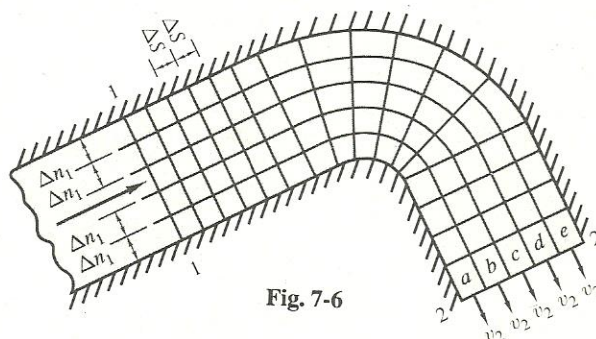


Fig. 7-6

Solution

(*a*) Le procédé permettant de tracer le réseau des lignes de courant et d'équipotentielles dans le cas présent peut être appliqué à des cas plus compliqués. Pour un fluide *idéal*, on procède comme suit :

(*1*) Répartir le flux en une section limitée par des limites parallèles en un certain nombre de bandes d'égales largeur Δn (utilisant une épaisseur unité perpendiculaire au plan de la figure). Chaque bande représente un tube de courant bordé par des lignes de courant ou par une ligne de courant et une limite. Le débit circulant entre les limites est également réparti entre les tubes et $\Delta q \cong v(\Delta n) \cong$ constant, où on a mesuré la longueur Δn normalement à la vitesse locale. Puisque $\Delta q \cong v_1 \Delta n_1 \cong v_2 \Delta n_2$, alors $v_1/v_2 \cong \Delta n_2/\Delta n_1 \cong \Delta S_2/\Delta S_1$. Plus les valeurs de Δn et de ΔS sont petites, plus on approche de la relation exacte. On choisira un nombre suffisant de lignes de courant de façon que la précision soit convenable, sans introduire de raffinement et de détails superflus.

(*2*) Pour évaluer la *direction* des lignes de courant, on trace un certain nombre de courbes normales ou équipotentielles. On espace les courbes de telle sorte que $\Delta S = \Delta n$. Les équipotentielles doivent être perpendiculaires aux lignes de courant, et aussi aux limites, puisque les limites sont des lignes de courant. Ainsi le schéma aura l'allure d'un ensemble de carrés (approximatifs) recouvrant tout le réseau de lignes de courant et d'équipotentielles.

(*3*) A l'endroit même où la limite change de forme ou à proximité, il est impossible de tracer des carrés avec exactitude. On devra apporter des modifications au tracé initial; il est d'ailleurs utile pour vérifier le schéma de tracer des lignes diagonales passant par tous les «carrés». Ces lignes diagonales, tracées dans les deux directions, devraient, elle aussi, former approximativement des carrés.

(*4*) Les limites elles-mêmes représentent généralement des lignes de courant effectives. Si ce n'est pas le cas, le réseau de lignes de courant et d'équipotentielles ne représentera pas la configuration exacte de l'écoulement. Par exemple, là où l'écoulement «se sépare» de la limite, on ne peut utiliser dans cette région la limite elle-même comme ligne de courant. En général, lorsqu'on a affaire à des écoulements divergents, des zones de séparation peuvent se créer.

Les solutions mathématiques relatives aux flux irrotationnels sont fondées sur la définition de la *fonction de courant*, laquelle comprend le principe de continuité et les propriétés de la ligne de courant. Le débit Ψ entre deux lignes de courant est constant (puisque aucun écoulement de fluide ne peut s'effectuer de part et d'autre de la ligne de courant), et si on peut exprimer ψ en fonction de x et y, on peut tracer les lignes de courant. De manière analogue, on peut définir les lignes équipotentielles par $\phi(x,y) =$ constante. De ces expressions on peut déduire que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{pour les lignes de courant}$$

et $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{pour les lignes équipotentielles}$$

Ces équations doivent vérifier l'équation de Laplace, c'est-à-dire,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

et l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En général, on calcule les fonctions équipotentielles et on les trace. Ensuite, on trace les lignes de courant qui leur sont orthogonales pour représenter le courant.

Ces solutions exactes sont présentées dans des ouvrages portant sur la mécanique des fluides de niveau élevé, l'hydrodynamique, et la variable complexe.

(*b*) Le débit par unité de largeur $= q = \Sigma \Delta q = q_a + q_b + q_c + q_d + q_e = 5(v_2)(A_{n_2})$.
Pour une largeur unité, $A_{n_2} = 1(\Delta n_2)$ et $q = 5(9{,}0)(1 \times 0{,}03) = 1{,}35$ m³/s par unité de largeur.
Alors pour $\Delta n_1 = 0{,}09$ m, $5v_1(0{,}09 \times 1) = 1{,}35$, soit $v_1 = 3{,}0$ m/s.
On pourrait aussi trouver v_1 à partir de : $\dfrac{v_1}{v_2} \cong \dfrac{\Delta n_2}{\Delta n_1}$, $\dfrac{v_1}{9{,}0} \cong \dfrac{0{,}03}{0{,}09}$, $v_1 = 3{,}0$ m/s.

7.14 Tracer les lignes de courant et les lignes équipotentielles pour les conditions aux limites représentées sur la figure 7-7 (La surface qu'on a laissée vierge est destinée à être remplie par le lecteur.)

Solution

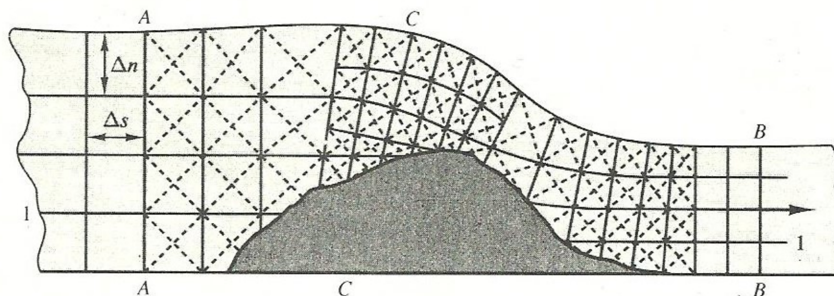


Fig. 7-7

(*1*) Là où l'écoulement s'effectue entre deux limites parallèles, diviser chaque largeur en quatre parties égales ou tubes de courant (en AA et BB). Essayer d'imaginer le parcours d'une particule le long d'une de ces lignes de courant, en traçant la ligne 1-1, par exemple (voir le problème précédent). Procéder de la même façon avec les deux autres lignes de courant.

(*2*) Les lignes équipotentielles doivent être perpendiculaires aux lignes de courant en tous les points et aussi aux limites. Elles doivent être placées pour former approximativement des carrés. Commençant par le centre de la section, tracer ces lignes orthogonales dans les deux directions. On aura besoin de gommer souvent avant d'obtenir un réseau de lignes de courant et d'équipotentielles satisfaisant.

(*3*) Tracer les diagonales (en pointillé) pour vérifier l'exactitude du réseau de lignes de courant et d'équipotentielles. Ces diagonales devraient produire des carrés.

(*4*) Dans le tracé ci-dessus, la surface C a été divisée en 8 tubes de courant. On remarquera que les petits quadrilatères sont plus carrés que les grands. Plus les tubes de courant sont nombreux, plus les «carrés» obtenus dans le réseau de lignes de courant et d'équipotentielles sont précis.

7.15 La figure 7-8 représente une ligne de courant pour un écoulement à deux dimensions et ses lignes équipotentielles associées de 1 à 10, chacune normale à la ligne de courant. L'espacement entre les lignes équipotentielles est donné par la deuxième colonne du tableau ci-dessous. Si la vitesse moyenne entre 1 et 2 est de 0,500 m/s, calculer (*a*) les vitesses moyennes de la ligne de courant entre chaque ligne équipotentielle et (*b*) le temps qu'une particule met pour aller de 1 à 10 le long de la ligne de courant.

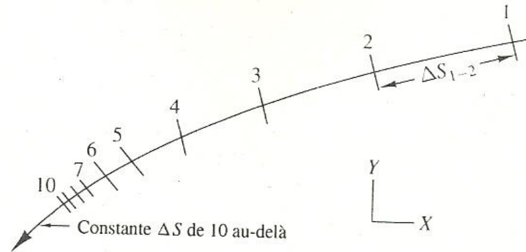


Fig. 7-8

Solution

(*a*) Se reportant à la relation entre la vitesse et Δn du problème 7.13,

$$V_{1-2}\Delta n_{1-2} = V_{2-3}\Delta n_{2-3} = V_{3-4}\Delta n_{3-4} = \ldots$$

De même

$$\Delta S_{1-2} \cong \Delta n_{1-2} \qquad \Delta S_{2-3} \cong \Delta n_{2-3} \qquad \ldots$$

Ainsi, $V_{2-3} \cong V_{1-2}(\Delta S_{1-2}/\Delta S_{2-3}) = 0{,}500(0{,}500/0{,}400) = 0{,}625$ m/s. De manière analogue, $V_{3-4} = (0{,}500/0{,}300) = 0{,}833$ m/s, etc. On a reporté les valeurs des vitesses moyennes dans le tableau ci-dessous.

Position	$\Delta S(m)$	$\dfrac{\Delta S_{1-2}}{\Delta S}$	$V = 0{,}500\left(\dfrac{0{,}500}{\Delta S}\right)$ (m/s)	$t = \dfrac{(\Delta S)}{V}$ (s)
1-2	0,500	1,000	0,500	1,000
2-3	0,400	1,250	0,625	0,640
3-4	0,300	1,667	0,833	0,360
4-5	0,200	2,500	1,250	0,160
5-6	0,100	5,000	2,500	0,040
6-7	0,0700	7,143	3,571	0,020
7-8	0,0450	11,11	5,56	0,008
8-9	0,0300	16,67	8,33	0,004
9-10	0,0208	24,00	12,00	0,002
				$\Sigma = 2{,}234$ s

(*b*) Le temps mis pour aller de 1 à 2 est égal à la distance de 1 à 2 divisée par la vitesse moyenne de 1 à 2, soit $t_{1-2} = (0{,}500/0{,}500) = 1{,}000$ s. De manière analogue $t_{2-3} = (0{,}400/0{,}625) = 0{,}640$ s. Le temps total mis pour aller de 1 à 10 est égal à la somme des temps de la dernière colonne, soit 2,234 s.

7.16 Un gaz s'écoule à travers un conduit carré. Au point 1, le côté du conduit mesure 0,10 m, la vitesse vaut 7,55 m/s, la masse volumique du gaz vaut 1,09 kg/m^3 (pour une pression et une température données). Au point 2, le côté du conduit mesure 0,250 m et la vitesse est égale à 2,02 m/s. Trouver le débit massique du gaz Q_m et la masse volumique ρ_2 au point 2.

Solution

$$M = \rho_1 A_1 V_1 = (1{,}09)[(0{,}100)(0{,}100)](7{,}55) = 0{,}082\,3 \text{ kg/s}$$
$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$
$$0{,}082\,3 = (\rho_2)[0{,}250)(0{,}250)](2{,}02)$$
$$\rho_2 = 0{,}652 \text{ kg/m}^3$$

7.17 Établir l'expression du coefficient cinétique α pour l'écoulement permanent isovolume.

Solution

L'énergie cinétique vraie d'une particule est $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}Mv^2$, et par conséquent, l'énergie cinétique totale du fluide circulant est

$$\frac{1}{2}\int_A (\mathrm{d}M)v^2 = \frac{1}{2}\int_A \frac{w}{g}(\mathrm{d}Q)v^2 = \frac{w}{2g}\int_A (v\,\mathrm{d}A)v^2$$

Pour calculer cette expression on doit faire l'intégration sur la surface A.

L'énergie cinétique calculée au moyen de la vitesse moyenne en une section droite est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{wQ}{g}\right)V_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{wA}{g}\right)V_\mathrm{m}^3.$$

Appliquant le coefficient de correction α à cette expression et égalant à l'énergie cinétique vraie, nous obtenons.

$$\alpha\left(\frac{wA}{2g}\right)(V_\mathrm{m}^3) = \frac{w}{2g}\int_A (v\,\mathrm{d}A)v^2 \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_\mathrm{m}}\right)^3 \mathrm{d}A$$

7.18 Un liquide s'écoule dans une conduite circulaire. Pour une distribution de vitesses vérifiant l'équation $v = v_{\max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2$, calculer le coefficient de l'énergie cinétique α (figure 7-9).

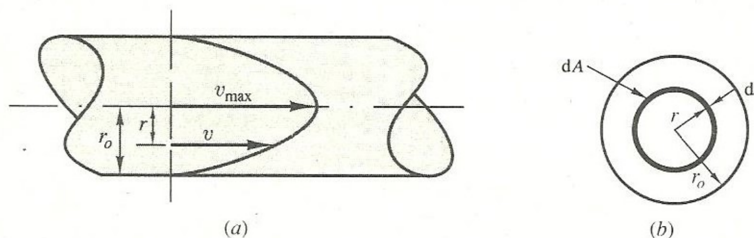


Fig. 7-9

Solution

Calculer la vitesse moyenne pour pouvoir utiliser l'équation du problème 7.17. D'après l'équation de continuité,

$$V_\mathrm{m} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v\,\mathrm{d}A}{\pi r_0^2} = \frac{\int (v_{\max}/r_0^2)(r_0^2 - r^2)(2\pi r\,\mathrm{d}r)}{\pi r_0^2} = \frac{2v_{\max}}{r_0^4}\int_0^{r_0}(r_0^2 r - r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{v_{\max}}{2}$$

On peut aussi obtenir cette valeur en considérant que l'équation donnée représente une parabole et que le volume situé en dessous du paraboloïde de révolution engendré est égal à la moitié du cylindre circonscrit. Ainsi

$$V_\mathrm{m} = \frac{\text{volume/s}}{\text{aire de la base}} = \frac{\frac{1}{2}(\pi r_0^2)v_{\max}}{\pi r_0^2} = \frac{v_{\max}}{2}$$

Utilisons la valeur de la vitesse moyenne dans l'équation en α,

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_m}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} \left(\frac{v_{max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2}{\frac{1}{2}v_{max}}\right)^3 2\pi r\, dr = 2{,}00$$

(voir l'écoulement laminaire au chapitre 8).

7.19 De l'huile de densité 0,750 circule dans une conduite de 15 cm à la pression de 103 kPa. Si l'énergie totale relativement à un plan de référence située à 2,40 m en dessous de la ligne médiane du tuyau est de 17,9 $N \cdot m/N$ déterminer le débit d'huile en m³/s.

Solution

$$\text{Énergie par kN d'huile} = \begin{matrix}\text{énergie de}\\ \text{pression}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{énergie cinétique}\\ \text{(hauteur due à la vitesse)}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{énergie}\\ \text{potentielle}\end{matrix}$$

$$17{,}9 = \frac{103 \times 10^3}{750 \times 9{,}81} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 2{,}40$$

d'où $V_{15} = 5{,}4$ m/s. Ainsi, $Q = A_{15}V_{15} = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 5{,}4 = 95 \times 10^{-3}$ m³/s.

7.20 Une turbine produit 450 kW quand le débit d'eau qui la traverse est de 0,609 m³/s. Supposant que le rendement est de 87 %, quelle est la charge exercée sur la turbine ?

Solution

$$\text{puissance de sortie (watt)} = \text{puissance consommée (watt)} \times \text{rendement} = (WQH_T) \times \text{rendement}$$

$$450 \times 10^3 = (9\,810 \times 0{,}609 \times H_T)(0{,}87) \quad \text{et} \quad H_T = 86{,}6 \text{ m.}$$

7.21 Établir les équations du mouvement pour l'écoulement permanent d'un fluide quelconque.

Solution

Considérons comme corps libre une masse élémentaire de fluide dM représentée dans les figures 7-10(a) et (b). Le mouvement s'effectue dans le plan de la figure et l'axe de x est pris dans la direction du mouvement. On n'a pas représenté les forces normales à la direction du mouvement agissant sur le corps libre dM. Les forces agissant dans la direction x sont dues (1) à la pression agissant à la surface des extrémités, (2) à la composante du poids et (3) aux forces de viscosité (dF_s en N) exercées par les particules de fluide adjacentes.

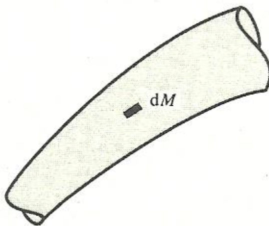


Fig. 7-10(a)

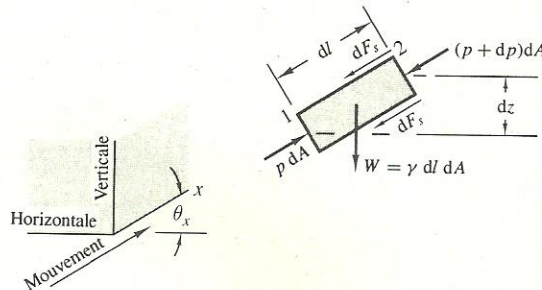


Fig. 7-10(b)

D'après l'équation du mouvement $\sum F_x = Ma_x$, nous obtenons

$$[+p\,dA - (p + dp)dA - w\,dA\,dl\,\sin\theta_x - dF_s] = \frac{w\,dA\,dl}{g}\left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad (1)$$

En divisant (1) par $w\,\mathrm{d}A$ et en remplaçant $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ par la vitesse V, on obtient

$$\left[\frac{p}{w} - \frac{p}{w} - \frac{\mathrm{d}p}{w} - \mathrm{d}l\,\sin\theta_x - \frac{\mathrm{d}F_s}{w\,\mathrm{d}A}\right] = \frac{V\,\mathrm{d}V}{g} \qquad (2)$$

Le terme $\dfrac{\mathrm{d}F_s}{w\,\mathrm{d}A}$ représente la résistance à l'écoulement sur la longueur $\mathrm{d}l$. Les forces de viscosité $\mathrm{d}F_s$ peuvent être remplacées par le produit de la contrainte tangentielle visqueuse τ par la surface sur laquelle elles agissent (périmètre × longueur), soit $\mathrm{d}F_s = \tau\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}l$.

Alors, $\dfrac{\mathrm{d}F_s}{w\,\mathrm{d}A} = \dfrac{\tau\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}l}{w\,\mathrm{d}A} = \dfrac{\tau\,\mathrm{d}l}{wR}$ où R est appelé rayon hydraulique qu'on définit par la surface de la section droite divisée par le périmètre mouillé, soit dans le cas présent, $\mathrm{d}A/\mathrm{d}P$. La somme de toutes les forces de viscosité représente l'énergie perdue au cours de l'écoulement, et, en Nm/N est :

$$\text{perte de charge } \mathrm{d}h_L = \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{wR} = \frac{\mathrm{N/m^2} \times \mathrm{m}}{\mathrm{N/m^3} \times \mathrm{m^2/m}} = \mathrm{m}$$

Pour référence future,

$$\tau = wR\left(\frac{\mathrm{d}h_L}{\mathrm{d}l}\right) \qquad (3)$$

Revenant à l'expression (2) ci-dessus, puisque $\mathrm{d}l\ \sin\theta_x = \mathrm{d}z$, on peut l'écrire sous la forme finale

$$\frac{\mathrm{d}p}{w} + \frac{V\,\mathrm{d}V}{g} + \mathrm{d}z + \mathrm{d}h_L = 0 \qquad (4)$$

Cette expression porte le nom d'*équation d'Euler* quand on l'applique à un fluide idéal (perte de charge = 0). Quand on l'intègre pour les fluides de densité constante, on l'appelle *équation de Bernoulli*. Cette équation différentielles (4) pour un écoulement permanent est une équation fondamentale de l'hydrodynamique.

CAS 1. Écoulement des fluides incompressibles

Pour des fluides *incompressibles*, l'intégration s'effectue simplement, comme suit :

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}w} + \int_{v_1}^{v_2} \frac{V\,\mathrm{d}V}{g} + \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z + \int_1^2 \mathrm{d}h_L = 0 \qquad (A)$$

On étudiera les méthodes utilisées pour calculer le dernier terme dans un prochain chapitre. On appellera H_L le terme représentant la perte de charge totale. Intégrant et reportant les limites,

$$\left(\frac{p_2}{w} - \frac{p_1}{w}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$$

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - H_L = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right)$$

qui est la forme habituelle sous laquelle on applique le théorème de Bernoulli à l'écoulement des fluides incompressibles (aucune énergie extérieure n'étant apportée).

CAS 2. Écoulement des fluides compressibles

Pour des fluides compressibles, le terme $\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{w}$ ne peut être intégré avant de connaître l'expression de w en fonction de la variable p. La relation entre w et p dépend des conditions thermodynamiques mises en jeu.

(*a*) Dans des conditions *isothermes* (température constante), la loi générale des gaz peut s'exprimer

$$\frac{p_1}{w_1} = \frac{p}{w} = \text{constante} \quad \text{ou} \quad w = \left(\frac{w_1}{p_1}\right) p.$$

où $\dfrac{w_1}{p_1}$ est une constante et p doit être exprimé en Pa *absolus*. Reportant dans (A) ci-dessus,

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{(w_1/p_1)p} + \int_{v_1}^{v_2} \frac{V\,\mathrm{d}V}{g} + \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z + \int_1^2 \mathrm{d}h_L = 0$$

Intégrant et reportant les limites $\dfrac{p_1}{w_1} \ln \dfrac{p_2}{p_1} + \left(\dfrac{V_2^2}{2g} - \dfrac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$ ou, mettant sous forme habituelle,

$$\frac{p_1}{w_1} \ln p_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_L = \frac{p_1}{w_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2.$$

Rapprochant cette équation de l'équation de continuité et de la loi des gaz pour des conditions isothermes, on obtient une expression ne contenant qu'une vitesse inconnue. Ainsi, pour un écoulement permanent,

$$w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2 \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{w_1} = \frac{p_2}{w_2} = \frac{r}{g} T \quad \text{d'où} \quad V_1 = \frac{w_2 A_2 V_2}{(w_2/p_2) p_1 A_1} = \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) V_2$$

Reportant dans l'expression mise sous forme d'équation de Bernoulli (B) ci-dessus,

$$\left[\frac{p_1}{w_1} \ln p_1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\frac{p_1}{w_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \qquad (C)$$

(b) Dans des conditions *adiabatiques* (pas de chaleur gagnée ou perdue) la loi générale des gaz se ramène à

$$\left(\frac{w}{w_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1^{1/k}}{w_1} = \frac{p^{1/k}}{w} = \text{constante}, \quad \text{et ainsi } w = w_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k}$$

où k est l'exposant adiabatique.
En établissant et en intégrant le terme $\mathrm{d}p/w$ séparément, nous obtenons

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{w_1 (p/p_1)^{1/k}} = \frac{p_1^{1/k}}{w_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p^{1/k}} = \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \frac{p_1}{w_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

et l'équation de Bernoulli sous forme habituelle s'écrit

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right) \frac{p_1}{w_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left(\frac{p^2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \qquad (D)$$

Associant cette équation avec l'équation de continuité et avec l'équation des gaz pour des conditions adiabatiques, on obtient une expression ne contenant qu'une seule vitesse inconnue.
Utilisant $w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2$ et $\dfrac{p_1^{1/k}}{w_1} = \dfrac{p_2^{1/k}}{w_2}$ constante, $V_1 = \dfrac{w_2 A_2 V_2}{w_1 A_1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{1/k} \left(\dfrac{A_2}{A_1}\right) V_2$ et l'équation de Bernoulli prend la forme

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right) \frac{p_1}{w_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \quad (E)$$

7.22 Dans la figure 7-11, de l'eau s'écoule de A à B à la vitesse de 0,370 m³/s et la hauteur de pression en A est de 6,6 m. Considérant qu'il n'y a aucune perte d'énergie entre A et B, calculer la pression en B. Tracer la ligne de charge.

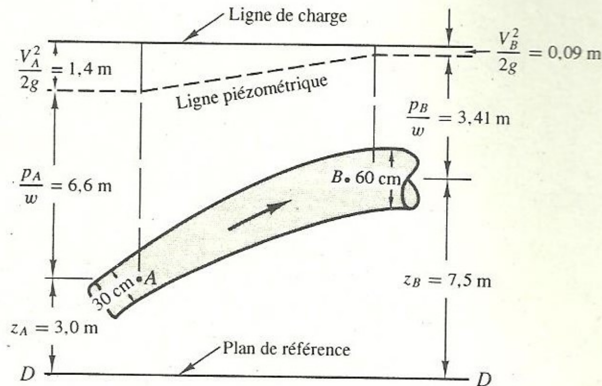


Fig. 7-11

Solution

Appliquer l'équation de Bernoulli de A à B, avec pour référence A :

$$\text{énergie en } A + \text{énergie ajoutée} - \text{énergie perdue} = \text{énergie en } B$$

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + z_A\right) + 0 - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{60}^2}{2g} + z_B\right)$$

où $V_{30} = Q/A_{30} = 0{,}370/\left(\frac{1}{4}\pi 0{,}3^2\right) = 5{,}24$ m/s et $V_{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^2(5{,}24) = 1{,}31$ m/s. Reportant,

$$\left(6{,}6 + \frac{(5{,}24)^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{(1{,}31)^2}{2g} + 4{,}5\right) \quad \text{et} \quad \frac{p_B}{w} = 3{,}41 \text{ m d'eau}$$

L'énergie totale en une section quelconque peut-être reportée au-dessus d'un plan de référence donné. Utilisant D-D dans le cas présent,

$$\text{énergie en } A = p_A/w + V_{30}^2/2g + z_A = 6{,}6 + 1{,}4 + 3{,}0 = 11{,}0 \text{ m}$$
$$\text{énergie en } B = p_B/w + V_{60}^2/2g + z_B = 3{,}41 + 0{,}09 + 7{,}5 = 11{,}0 \text{ m}$$

Notons que, au cours de la circulation, l'énergie passe d'une forme à une autre. Dans le cas présent, une partie de l'énergie de pression et de l'énergie cinétique en A est transformée en énergie potentielle en B.

7.23 Un tuyau d'aspiration de 0,1 m de diamètre est connecté à la pompe de la figure 7-12. La pression en A correspond à un vide de 180 mm de mercure. La pompe débite 0,030 0 m³ d'huile ($d = 0{,}85$) à la seconde. Trouver la hauteur (H) d'énergie totale au point A, la référence des cotes étant prise à la pompe.

Solution

$$\text{énergie en } A = p_A/w + V_A^2/2g + z_A$$
$$V_A = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}030\,0}{[(\pi)(0{,}100)^2/4]} = 3{,}820 \text{ m/s}$$
$$P_A = wh = [(13{,}6)(9{,}79)](-0{,}180) = -23{,}97 \text{ kPa}$$
$$\text{énergie en } A = \frac{-23{,}97}{(0{,}85)(9{,}81)} + \frac{(3{,}820)^2}{(2)(9{,}81)} + (-1{,}200) = -3{,}337 \text{ m}$$

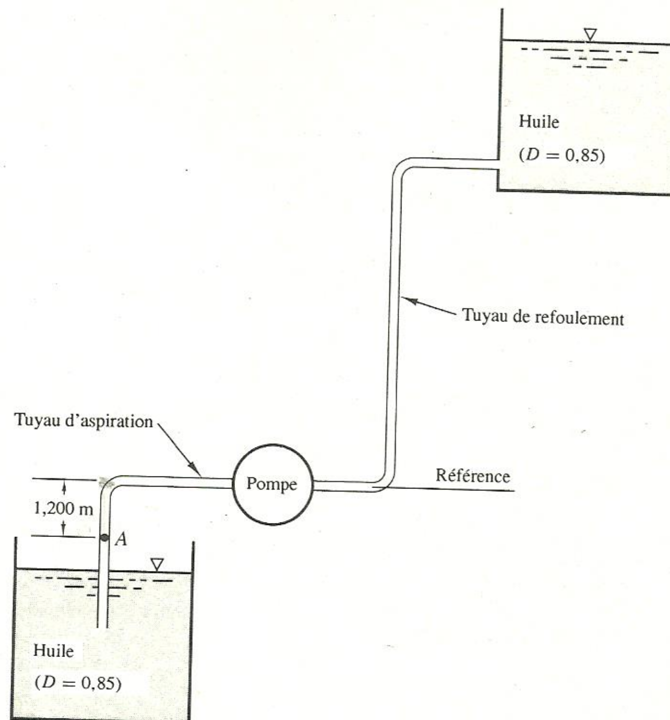


Fig. 7-12

7.24 Dans le tube de Venturi représenté dans la figure 7-13, la dénivellation du mercure du manomètre différentiel est de 35,8 cm. Calculer le débit d'eau à travers l'appareil si aucune énergie n'est perdue entre A et B.

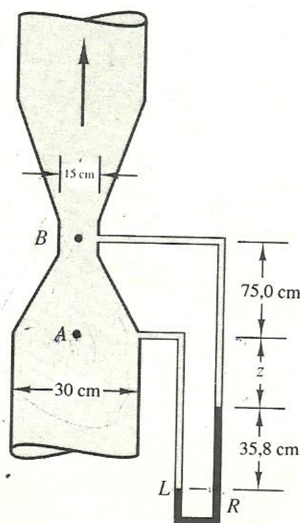


Fig. 7-13

Solution

Appliquer l'équation de Bernoulli de A à B, avec pour référence A

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0,75\right)$$

et
$$\left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) = \left(\frac{V_{15}^2}{2g} - \frac{V_{30}^2}{2g} + 0{,}75\right) \qquad (1)$$

L'équation de continuité donne $A_{30}V_{30} = A_{15}V_{15}$, ou $V_{30} = \left(\frac{15}{30}\right)^2 V_{15} = \frac{1}{4}V_{15}$, et $V_{30}^2 = \frac{1}{16}V_{15}^2$. Pour le manomètre, la hauteur due à la pression en L = la hauteur due à la pression en R (m d'eau)

$$\frac{p_A}{w} + z + 0{,}358 = \frac{p_B}{w} + 0{,}75 + z + (0{,}358)(13{,}6)$$

d'où $\left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) = 5{,}26$ m d'eau. Reportant dans (*1*), nous obtenons $V_{15} = 9{,}7$ m/s et $Q = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 9{,}7 = 0{,}172\ \mathrm{m^3/s}$.

7.25 Une conduite transportant de l'huile de pétrole de densité 0,877 passe de 15 cm de diamètre à la section E à 45 cm à la section R. La section E est située 3,66 m plus bas que R et les pressions sont respectivement de 91,0 kPa et de 60,3 kPa. Si le débit est de 146 l/s, déterminer la perte de charge et la direction de la circulation.

Solution

La vitesse moyenne en chaque section droite $= \frac{Q}{A}$. Alors,

$$V_{15} = \frac{0{,}146}{\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2} = 8{,}26\ \mathrm{m/s} \quad \text{et} \quad V_{45} = \frac{0{,}146}{\frac{1}{4}\pi(0{,}45)^2} = 0{,}92\ \mathrm{m/s}$$

En utilisant la section la plus basse E comme plan de référence, nous constatons que l'énergie en chacune des sections est :

$$\text{en } E,\quad \left(\frac{p}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + z\right) = \frac{(91\,000)}{0{,}877 \times 9\,810} + \frac{(8{,}26)^2}{2g} + 0 = 14{,}05\ \mathrm{N \cdot m/N} = 14{,}1\ \mathrm{m}$$

$$\text{en } R,\quad \left(\frac{p}{w} + \frac{V_{45}^2}{2g} + z\right) = \frac{60\,300}{0{,}877 \times 9\,810} + \frac{(0{,}92)^2}{2g} + 3{,}60 = 10{,}65\ \mathrm{N \cdot m/N} = 10{,}65\ \mathrm{m}$$

La circulation s'effectue de E en R puisque l'énergie en E dépasse celle de R. On peut trouver la perte de charge, en passant de E à R, avec pour référence E : 14,05− perte de charge = 10,65, soit perte de charge = 3,4 m de E à R.

7.26 Pour le tube du problème 7.24, considérons que de l'air à 27 °C circule en A avec une pression égale à 2,60 bar. Supposons que la dénivellation du manomètre est de 35,8 cm d'eau. En admettant que le poids spécifique de l'air ne varie pas entre A et B et que la perte d'énergie est négligeable, calculer la quantité d'air circulant en kg/s.

Solution

Appliquant l'équation de Bernoulli entre A et B, avec pour référence A, comme dans le problème 7.24, nous obtenons $\left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) = \left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{V_{15}^2}{2g}\right) + 0{,}75.$ (*1*)

Pour obtenir la hauteur de pression du fluide en circulation, on doit calculer la masse volumique de l'air

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{(2{,}60 + 1{,}01)10^5}{287{,}1(27 + 273)} = 4{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$$

Pour le manomètre différentiel, $p_L = p_R$ (en bar, man.)

soit $$p_A + 4{,}20 \times 9{,}81(z + 0{,}358) = p_B + 4{,}20 \times 9{,}81(0{,}75 + z) + 9\,810(0{,}358)$$

et $(p_A - p_B) = 3\,530$ Pa. Reportant dans (*1*), nous obtenons $V_{15} = 42{,}2$ m/s et

$$Q_m = \rho Q = 4{,}20\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 42{,}2\right] = 3{,}12 \text{ kg/s}$$

7.27 Un conduit d'air horizontal a une section droite qui passe de $7{,}0 \times 10^{-2}$ m² à $2{,}0 \times 10^{-2}$ m². En supposant qu'il n'y a pas de pertes, quelle est la variation de pression quand 0,70 kg d'air par seconde circule? (Utiliser $\rho = 3{,}200$ kg/m² pour les conditions de température et de pression considérées.)

Solution

$$Q = \frac{0{,}70 \text{ kg/s}}{3{,}2 \text{ kg/m}^3} = 0{,}218 \text{ m}^3\text{/s} \qquad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0{,}218}{0{,}07} = 3{,}12 \text{ m/s} \qquad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}218}{0{,}02} = 10{,}9 \text{ m/s}$$

Appliquant le théorème de Bernoulli, de la section 1 à la section 2, on obtient

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{(3{,}12)^2}{2g} + 0\right) - 0 = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{(10{,}9)^2}{2g} + 0\right) \quad \text{soit} \quad \left(\frac{p_1}{w} - \frac{p_2}{w}\right) = 5{,}56 \text{ m d'air}$$

et $p'_1 - p'_2 = (5{,}56 \times 3{,}200) \times 9{,}81 = 174$ Pa de variation de pression. Cette petite variation de pression justifie la supposition initiale (densité du fluide constante).

7.28 Une canalisation de 15 cm de diamètre et de 180 m de long transporte de l'eau de A situé à une hauteur de 24,0 m jusqu'en B situé à une hauteur de 36,0 m. La contrainte tangentielle due au frottement du liquide contre les parois du tuyau est de 29,9 N/m². Déterminer la variation de pression dans le tuyau et la perte de charge.

Solution

(*a*) Les forces agissant sur la masse d'eau sont les mêmes que celles qu'on a représenté dans la figure 7-10(*b*) du problème 7.21.
En utilisant $P_1 = p_1 A_{15}$, $P_2 = p_2 A_{15}$, on obtient, d'après $\Sigma F_x = 0$,

$$p_1 A_{15} - p_2 A_{15} - W \sin\theta_x - \tau(\pi d)L = 0$$

À présent $W = w \times$ volume $= 9\,810 \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 180$ et $\sin\theta_x = (36{,}0 - 24{,}0)/180$. Alors,

$$p_1\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2\right] - p_2\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2\right] - 9\,810\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 180\right] \times 12/180 - 29{,}9(\pi \times 0{,}15 \times 180) = 0$$

d'où $p_1 - p_2 = 261\,200$ Pa $= 261$ kPa.

(*b*) En utilisant l'équation de l'énergie, avec pour référence A,

énergie en A – perte de charge = énergie en B

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right) - \text{perte de charge} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + 12\right)$$

Ou perte de charge $= \left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w}\right) - 12 = \frac{261{,}2}{9{,}807} - 12 = 14{,}64$ m.

Autre méthode

En utilisant (3) du problème 7.21, la perte de charge $= \dfrac{\tau L}{wR} = \dfrac{29{,}9 \times 180}{9\,807 \times \dfrac{0{,}15}{4}} = 14{,}64$ m.

7.29 De l'eau à 32 °C doit être extraite d'un puits à la vitesse de 2,0 m/s par le tuyau d'aspiration d'une pompe. Calculer la hauteur maximale à laquelle doit se trouver la pompe, dans les conditions suivantes : pression atmosphérique = 0,981 bar (abs.), pression de vapeur = 0,048 bar (abs.) [Voir la table 1(C)] et perte de charge dans le tuyau d'aspiration : 3 fois la hauteur due à la vitesse.

Solution

La masse volumique de l'eau à 32 °C est, d'après la table 1(*C*) de 995 kg/m^3. La pression minimale à l'entrée de la pompe ne peut dépasser la pression de vapeur du liquide. On appliquera l'équation de l'énergie entre la surface de l'eau à l'extérieur du tuyau d'aspiration et l'entrée de la pompe, en utilisant des hauteurs de pression absolues.

énergie à la surface de l'eau − perte de charge = énergie à l'entrée de la pompe

$$\left(\frac{98{,}1 \times 10^3}{995 \times 9{,}81} + 0 + 0\right) - \frac{3(2{,}0)^2}{2 \times 9{,}81} = \frac{4\,800}{995 \times 9{,}81} + \frac{(2{,}0)^2}{2 \times 9{,}81} + z$$

d'où $z = 8{,}74$ m au-dessus de la surface de l'eau.

Dans ces conditions, il y aura probablement de gros dégâts dus à la cavitation. Voir le chapitre 14.

7.30 On détend dans l'air, à l'aide d'une buse, un jet de vapeur d'eau de 150 mm de diamètre. Trouver la puissance du jet sachant que sa vitesse est 36,0 m/s.

Solution

$$Q = AV = \left[\frac{(\pi)(0{,}150)^2}{4}\right](36{,}0) = 0{,}636\,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{w} = 0 + \frac{36{,}0^2}{[(2)(9{,}81)]} + 0 = 66{,}06 \text{ m}$$

$$P = QwH = (0{,}636\,2)(9{,}81)(66{,}06) = 412 \text{ kW}$$

7.31 Dans le système représenté dans la figure 7-14, la pompe *BC* doit amener avec un débit de 160 l/s de l'huile de pétrole, de densité = 0,762 au réservoir *D*. En admettant que l'énergie perdue de *A* à *B* est de 2,50 J/N et entre *C* et *D* de 6,50 J/N

(*a*) combien la pompe doit-elle fournir de kW au système ? (*b*) tracer la ligne de charge.

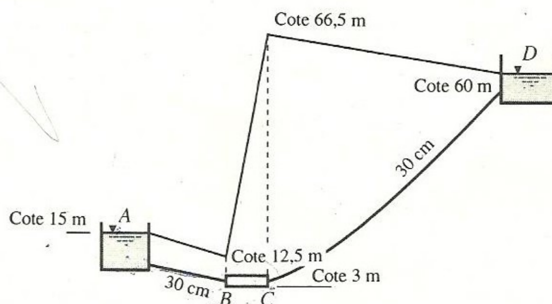


Fig. 7-14

Solution

(*a*) La vitesse des particules en A et D va être très petite et par conséquent le terme relatif à la hauteur due à la vitesse sera négligeable.

De A à D, avec pour référence BC (A aurait pu aussi être choisi)

$$\left(\frac{p_A}{w}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A\right)+H_{\text{pompe}}-H_{\text{perdue}}=\left(\frac{p_D}{w}+\frac{V_D^2}{2g}+z_D\right)$$

$$(0+\text{negli.}+12)+H_{\text{pompe}}-(2{,}50+6{,}50)=(0+\text{negli.}+57)$$

et $H_{\text{pompe}}=54{,}0$ m (ou J/N)

Puissance (kW) $= wQH_{\text{pompe}}=0{,}762\times 9{,}81(0{,}16)(54)=64{,}6$ kW fournie au système.

Notons que la pompe a fourni une charge suffisante pour faire monter l'huile de 45,0 m et pour vaincre les 9,0 m de charge perdus dans la tuyauterie. Ainsi, la charge fournie au système est de 54,0 m.

(*b*) La ligne de charge en A est à la hauteur 15,0 m au-dessus du plan de référence zéro. De A à B, la perte d'énergie est de 2,5 m et la ligne de charge s'abaisse de cette quantité, la hauteur en B étant de 12,5 m. La pompe ajoute 54,0 m d'énergie et la hauteur en C est par conséquent de 66,5 m. Finalement, la perte d'énergie entre C et D étant de 6,5 m, la hauteur en D = 66,5 m − 6,5 m = 60,0 m. On a représenté ces résultats graphiquement sur la figure 7-14.

7.32 De l'eau circule dans la turbine de la figure 7-15 à la vitesse de 0,214 m³/s et les pressions en A et B sont respectivement de 147,5 kPa et de −34,5 kPa. Calculer la puissance en kW fournie par l'eau à la turbine.

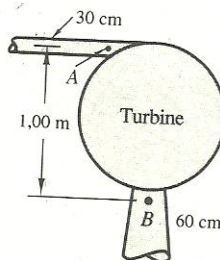


Fig. 7-15

Solution

En allant de A à B (avec B pour référence), avec

$$V_{30}=0{,}214/A_{30}=3{,}03 \quad \text{et} \quad V_{60}=3{,}03/4=0{,}758 \text{ m/s}$$

$$\left(\frac{p_A}{w}+\frac{V_{30}^2}{2g}+z_A\right)+0-H_{\text{turbine}}=\left(\frac{p_B}{w}+\frac{V_{60}^2}{2g}+z_B\right)$$

$$\left(\frac{147{,}5}{9{,}81}+\frac{3{,}03^2}{2g}+1{,}00\right)-H_T=\left(\frac{-34{,}5}{9{,}81}+\frac{0{,}758^2}{2g}+0\right) \quad \text{et} \quad H_T=20{,}0 \text{ m}$$

$$\text{puissance } (kW)=wQH_T=9{,}81\times 0{,}214(20{,}0)=42 \text{ kW à la turbine.}$$

7.33 Pour la turbine du problème 7.32, si la puissance extraite du courant est de 50 kW tandis que les manomètres en A et B indiquent : 141,3 kPa et −33,1 kPa respectivement, quel est le débit d'eau?

Solution

Allant de A à B (avec pour référence B)

$$\left(\frac{141{,}3}{9{,}81}+\frac{V_{30}^2}{2g}+1{,}0\right)-H_T=\left(\frac{-33{,}1}{9{,}81}+\frac{V_{60}^2}{2g}+0\right) \quad \text{et}$$

$$H_T = \left(\frac{174{,}3}{9{,}81} + 1{,}0 + \frac{V_{30}^2}{2g} - \frac{V_{60}^2}{2g}\right) \qquad (A)$$

$$A_{30}V_{30} = A_{60}V_{60} \quad \text{ou} \quad \frac{V_{60}^2}{2g} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{1}{16}\frac{V_{30}^2}{2g} \qquad (B)$$

$$50 \times 10^3 = wQH_T = 9\,810 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}30)^2 V_{30} \times H_T \quad \text{ou} \quad H_T = \frac{72{,}1}{V_{30}} \qquad (C)$$

En égalant (*a*) et (*c*) (en reportant la hauteur de pression), $72{,}1/V_{30} = 18{,}8 + (15/16)(V_{30}^2/2g)$ ou

$$18{,}8\, V_{30} + 0{,}0478\, V_{30}^3 = 72{,}1$$

Résolvons cette équation par approximations successives :

- essayons $V_{30} = 3{,}5$ m/s, $66{,}2 + 2{,}10 \neq 72{,}2$ (on doit augmenter V)
- essayons $V_{30} = 4{,}0$ m/s, $75{,}6 + 3{,}07 = 72{,}2$ (réponse entre les deux)
- essayons $V_{30} = 3{,}7$ m/s, $70{,}0 + 2{,}43 = 72{,}2$ (bon résultat)

Le débit $Q = A_{30}V_{30} = \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 3{,}7 = 0{,}26$ m³/s.

7.34 De l'huile de pétrole de densité 0,761 circule du réservoir A au réservoir E comme l'indique la figure 7-16. On peut supposer que les pertes de charges sont les suivantes :

de A à $B = 0{,}60\dfrac{V_{30}^2}{2g}$ de C à $D = 0{,}40\dfrac{V_{15}^2}{2g}$

de B à $C = 9{,}0\dfrac{V_{30}^2}{2g}$ de D à $E = 9{,}0\dfrac{V_{15}^2}{2g}$

Trouver (*a*) le débit Q en m³/s; (*b*) la pression en C en Pa et (*c*) la puissance en C (en kW), avec E comme niveau de référence.

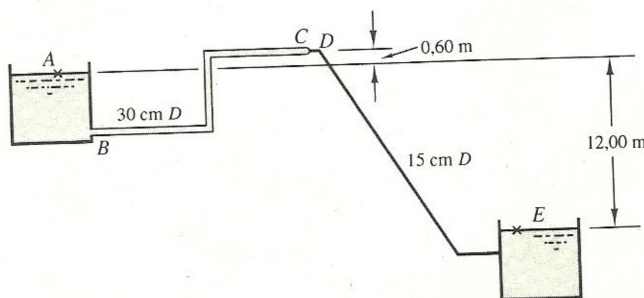


Fig. 7-16

Solution

(*a*) En allant de A à E, avec pour référence E,

en A — de A à B — de B à C — de C à D — de D à E — en E

$$(0 + \text{négl.} + 12{,}0) - \left[\left(0{,}60\frac{V_{30}^2}{2g} + 9{,}0\frac{V_{30}^2}{2g}\right) + \left(0{,}40\frac{V_{15}^2}{2g} + 9{,}0\frac{V_{15}^2}{2g}\right)\right] = (0 + \text{négl.} + 0)$$

soit $12{,}0 = 9{,}6(V_{30}^2/2g) + 9{,}4(V_{15}^2/2g)$. De plus, $V_{30}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 V_{15}^2 = \frac{1}{16}V_{15}^2$. En reportant et en résolvant,

$$V_{15}^2/2g = 1{,}2 \text{ m}, \quad V_{15} = 4{,}85 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2 \times 4{,}85 = 0{,}086 \text{ m}^3/\text{s}.$$

(*b*) Allant de A à C, avec A comme référence,

$$(0 + \text{négl.} + 0) - (0{,}60 + 9{,}0)\frac{V_{30}^2}{2g} = \left(\frac{p_c}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0{,}60\right) \quad \text{et} \quad \frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{1}{16}\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{1}{16}(1{,}2) = 0{,}075 \text{ m}$$

Alors $p_C/w = -1{,}40$ m d'huile (man.) et $p_C = (0{,}761 \times 9\,810(-1{,}40)) = -10\,450$ Pa (man.).

On aurait pu appliquer l'équation de Bernoulli de C à E avec des résultats aussi satisfaisants. Les équations obtenues dans chacune des deux méthodes *ne sont pas* des équations simultanées indépendantes.

(*c*) La puissance en $C = wQH_C = (0{,}761 \times 9\,810)(0{,}086)(-1{,}40 + 0{,}075 + 12{,}6) = 7\,240 \text{ W} = 7{,}24 \text{ kW}$ (avec pour référence E).

7.35 Un siphon de 50 mm de diamètre aspire de l'huile ($d = 0{,}82$) d'un réservoir (figure 7-17). La perte de charge entre les points 1 et 2 est de 1, 50 m et de 2,40 m entre les points 2 et 3. Trouver le débit d'huile du siphon ainsi que la pression d'huile au point 2.

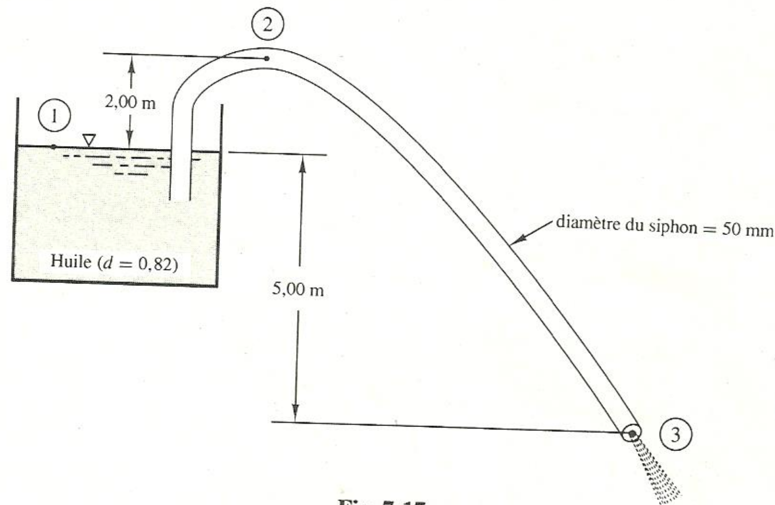


Fig. 7-17

Solution

$$\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_3}{w} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 + H_L$$

$$0 + 0 + 5{,}00 = 0 + \frac{V_3^2}{[(2)(9{,}81)]} + 0 + 3{,}90$$

$$V_3 = 4{,}646 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = \left[\frac{(\pi)(0{,}050)^2}{4}\right](4{,}646) = 0{,}009\,12 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{p_1}{w} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{w} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + H_L$$

$$0 + 0 + 5{,}00 = \frac{p_2}{w} + \frac{(4{,}646)^2}{[(2)(9{,}81)]} + 7{,}00 + 1{,}50$$

$$\frac{p_2}{w} = -4{,}600 \text{ m}$$

$$p_2 = [(9{,}79)(0{,}82)](-4{,}600) = -36{,}9 \text{ kPa}$$

7.36 La charge consommée par la turbine CR de la figure 7-18 est de 60 m et la pression en T est de 5,0 bar. Pour des pertes de charge entre W et R de $2{,}0\ (V_{60}^2/2g)$ et de $3{,}0\ (V_{30}^2/2g)$ entre C et T, calculer (*a*) le débit et (*b*) la hauteur de pression en R. Tracer la ligne de charge.

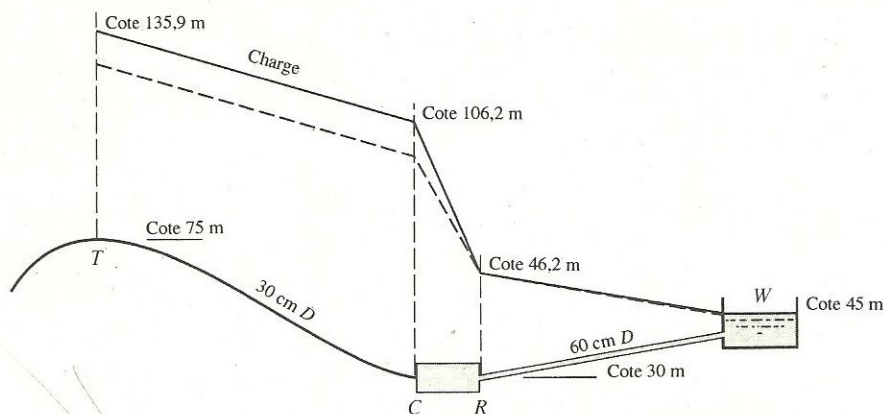


Fig. 7-18

Solution

Parce que la ligne de charge en T est à la hauteur $\left(75 + \frac{5 \times 10^5}{9\,810} + \frac{V_{30}^2}{2g}\right)$ et bien au-dessus de la hauteur en W, l'eau circule vers le réservoir W.

(*a*) En allant de T à W, avec pour référence le niveau zéro,

$$\underset{\text{en } T}{\left(\frac{5 \times 10^5}{9\,810} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 75\right)} - \left[\underset{\text{de } T \text{ à } C}{3{,}0\frac{V_{30}^2}{2g}} + \underset{\text{de } R \text{ à } W}{2{,}0\frac{V_{60}^2}{2g}}\right] \underset{H_T}{-60} = \underset{\text{en } W}{(0 + \text{négl.} + 45)}$$

reportant $V_{60}^2 = \frac{1}{16}V_{30}^2$ et résolvant, $V_{30}^2/2g = 9{,}88$ m, d'où $V_{30} = 13{,}9$ m/s. Alors,

$$Q = \frac{1}{14}\pi(0{,}3)^2 \times 13{,}9 = 0{,}98 \text{ m}^3/\text{s}.$$

(*b*) Allant de R à W, avec pour référence R, $(p_R/w + \frac{1}{16} \times 9{,}88 + 0) - 2(\frac{1}{16} \times 9{,}88) = (0 + \text{négl.} + 15)$ et $p_R/w = 15{,}62$ m. Le lecteur peut vérifier cette hauteur de pression en appliquant l'équation de Bernoulli entre T et R.
Pour trouver la ligne de charge sur la figure, calculer l'énergie aux quatre sections indiquées.

$$\begin{aligned}
\text{Hauteur de la ligne de charge en } T &= 51{,}0 + 9{,}9 + 75{,}0 &&= 135{,}9 \text{ m}\\
\text{en } C &= 135{,}9 - 3 \times 9{,}9 &&= 106{,}2 \text{ m}\\
\text{en } R &= 106{,}2 - 60{,}0 &&= 46{,}2 \text{ m}\\
\text{en } W &= 46{,}2 - 2 \times \frac{1}{16} \times 9{,}9 &&= 45{,}0 \text{ m}
\end{aligned}$$

On montrera dans le chapitre suivant que la ligne de charge est une droite pour un écoulement permanent dans un tuyau de diamètre constant. La ligne piézométrique est parallèle à la ligne de charge et située à $V^2/2g$ au-dessous (représentée en pointillé).

7.37 (*a*) Quelle est la pression exercée à la pointe d'une torpille se déplaçant dans l'eau de mer à 30 m/s à une profondeur de 9,0 m? (*b*) Si la pression en un point latéral C de la torpille de même hauteur que la pointe est de 0,69 bar, quelle est la vitesse relative en ce point?

Solution

(*a*) Dans le cas présent, on gagnera en clarté en appliquant le théorème de Bernoulli si on considère le mouvement relatif d'un courant d'eau le long de la torpille supposée immobile. La vitesse à la pointe de la torpille sera alors nulle. En admettant qu'il n'y ait aucune perte de charge dans le tube de flux allant d'un point A situé dans l'eau juste en avant de la torpille à un point B situé à la pointe de la torpille, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\left(\frac{p_A}{w}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A\right)-0=\left(\frac{p_B}{w}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B\right) \quad \text{soit} \quad \left(9{,}0+\frac{(30)^2}{2g}+0\right)=\left(\frac{p_B}{w}+0+0\right)$$

Alors $p_B/w = 54{,}9$ m d'eau de mer, et $p'_B = wh = 1\,025 \times 9{,}81 \times 54{,}9 = 552\,000$ Pa (man.).

Cette pression est dite pression d'arrêt et peut s'exprimer sous la forme $p_S = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2$ en Pa. Pour une étude plus détaillée, voir les chapitres 12 et 13.

(*b*) On peut appliquer l'équation de Bernoulli soit du point A au point C, soit du point B au point C. En considérant A et C, on a :

$$\left(\frac{p_A}{w}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A\right)-0=\left(\frac{p_C}{w}+\frac{V_C^2}{2g}+z_C\right) \quad \text{soit} \quad \left(9{,}0+\frac{(30)^2}{2g}+0\right)=\left(\frac{69\,000}{1\,025\text{ g}}+\frac{V_C^2}{2g}+0\right)$$

d'où $V_C = 30{,}7$ m/s.

7.38 Une sphère est placée dans un courant d'air à la pression atmosphérique se déplaçant à la vitesse de 30,0 m/s. En considérant que la masse volumique de l'air est constante et vaut 1,23 kg/m^3, (*a*) calculer la pression d'arrêt et (*b*) la pression exercée en un point B de la surface de la sphère située à 75° du point d'arrêt, si la vitesse à cet endroit est de 66,0 m/s.

Solution

(*a*) En appliquant l'expression donnée au problème précédent, nous obtenons

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = 101\,300 + \frac{1}{2}(1{,}23)(30{,}0)^2 = 101\,300 + 553 = 101\,853 \text{ Pa}$$

(*b*) Le poids spécifique de l'air $= \rho g = 1{,}23(9{,}81) = 12{,}06$ N/m^3.
En appliquant l'équation de Bernoulli, du point d'arrêt au point B, on obtient

$$\left(\frac{p_s}{w}+\frac{V_s^2}{2g}+0\right)-0=\left(\frac{p_B}{w}+\frac{V_B^2}{2g}+0\right) \quad \text{soit} \quad \left(\frac{101\,850}{12{,}06}+0+0\right)=\left(\frac{p_B}{w}+\frac{(66{,}0)^2}{2g}+0\right)$$

d'où $p_B/w = 8\,230$ m d'air et $p'_B = wh = 12{,}06 \times 8\,230 = 99\,200$ Pa

7.39 Un grand réservoir est rempli d'ammoniac à la pression de 0,37 bar au manomètre, et à la température de 22 °C. L'ammoniac se répand dans l'atmosphère par une petite ouverture située sur le côté du réservoir. En négligeant les pertes dues au frottement, calculer la vitesse de l'ammoniac quittant le réservoir (*a*) en admettant que la densité est constante et (*b*) en admettant que les conditions de l'écoulement sont adiabatiques.

Solution

(*a*) Appliquer l'équation de Bernoulli du réservoir à l'atmosphère,

$$\left(\frac{0{,}37\times 10^5}{\rho_1 g}+0+0\right)=\left(0+\frac{V^2}{2g}+0\right) \quad \text{d'où} \quad \rho_1=\frac{p_1}{rT}=\frac{(0{,}37+1{,}013)10^5}{481{,}5(273+22)}=0{,}974\text{ kg/m}^3$$

Reportant et résolvant, $V = 273$ m/s.

Pour une masse volumique constante ρ, on peut utiliser des hauteurs de pression aussi bien absolues que manométriques. On *doit* absolument utiliser des hauteurs de pression absolues dans les cas où ρ n'est pas constante.

(*b*) Pour $V_1 = 0$ et $z_1 = z_2$, l'expression adiabatique (*D*) du problème 7.21 peut s'écrire

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] = \frac{V_2^2}{2g}$$

Pour l'ammoniac, $k = 1{,}32$ d'après la table 1 de l'annexe, et

$$\frac{1{,}32}{0{,}32} \times \frac{138\,300}{0{,}974 \times 9{,}81}\left[1-\left(\frac{1{,}013}{1{,}383}\right)^{0{,}242}\right] = \frac{V_2^2}{2g} = 4\,172 \quad \text{d'où} \quad V_2 = 285 \text{ m/s.}$$

L'erreur commise, en supposant que la densité est constante, est d'environ 4,2 %.

La masse volumique de l'ammoniac du jet se calcule en utilisant l'expression

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{1{,}383}{1{,}013} = \left(\frac{0{,}974}{\rho_2}\right)^{1{,}32} \quad \text{et} \quad \rho_2 = 0{,}774 \text{ kg/m}^3.$$

Malgré cette variation de 20,3 % en masse volumique, l'erreur sur la vitesse n'a été que de 4,2 %.

7.40 Comparer les vitesses en (*a*) et (*b*) du problème 7.39, pour une pression manometrique de 1,05 bar.

Solution

(*a*) $\rho_1 = \dfrac{p_1}{rT} = \dfrac{2{,}063 \times 10^5}{481{,}5 \times 295} = 1{,}452$ kg/m^3 et, d'après le problème précédent,

$$\frac{1{,}05 \times 10^5}{1{,}452\, g} = \frac{V^2}{2g} \quad \text{et} \quad V = 380 \text{ m/s.}$$

(*b*) En utilisant l'expression adiabatique donnée dans le problème précédent,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1{,}32}{0{,}32} \times \frac{(2{,}063)10^5}{1{,}452 \times 9{,}81}\left[1-\left(\frac{1{,}013}{2{,}063}\right)^{0{,}242}\right] = 9\,410 \quad \text{d'où} \quad V = 430 \text{ m/s.}$$

L'erreur commise en utilisant la vitesse calculée en supposant la masse volumique constante est d'environ 12 %. La variation de masse volumique dans ce cas est d'environ 41 %.

Les limitations imposées à la grandeur de la vitesse seront étudiées dans le chapitre 13. On doit remarquer que la vitesse limite pour la température considérée est de 430 m/s.

7.41 De l'azote circule d'un tuyau de 5,0 cm, où la température est de 4,5 °C et la pression de 2,75 bar dans un tuyau de 2,5 cm où la pression est de 1,47 bar. Calculer les vitesses dans chacun des tuyaux, en supposant qu'il n'y a pas de pertes et que les conditions sont isothermes.

Solution

Se reportant au problème 7.21, on peut résoudre l'équation (*C*) relative aux conditions isothermes en V_2, en notant que $z_1 = z_2$,

$$\frac{V_2^2}{2}\left[1-\left(\frac{A_2 p_2}{A_1 p_1}\right)^2\right] = \frac{p_1}{\rho_1}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = rT\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \quad \text{ou} \quad V_2 = \sqrt{2 \times \frac{rT\ln(p_1/p_2)}{1-(A_2 p_2/A_1 p_1)^2}}$$

Y reportant $r = 296{,}8$ pour l'azote relevé dans la table 1 de l'annexe,

$$V_2 = \sqrt{2 \times \frac{296{,}8 \times 277{,}5\ \ln(3{,}76/2{,}48)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 (3{,}76/2{,}48)^2}} = 265 \text{ m/s}$$

Ainsi,

$$V_1 = (A_2/A_1)(p_2/p_1)V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2{,}48}{3{,}76}\right)(265) = 43{,}8 \text{ m/s}$$

7.42 Dans le problème 7.41, la pression, la vitesse et la température dans le tuyau de 5 cm étant respectivement de 2,62 bar (man.) 43,5 m/s et 0 °C, calculer la vitesse et la pression dans le tuyau de 2,5 cm. Supposer qu'il n'y a pas de pertes et que les conditions sont isothermes.

Solution

D'après le problème 7.21, en utilisant l'équation (C) pour des conditions isothermes en fonction de V_1 au lieu de V_2 on a,

$$\frac{(43{,}5)^2}{2}\left[1 - \left(\frac{4}{1}\right)^2 \left(\frac{3{,}63 \times 10^5}{p_2}\right)^2\right] = 296{,}8 \times 273\ \ln \frac{p_2}{3{,}63 \times 10^5} \qquad (a)$$

Il n'y a qu'une seule inconnue, cependant la résolution directe est difficile. La méthode des approximations successives semble indiquée, en donnant une valeur à p_2 au dénominateur du crochet.

(1) Admettons que $p_2 = 3{,}63$ bar (abs.) et résolvons en fonction de p_2 dans le membre de droite de l'équation.

$$946[1 - 16(1)^2] = 81\,030\ \ln\left(\frac{p_2}{3{,}63 \times 10^5}\right)$$

d'où $p_2 = 3{,}05$ bar (abs.)

(2) Si on reportait $p_2 = 3{,}05$ bar dans (a) on aurait une inégalité. En anticipant sur le résultat, admettons que la nouvelle valeur de p_2 soit de 2,48 bar et résolvons,

$$946[1 - 16(3{,}63/2{,}48)^2] = 81\,030\ \ln(p_2/3{,}63 \cdot 10^5)$$

d'où $p_2 = 2{,}40$ bar (abs.). Pour la vitesse,

$$V_2 = \frac{w_1 A_1}{w_2 A_2} V_1 \quad \text{ou} \quad V_2 = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) V_1 = \frac{3{,}63 \times 10^5}{2{,}4 \times 10^5}\left(\frac{2}{1}\right)^2 \times 43{,}5 = 263 \text{ m/s}$$

Problèmes supplémentaires

7.43 Quelle est la vitesse moyenne de l'eau circulant dans une conduite de 15 cm qui produit un débit de 3 800 m^3/jour? *Rép.* 2,48 m/s.

7.44 De quelle taille doit être un tuyau destiné à transporter 2,36 m^3/s de fluide à une vitesse moyenne de 3 m/s? *Rép.* 1 m.

7.45 Un tuyau de 30 cm de diamètre qui transporte 110 l/s de fluide est relié à un tuyau de 15 cm. Trouver la hauteur de vitesse dans le tuyau de 15 cm. *Rép.* 1,97 m.

7.46 Un tuyau de 15 cm transporte 80 l/s d'eau. Le tuyau se ramifie en deux branches, l'une de 5 cm et l'autre de 10 cm de diamètre. Si la vitesse dans le tuyau de 5 cm est de 12 m/s, quelle est la vitesse dans le tuyau de 10 cm? *Rép.* 7,2 m/s.

7.47 Établir si les expressions suivantes des composantes de la vitesse vérifient les conditions de l'écoulement permanent isovolume,

(*a*) $u = 3xy^2 + 2x + y^2$ (*b*) $u = 2x^2 + 3y^2$

$v = x^2 - 2y - y^3$ $v = -3xy$

Rép. (*a*) Oui. (*b*) Non.

7.48 Un tuyau de 30 cm transporte de l'huile avec une distribution des vitesses donnée par $v = 30(r_0^2 - r^2)$. Calculer la vitesse moyenne et la valeur du coefficient de l'énergie cinétique. *Rép.* $\alpha = 2{,}00$. $V_m = 0{,}34$ m/s.

7.49 Montrer qu'on peut écrire l'équation de continuité sous la forme $1 = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V_m}\right) \mathrm{d}A$.

7.50 Un tuyau de 30 cm de diamètre transporte de l'huile de densité 0,812 à la vitesse de 110 l/s et la pression en un point *A* est de 0,196 bar (man.). Si le point *A* est situé à 1,80 m au-dessus du plan de référence, calculer l'énergie en *A* en J/N *Rép.* 4,27 J/N.

7.51 Combien de kg/s de gaz carbonique circulent dans un tuyau de 15 cm de diamètre quand la pression manométrique est de 1,72 bar, la température de 27 °C et la vitesse moyenne de 2,50 m/s? *Rép.* 0,213 kg/s.

7.52 De l'eau s'écoule, à la vitesse de 2,00 m/s, dans un tuyau de 200 mm de diamètre. Déterminer le débit volumique, pondéral et massique. *Rép.* 0,0628 m^3/s; 616 N/s; 62,8 kg/s.

7.53 Un tuyau de 20 cm de diamètre transporte de l'air à 24 m/s, à la pression absolue de 1,48 bar et à la température de 27 °C. Combien de kg d'air circulent? Le tuyau de 20 cm se rétrécit jusqu'à atteindre 10 cm et la pression et la température régnant dans le tuyau de 10 cm valent respectivement 1,304 bar (abs.) et 11 °C. Trouver la vitesse dans les deux tuyaux et comparer les débits en volume. *Rép.* 1,29 kg/s; 103 m/s; 0,75 m^3/s; 0,81 m^3/s.

7.54 De l'air circule à une vitesse de 4,88 m/s dans un tuyau de 10 cm. Un manomètre à pression donne 207 kPa et la température est de 16 °C. En un autre point en aval, la lecture du manomètre donne 138 kPa et la température est de 27 °C. Pour une pression atmosphérique normale, calculer la vitesse en aval et comparer les débits en volume dans les deux sections. *Rép.* 6,5 m/s; 40 l/s; 53 l/s.

7.55 De l'anhydride sulfureux circule dans un conduit de dégagement de 30 cm de diamètre qui se réduit à 10 cm lorsqu'il débouche dans une cheminée. Les pressions dans le conduit et dans le courant en aval sont respectivement de 1,38 bar (abs.) et de 1,01 bar (pression atmosphérique), la vitesse dans le conduit de 15,0 m/s et la température de 27 °C. Calculer la vitesse du courant en aval qui se dégage si la température du gaz est de −5 °C. *Rép.* 73 m/s.

7.56 Un gaz s'écoule à travers un conduit schématisé par la figure 7-19. À partir des données de la figure, déterminer le débit massique du gaz et sa masse volumique dans la section 2. *Rép.* 0,399 kg/s; 1,76 kg/m^3.

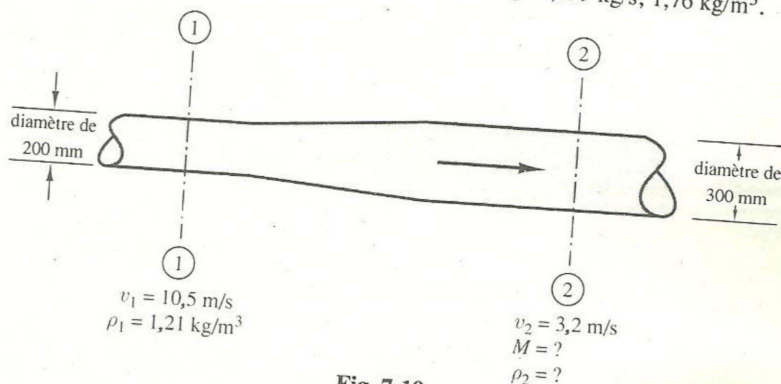


Fig. 7-19

7.57 De l'eau circule dans un tuyau horizontal de 15 cm de diamètre à la pression de 4,12 bar. En supposant qu'il n'y ait pas de pertes, quel est le débit en volume si en un endroit où le diamètre s'est rétréci de 7,5 cm, la pression est de 1,37 bar? *Rép.* $Q = 107$ l/s.

7.58 En remplaçant l'eau par de l'huile de densité 0,752 dans le problème 7-57, trouver le débit Q. *Rép.* 123 l/s.

7.59 En remplaçant l'eau par du tétrachlorure de carbone (densité 1,594) dans le problème 7-57, trouver le débit Q. *Rép.* 0,086 m^3/s.

7.60 De l'eau circule vers le haut dans un tuyau vertical de 300 mm de diamètre à la vitesse de 0,222 m^3/s. En un point A du tuyau, la pression est de 210 kPa. En B situé à 4,57 m au-dessus de A, le diamètre est de 600 mm et la perte de charge entre A et B est de 1,83 m. Calculer la pression en B. *Rép.* 152 kPa.

7.61 Un tuyau de 0,300 m de diamètre présente un court goulot d'étranglement où le diamètre se réduit progressivement à 15 cm pour s'élargir ensuite à 30 cm. La section de 15 cm est située à 60 cm au-dessous de la section A du tuyau de 30 cm où la pression est de 5,17 bar. Si on fixe un manomètre différentiel à mercure aux sections de 30 cm et de 15 cm, quelle sera la dénivellation du mercure quand le débit d'eau est de 120 l/s vers le bas? La perte de charge est négligeable. *Rép.* 0,16 m.

7.62 Un fluide s'écoule dans un tuyau de diamètre de 150 mm à la vitesse de 2,50 m/s. La pression du fluide vaut 35 kPa. La cote du centre du tuyau, au-dessus de la référence, est de 5,0 m. Déterminer la charge totale (H) du fluide si celui-ci est (*a*) de l'eau, (*b*) de l'ammoniac (liquide) ($d = 0,83$), (*c*) du gaz de poids volumique 12,5 N/m^3. *Rép.* (*a*) 8,89 m; (*b*) 9,63 m; (*c*) 2 805 m.

7.63 Un pipe-line de 0,305 m transporte de l'huile de pétrole de densité 0,811 à la vitesse de 24,4 m/s. Aux points A et B les mesures de la pression et de la hauteur ont été respectivement de 3,63 bar et 2,90 bar et de 30,5 m et 33,5 m. Pour un écoulement permanent, trouver la perte de charge entre A et B. *Rép.* 6,16 m.

7.64 Un courant d'eau, de 75 mm de diamètre débouche dans l'atmosphère à la vitesse de 24,4 m/s. Trouver la puissance du jet en kW en prenant comme plan de référence le plan passant par le centre du jet. *Rép.* 33 kW.

7.65 Un réservoir approvisionne en eau un tuyau de 0,152 m de diamètre et 244 m de long. La circulation s'effectue à tuyau plein et débouche dans l'atmosphère à la vitesse de 63,1 l/s. Quelle est la pression en bar à mi-chemin du tuyau, en admettant que la seule perte de charge soit de 1,89 m pour une longueur de 100 m de tuyau. *Rép.* 0,74 bar.

7.66 Un jet de vapeur de 100 mm de diamètre se détend horizontalement dans l'air, à partir d'une buse. Le débit est de 0,22 m^3/s. Déterminer la puissance du jet en le supposant au zéro des cotes. *Rép.* 86 kW.

7.67 De l'huile de densité 0,750 est pompée à partir d'un réservoir, par dessus une colline, au moyen d'un tuyau de 0,60 m de diamètre, la pression au sommet de la colline étant maintenue à 1,76 bar. Le sommet est à 76 m au-dessus de la surface du réservoir et l'huile est pompée à une vitesse de 620 l/s. Si la perte de charge du réservoir au sommet est de 4,8 m, quelle est la puissance en kW que la pompe doit fournir au liquide? *Rép.* 480 kW.

7.68 Une pompe aspire l'eau d'un puits par un tuyau vertical de 0,15 m. La pompe possède un tuyau de dégagement horizontal de 100 mm de diamètre qui se trouve à 3,20 m au-dessus du niveau de l'eau dans le puits. Tandis que le pompage s'effectue à la vitesse de 35 l/s, les manomètres placés près de la pompe à l'entrée et à la sortie indiquent $-0,32$ bar et 1,77 bar respectivement. Le manomètre de sortie est situé à 0,9 m au-dessus du manomètre d'entrée. Calculer la puissance (en kW) délivrée par la pompe et la hauteur de charge perdue dans le tuyau d'aspiration de 0,15 m. *Rép.* 8 kW; 0,7 m.

7.69 Calculer la perte de charge dans un tuyau de 15 cm s'il est nécessaire de maintenir une pression de 231 kPa en un point en amont et situé 1,83 m en dessous de l'endroit où le tuyau déverse de l'eau dans l'atmosphère à la vitesse de 55,6 l/s. *Rép.* 21,7 m.

7.70 Un vaste réservoir est partiellement rempli d'eau, l'espace de l'air au-dessus étant sous pression. Un tuyau, de 5 cm, relié au réservoir, débouche sur le toit d'un immeuble situé à 15 m au-dessus du niveau du réservoir. La perte de

charge due au frottement est de 5,5 m. Quelle est la pression de l'air à maintenir dans le réservoir pour déverser 12 l/s sur le toit? *Rép.* 2,2 bar.

7.71 De l'eau circule, dans un tuyau, de la section 1 à la section 2 (figure 7-20). Compte tenu des données, déterminer la vitesse du courant et la pression du fluide au niveau de la section 2. On supposera que la perte de charge totale entre les deux sections est de 3,00 m. *Rép.* 8,00 m; 260 kPa.

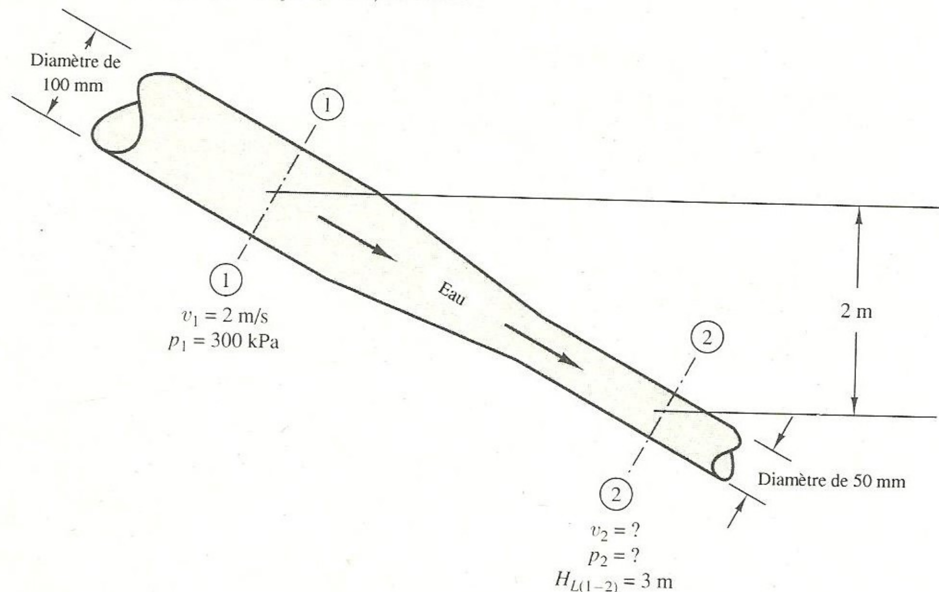


Figure 7-20

7.72 On pompe de l'eau d'un réservoir *A* à la cote 225 m au réservoir *E* de cote 240 m au moyen d'une conduite de 30 cm. La pression dans le tuyau de 30 cm au point *D*, à la cote 195 m est de 5,49 bar. Les pertes de charge sont : de *A* à l'entrée *B* de la pompe : 0,60 m, de la sortie de la pompe *C* à *D* : $38V^2/2g$ et de *D* à *E* : $40V^2/2g$. Trouver le débit *Q* et la puissance en kW fournie par la pompe *BC*. *Rép.* 0,166 m³/s; 61 kW.

7.73 Un tube de Venturi horizontal a respectivement pour diamètres à l'entrée et au col 60 cm et 45 cm. Un manomètre différentiel relié à l'entrée et au col contient de l'eau qui subit une dénivellation de 10 cm quand de l'air circule dans l'appareil. Admettant que la masse volumique de l'air est constante et vaut 1,28 kg/m³ et négligeant les frottements, calculer le débit en m³/s. *Rép.* 7,8 m^3/s.

7.74 De l'eau est siphonée à partir d'un réservoir à la vitesse de 0,089 2 m³/s. L'extrémité de déversement du tuyau du siphon doit être située à 4,27 m au-dessous de la surface de l'eau. Les termes représentant la perte de charge sont 1,50 $V^2/2g$ du réservoir au sommet du siphon et de 1,00 $V^2/2g$ du sommet à l'extrémité du siphon. Le sommet est à 1,52 m au-dessus de la surface de l'eau. Trouver la taille du tuyau nécessaire et la pression au sommet. *Rép.* 0,150 m; − 0,45 kPa.

7.75 Un tuyau horizontal de 60 cm transporte de l'huile de pétrole de densité 0,825 circulant à la vitesse de 400 l/s. Les quatre pompes nécessaires le long de la ligne sont pareilles, c'est-à-dire que les pressions du côté entrée et du côté sortie sont respectivement de −0,55 bar et 24,0 bar. Si la perte de charge à la sortie est de 6,00 m pour 1 000 m de tuyau, à quelle distance l'une de l'autre doit-on placer les pompes? *Rép.* 50,6 km.

7.76 De l'huile, de densité 0,87, circule dans le tuyau décrit dans la figure 7-21; la pression au point 1 est de 500 kPa. Sachant que la perte de charge entre 1 et 2 est de 5,00 m d'huile et que le débit est de 0,050 m³/s, déterminer la pression au point 2. *Rép.* 721 kPa.

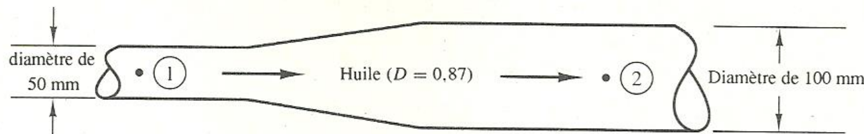


Fig. 7-21

7.77 Un vaste réservoir fermé est rempli d'air à la pression de 0,392 bar et à la température de 18 °C. L'air s'écoule dans l'atmosphère (1,013 bar) par une petite ouverture aménagée sur le côté du réservoir. En négligeant les pertes dues au frottement, calculer la vitesse de l'air quittant le réservoir en admettant (*a*) que la masse volumique de l'air est constante et (*b*) que les conditions de l'écoulement sont adiabatiques. *Rép.* 216 m/s, 229 m/s.

7.78 Dans le problème 7.77 si la pression avait été de 0,686 bar (man.), quelle aurait été la vitesse trouvée en (*a*) et (*b*)? *Rép.* 260 m/s, 286 m/s.

7.79 Du gaz carbonique circule dans un tuyau de 25 mm de diamètre, où la pression au manomètre est de 414 kPa et la température de 4 °C puis dans un tuyau de 12,5 mm de diamètre à la cadence de 0,0272 kg/s. En négligeant le frottement et en supposant les conditions isothermes, calculer la pression régnant dans le tuyau de 12,5 mm. *Rép.* 19,2 kPa (abs.).

7.80 Une soufflerie doit fournir 19 m^3/s. Deux manomètres en U mesurent les pressions d'entrée et de sortie. Le manomètre d'entrée indique une pression négative de 5 cm d'eau. Le manomètre de sortie, situé à 0,9 m au-dessus du point où le manomètre d'entrée est fixé, indique +7,5 cm d'eau. Les conduits d'entrée et de sortie sont de même diamètre. Quelle doit être la puissance du moteur utilisé si le rendement d'ensemble est de 68 % ($\rho_{air} = 1{,}20$ kg/m^3)? *Rép.* 35 kW.

7.81 Une buse est connectée à un tuyau, comme l'indique la figure 7-22. Déterminer la vitesse du jet d'eau dans les conditions décrites. On supposera la perte de charge dans le jet négligeable. *Rép.* 32,7 m/s.

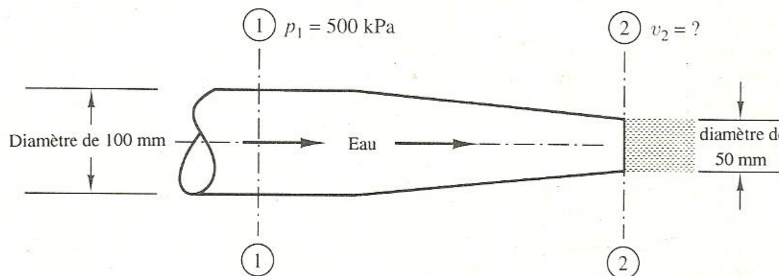


Fig. 7-22

7.82 Un tuyau de 0,305 m est en cours d'essai pour évaluer la perte de charge. Quand le débit d'eau est de 0,18 m^3/s la pression en un point *A* du tuyau est de 2,75 bar. Un manomètre différentiel est fixé au tuyau en *A* et en un point *B*, en aval, situé à 3,05 m au-dessus de *A*. La dénivellation du mercure du manomètre est de 1,01 m, indiquant une pression plus grande en *A*. Quelle est la perte de charge de *A* en *B*? *Rép.* 12,8 m.

7.83 Prandtl a suggéré qu'on pouvait évaluer approximativement la distribution des vitesses de l'écoulement turbulent dans les conduites par la formule $v = v_{max}(y/r_0)^{1/7}$ où r_0 désigne le rayon du tuyau et y la distance de la ligne de courant à la paroi du tuyau. Déterminer l'expression de la vitesse moyenne dans le tuyau en fonction de la vitesse au centre v_{max}. *Rép.* $V = 0{,}817 v_{max}$.

7.84 Quel est le facteur de correction de l'énergie cinétique pour la distribution des vitesses du problème 7.83? *Rép.* $\alpha = 1{,}06$.

7.85 Deux grandes plaques planes sont à 10 mm l'une de l'autre. Montrer que $\alpha = 1{,}43$ si la distribution des vitesses est représentée par $v = v_{max}(1 - 6\,200 r^2)$ où r est la distance de la ligne de courant à la ligne médiane des plaques.

7.86 De l'air circule de manière isentropique dans un conduit de section variable. Pour un écoulement permanent, montrer que la vitesse V_2 en toute section en aval de la section 1 peut s'écrire :

$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{1/k}(A_1/A_2) \quad \text{pour un conduit de toute forme}$$
$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{1/k}(D_1/D_2)^2 \quad \text{pour un conduit de forme circulaire}$$

7.87 On doit distribuer de l'eau d'un réservoir, vers un niveau inférieur, à travers un tuyau qui débouche à l'air libre (figure 7-23). À l'aide des données de la figure, trouver la différence de cote entre la surface de l'eau et le point à l'air libre. *Rép.* 12,1 m.

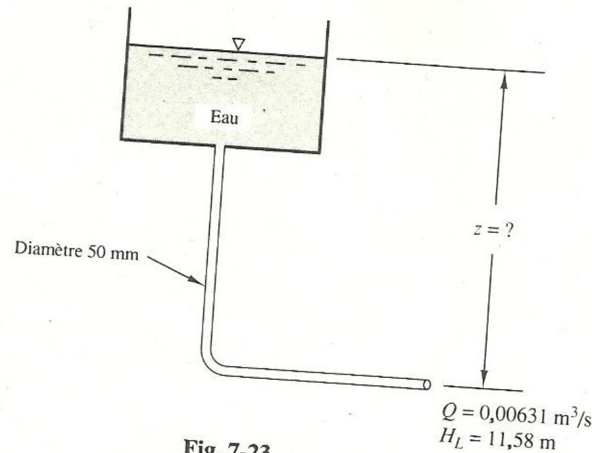


Fig. 7-23

7.88 La pression à l'intérieur du tuyau en S ne doit pas tomber en dessous de 23,9 kPa (abs.). En négligeant les pertes, à quelle hauteur au-dessus du niveau de l'eau A le point S doit-il être placé? Se reporter à la figure 7-24. *Rép.* 6,7 m.

7.89 La pompe B fournit une hauteur de charge de 42,85 m à l'eau circulant vers E comme le montre la figure 7-25. Si la pression en C est de $-0,138$ bar et si la perte de charge de D à E est de $2,44(V^2/2g)$, quel est le débit? *Rép.* 0,252 m³/s.

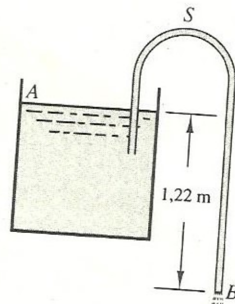


Fig. 7-24

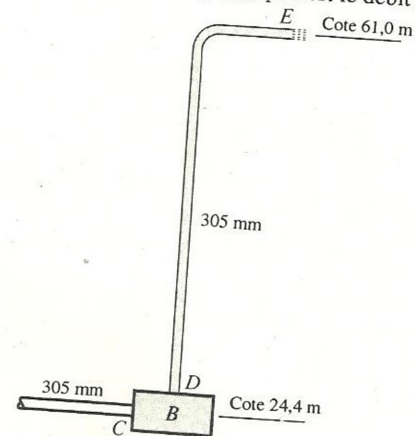


Fig. 7-25

7.90 De l'eau s'écoule radialement entre deux disques situés à l'extrémité d'un tuyau de 15,2 cm de diamètre comme le montre la figure 7-26. En négligeant les pertes, si la pression en A est de $-0,305$ m, trouver la hauteur de pression en B et le débit. *Rép.* $-0,046$ m; 0,11 m³/s.

7.91 Le tuyau représenté sur la figure 7-27 a une section uniforme de diamètre égal à 150 mm. En supposant les pertes de charge entre les points 1 et 2 puis 2 et 3, respectivement égales à 1,2 m et 2,0 m, déterminer le débit d'eau et la pression au point 2. *Rép.* 0,102 m³/s; $-40,11$ kPa.

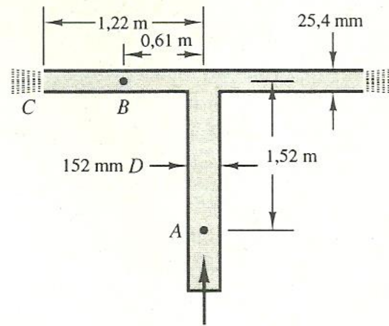


Fig. 7-26

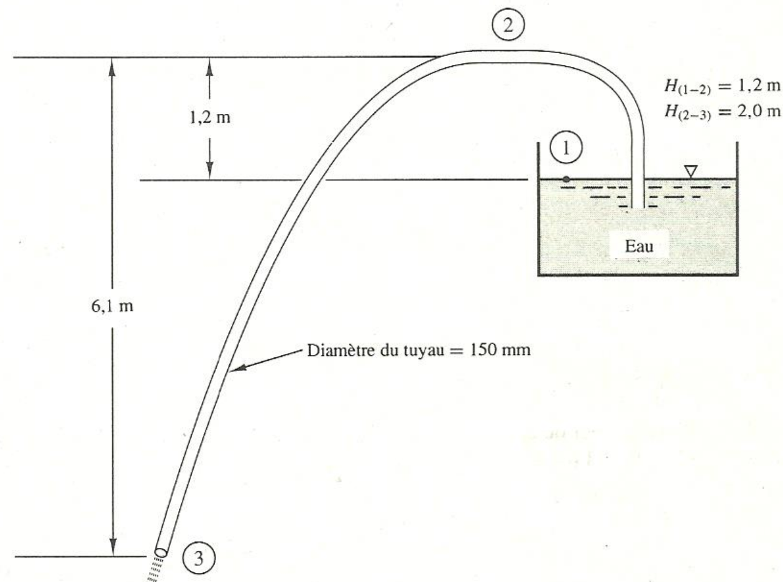


Fig. 7-27

7.92 Montrer que la vitesse moyenne V dans un tuyau circulaire de rayon r_0 est égale à $2v_{\max}\left[\dfrac{1}{(K+1)(K+2)}\right]$ pour une distribution de vitesses qu'on peut exprimer par $v = v_{\max}(1 - r/r_0)^k$.

7.93 Calculer le facteur de correction de l'énergie cinétique α dans le problème 7.92. *Rép.* $\alpha = \dfrac{(K+1)^3(K+2)^3}{4(3K+1)(3K+2)}$

Chapitre 8

Écoulement dans les conduits fermés

INTRODUCTION

Dans différents domaines relevant de la compétence de l'ingénieur, on applique l'équation de l'énergie pour résoudre les problèmes techniques d'écoulement. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. Des forces de cisaillement, dues à la viscosité du fluide, s'exercent entre les particules de fluide et les parois de l'enceinte, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Les équations aux dérivées partielles qui pourraient décrire l'écoulement (équation d'Euler) n'ont pas de solution générale. Ainsi doit-on, pour résoudre les problèmes d'écoulement, utiliser les résultats expérimentaux et des méthodes semi-empiriques.

Il y a deux types d'*écoulement permanent* pour des fluides réels et on doit envisager chacun d'eux. On les appelle *écoulement laminaire* et *écoulement turbulent*.

ÉCOULEMENT LAMINAIRE

Dans l'écoulement laminaire, les particules du fluide se déplacent en lignes droites parallèles disposées en couches, ou lamelles. Les grandeurs des vitesses de lamelles adjacentes ne sont pas les mêmes. L'écoulement laminaire obéit à la loi reliant la contrainte tangentielle visqueuse au taux de déformation angulaire, c'est-à-dire au produit de la viscosité du fluide par le gradient des vitesses, soit $\tau = \dfrac{\mu\, \mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (voir chapitre 1). La viscosité du fluide domine et supprime ainsi toute évolution vers des conditions de turbulence.

VITESSE CRITIQUE

La vitesse critique présente un intérêt pratique pour l'ingénieur, c'est la vitesse en dessous de laquelle toute turbulence est amortie par la viscosité du fluide. On trouve que la limite supérieure, pour tout écoulement laminaire d'intérêt pratique, correspond à une valeur du nombre de Reynolds d'environ 2 000.

NOMBRE DE REYNOLDS

Le nombre de Reynolds, qui est sans dimension, représente le rapport des forces d'inertie aux forces de frottement visqueux (voir le chapitre 6 sur la similitude dynamique).

Pour des tuyaux circulaires pleins,

$$\text{nombre de Reynolds } R_E = \frac{V d \rho}{\mu} \text{ ou } \frac{V d}{\nu} = \frac{V(2r_o)}{\nu} \qquad (1a)$$

où V = vitesse moyenne en m/s.
d = diamètre du tuyau en m, r_0 = rayon du tuyau en m
ν = viscosité cinématique du fluide en m²/s.
ρ = masse volumique de fluide en kg/m³.
μ = viscosité absolue en Pa · s.

Pour des sections non circulaires, le rapport de la surface de la section droite au périmètre mouillé, appelé rayon hydraulique R (en m) intervient dans l'expression du nombre de Reynolds. L'expression s'écrit

$$R_E = \frac{V(4R)}{\nu} \tag{1b}$$

ÉCOULEMENT TURBULENT

Dans l'écoulement turbulent, les particules de fluide se déplacent dans toutes les directions au hasard. Il est impossible de décrire le mouvement d'une particule.

On peut exprimer la contrainte tangentielle visqueuse pour l'écoulement turbulent sous la forme

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{dv}{dy} \tag{2a}$$

où η (êta) est un facteur dépendant de la densité du fluide et de son mouvement. Le premier facteur (μ) représente l'effet de l'action de la viscosité et le deuxième facteur (η) celui de l'action de turbulence.

Les résultats expérimentaux donnent un moyen d'établir l'expression de la contrainte tangentielle visqueuse en écoulement turbulent. Prandtl a proposé comme équation valable de la contrainte tangentielle visqueuse en écoulement turbulent :

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{2b}$$

Cette expression a un désavantage : la longueur au-delà de laquelle il y a mélange l est fonction de y. Plus grande est la distance y de la paroi du tuyau, plus grande est la valeur de l. Plus tard, Von Karman proposera :

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{r_0}\right) = \rho k^2 \frac{(dv/dy)^4}{(d^2v/dy^2)^2} \tag{2c}$$

où k n'est pas précisément constant, ce nombre sans dimension valant à peu près 0,40. En intégrant cette expression, on obtient les formules du type représenté par (*7b*) ci-après.

CONTRAINTE TANGENTIELLE VISQUEUSE À LA PAROI DU TUYAU

La contrainte tangentielle visqueuse à la paroi du tuyau telle qu'elle sera établie dans le problème 8.5 s'écrit :

$$\tau_0 = \frac{f\rho V^2}{8} \text{ en Pa} \tag{3}$$

où f est un coefficient de frottement sans dimension (décrit dans un prochain paragraphe).

On montrera dans le problème 8.4 que la variation de la contrainte tangentielle visqueuse en une section droite est linéaire et que

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)}{2L} r \quad \text{ou} \quad \tau = \left(\frac{wh_L}{2L}\right) r \tag{4}$$

Le terme $\sqrt{\tau_0/\rho}$ s'appelle la *vitesse de viscosité* ou *vitesse de frottement*, et on la désigne par le symbole v_*. D'après l'expression (*3*), nous obtenons

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V\sqrt{\frac{f}{8}} \tag{5}$$

DISTRIBUTION DES VITESSES

La distribution des vitesses en une section droite suit une loi de variation parabolique pour un écoulement *laminaire*. La vitesse maximale est atteinte au centre du tuyau et vaut deux fois la vitesse moyenne. L'équation du profil des vitesses pour l'écoulement laminaire (voir le problème 8.6) peut s'exprimer

$$v = v_c - \left(\frac{wh_L}{4\mu L}\right) r^2 \tag{6}$$

Pour les écoulements turbulents, on a des distributions de vitesses plus uniformes. D'après les expériences de Nikuradse et d'autres chercheurs, les équations des profils des vitesses en fonction de la vitesse centrale v_c ou de la vitesse de frottement v_* sont les suivantes.

(*a*) On a la formule empirique

$$v = v_c(y/r_0)^n \tag{7a}$$

où $n = \frac{1}{7}$ pour des tuyaux lisses, jusqu'à $R_E = 100\,000$

$n = \frac{1}{8}$ pour des tuyaux lisses, pour R_E compris entre 100 000 et 400 000.

(*b*) Pour des tuyaux *lisses*,

$$v = v_*(5{,}5 + 5{,}75 \log \frac{yv_*}{\nu}) \tag{7b}$$

Pour le terme $\frac{yv_*}{\nu}$, voir le problème 8.8, partie (*e*).

(*c*) Pour des tuyaux *lisses* (et $5000 < R_E < 3\,000\,000$), et pour la partie totalement rugueuse des tuyaux,

$$(v_c - v) = -2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{y}{r_0} = -2{,}5 v_* \ln \frac{y}{r_0} \tag{7c}$$

En fonction de la vitesse moyenne V, Vennard a proposé que $\frac{V}{v_c}$ pouvait s'écrire

$$\frac{V}{v_c} = \frac{1}{1 + 4{,}07\sqrt{\frac{f}{8}}} \tag{8}$$

(*d*) Pour les tuyaux *rugueux*

$$v = v_*(8{,}5 + 5{,}75 \log \frac{y}{\varepsilon}) \tag{9a}$$

où ε est la rugosité absolue de la paroi.

(*e*) Pour des parois *rugueuses* ou *lisses*

$$\frac{v - V}{V\sqrt{f}} = 2 \log \frac{y}{r_0} + 1{,}32 \tag{9b}$$

De même

$$\frac{v_c}{V} = 1{,}43\sqrt{f} + 1 \tag{9c}$$

PERTE DE CHARGE POUR L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE

L'expression de la perte de charge pour l'écoulement laminaire est donnée par l'équation de Hagen-Poiseuille. Cette expression est :

$$\text{perte de charge (m)} = \frac{32\ (\text{viscosité } \mu)(\text{longueur } L \text{ m})(\text{vitesse moyenne } V)}{(\text{poids volumique } w)(\text{diamètre } d \text{ m})^2}$$

$$= \frac{32\mu L V}{w d^2} \qquad (10a)$$

En fonction de la viscosité, nous obtenons, puisque $\mu / w = \nu / g$,

$$\text{Perte de charge} = \frac{32\nu L V}{g d^2} \qquad (10b)$$

FORMULE DE DARCY-WEISBACH

La formule de Darcy-Weisbach, telle qu'elle a été établie dans le chapitre 6, problème 6.1 constitue le fondement à partir duquel on évalue la perte de charge pour l'écoulement des fluides dans les tuyaux et conduits. L'équation est :

$$\text{Perte de charge (m)} = \text{coefficient de frottement } f \times \frac{\text{longueur } L \text{ (m)}}{\text{diamètre } d \text{ (m)}} \times \text{hauteur due à la vitesse } \frac{V^2}{2g} \text{ (m)}$$

$$= f \, \frac{L V^2}{d 2g} \qquad (11)$$

Comme on l'a remarqué dans le chapitre 7, la hauteur due à la vitesse exacte en une section s'obtient en multipliant la vitesse moyenne au carré $(Q/A)^2$ par le coefficient α et en divisant le produit ainsi obtenu par $2g$. Pour un écoulement turbulent dans des tuyaux et des conduits, on peut considérer que α est égal à un, sans commettre d'erreur appréciable dans les résultats.

COEFFICIENT DE FROTTEMENT

On peut calculer mathématiquement le coefficient de frottement f pour l'écoulement laminaire, mais on ne dispose d'aucune expression mathématique simple de la relation entre f et le nombre de Reynolds pour le cas de l'écoulement turbulent. De plus, Nikuradse et d'autres chercheurs se sont aperçus que la rugosité relative du tuyau (le rapport de la taille des aspérités de surface ε au diamètre intérieur du tuyau) influait aussi sur la valeur de f.

(*a*) Pour l'écoulement *laminaire*, l'équation (*10b*) ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :

$$\text{Perte de charge} = 64 \, \frac{\nu}{V d} \, \frac{L}{d} \, \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{R_E} \, \frac{L}{d} \, \frac{V^2}{2g} \qquad (12a)$$

Ainsi, pour l'écoulement laminaire dans tous les tuyaux et pour tous les fluides, la valeur de f est

$$f = \frac{64}{R_E} \qquad (12b)$$

R_E a pratiquement pour valeur maximale 2 000 pour l'écoulement laminaire.

(*b*) Pour l'écoulement *turbulent*, beaucoup d'ingénieurs en hydraulique ont essayé d'exprimer f à partir des résultats de leurs propres expériences et de celles des autres.

(*1*) Pour l'écoulement turbulent dans des *tuyaux rugueux et lisses*, on peut établir des lois de résistance universelles à partir de

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho V^2} = \frac{8V_*^2}{V^2} \qquad (13)$$

(*2*) Pour des tuyaux *lisses*, Blasius a proposé pour des nombres de Reynolds compris entre 3 000 et 100 000

$$f = \frac{0,316}{R_E^{0,25}} \qquad (14)$$

Pour des valeurs de R_E allant jusqu'à environ 3 000 000, l'équation de Von Karman modifiée par Prandtl, est

$$1/\sqrt{f} = 2\ \log(R_E\sqrt{f}) - 0,8 \qquad (15)$$

(*3*) Pour des tuyaux *rugueux*,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\ \log\frac{r_0}{\varepsilon} + 1,74 \qquad (16)$$

(*4*) Pour tous les tuyaux, l'Institut d'hydraulique des U.S.A. et la plupart des ingénieurs considèrent l'équation de Colebrook comme la plus acceptable pour calculer f. Cette équation est

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\ \log\left[\frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{R_E\sqrt{f}}\right] \qquad (17)$$

L'équation (*17*) étant difficile à résoudre, on dispose de diagrammes permettant de lire la relation entre le coefficient de frottement f, le nombre de Reynolds R_E et la rugosité relative ε/d. On a donné deux diagrammes de ce genre dans l'annexe. On se sert en général du diagramme A-1 (le diagramme de Moody, publié avec la permission de l'American Society of Mechanical Engineers) quand on connaît le débit Q, et du diagramme A-2 quand on a à le calculer. La dernière forme a été proposée pour la première fois par S.P. Johnson et par Hunter Rouse.

On doit remarquer que pour les tuyaux lisses où la valeur ε/d est très petite, le premier terme de la parenthèse de (*17*) est négligeable; dans ce cas, (*17*) et (*15*) sont identiques. De manière analogue, quand le nombre de Reynolds R_E est très grand, le second terme de la parenthèse de (*17*) est négligeable, dans ces cas-là, l'effet de la viscosité est négligeable, et f dépend de la rugosité relative du tuyau. Cette proposition a son interprétation graphique sur le diagramme A-1 en ce sens que les courbes deviennent horizontales pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Avant d'utiliser les formules ou les diagrammes, l'ingénieur devra évaluer la rugosité relative du tuyau d'après sa propre expérience et (ou) celle des autres. On a inscrit sur les diagrammes A-1 et A-2 les valeurs à prendre pour la hauteur des aspérités de surface ε quand il s'agit de surfaces neuves.

PERTES DE CHARGES MINEURES

Les autres pertes de charge sont généralement cataloguées de «mineures». Elles proviennent d'un changement significatif des lignes de courant; elles se produisent donc lors de contractions et d'élargissements (brutaux ou graduels) des veines de courant dans les vannes, les aménagements, les coudes etc., à l'entrée ou à la sortie d'un conduit. Dans certains cas, cette perte «mineure» peut être importante.

Les *pertes* dues à l'*entrée* se produisent lorsque le liquide, provenant d'un grand réservoir, entre dans un conduit; la perte dépend notablement de la forme du circuit d'entrée. Si l'entrée est bien arrondie, les pertes

(d'entrées) sont infimes. Les *pertes* dues à la *sortie* se produisent lorsque le liquide débouche d'un tuyau dans un grand réservoir. Des *pertes* de *contraction soudaine* et d'*expansion soudaine* existent aussi lorsque la section du conduit varie rapidement. On peut encore observer des *pertes* dues à une *expansion* ou *(contraction) graduelle* lors d'une variation lente de la section du conduit.

L'étude théorique de ces diverses pertes mineures est très complexe, on les évalue empiriquement. Elles sont habituellement exprimées en fonction de la hauteur due à la vitesse $(V^2/2g)$

$$\text{perte de charge (en m)} = K\left(\frac{V^2}{2g}\right) \qquad (18)$$

Les tables 4 et 5 de l'annexe donnent les valeurs du coefficient K utilisé dans l'équation (*18*), dans les problèmes impliquant des pertes de charge mineures.

ÉQUATIONS EMPIRIQUES APPLICABLES À UN COURANT D'EAU

Plusieurs formules empiriques peuvent être utilisées pour la résolution approchée de problèmes concernant l'écoulement d'eau dans des conduits fermés. On envisage ici deux formules : celle de Hazen-Williams et celle de Manning.

La *formule* de *Hazen-Williams* est la suivante :

$$V = 0{,}849\,2\,CR^{0,63}S^{0,54} \quad \text{(en unités S.I.)} \qquad (19)$$

où V : vitesse par seconde,
R : rayon hydraulique en mètre, défini plus haut au chapitre 7,
C : coefficient de rugosité de Hazen-Williams,
S : pente de la ligne de charge (perte de charge par unité de longueur du conduit).

On donne quelques valeurs courantes du coefficient de rugosité de Hazen-Williams dans la table 6.

La *formule de Manning* est la suivante :

$$V = \left(\frac{1{,}0}{n}\right) R^{2/3}S^{1/2} \quad \text{(en unités S.I.)} \qquad (20)$$

où V, R et S définis comme précédemment,
n est le coefficient de rugosité de Manning.

La table 9 fournit quelques valeurs caractéristiques de n.

On peut se servir des deux formules (*19*) et (*20*) pour l'étude de débit dans les conduits fermés. La première a été utilisée lors de la conception de systèmes d'alimentation en eau, aux États-Unis. La formule de Manning est généralement moins employée pour calculer les flux dans les conduits fermés; elle l'est davantage pour les conduits ouverts (chapitre 10). Les deux formules ont leurs avantages et leurs inconvénients. On ne peut les utiliser que pour des courants d'eau à la température ordinaire, la viscosité n'étant pas prise en compte. Elles ne sont applicables qu'aux courants hautement turbulents (nombre de Reynolds élevé).

DIAGRAMMES RELATIFS AUX CONDUITS

Avant l'utilisation des ordinateurs et des calculatrices, les calculs effectués à partir des formules d'Hazen-Williams et de Manning, étaient fastidieux à cause de leurs exposants. Pour faciliter les analyses de conduit, on a créé des graphiques, des tables, des diagrammes, etc. De nos jours, de tels calculs sont simples grâce aux possibilités de calcul moderne. Néanmoins, les diagrammes, les graphiques etc. peuvent être utiles si l'on cherche des solutions rapides. (Exemple : «la détermination des conduits équivalents», chapitre 9.)

Le diagramme B-1 et le diagramme B-2 se rapportent à la formule de Hazen-Williams pour deux valeurs du coefficient de rugosité ($C = 100$ et $C = 120$), le diagramme B-3 est relatif à la formule de Manning pour $n = 0{,}013$.

On souligne, de nouveau, que l'utilisation des formules (*19*) et (*20*) est limitée aux problèmes traitant de courant d'eau aux températures ordinaires et avec un nombre de Reynolds élevé. Elles s'appliquent seulement aux conduits circulaires fonctionnant à plein régime.

Problèmes résolus

8.1 Déterminer la vitesse critique (*a*) pour du fuel moyen à 15 °C circulant dans un tuyau de 15 cm de diamètre et (*b*) pour de l'eau à 15 °C circulant dans le même tuyau.

Solution

(*a*) Pour l'écoulement laminaire, la valeur maximale du nombre de Reynolds est 2 000. D'après la table 2 de l'annexe, la viscosité cinématique à 15 °C est $4{,}47 \times 10^{-6}$ m²/s.

$$2\,000 = R_E = \frac{V_C d}{\nu} = V_C(0,15)(4,47 \times 10^{-6})$$

d'où $V_C = 0{,}059$ m/s.

(*b*) D'après la table 2, $\nu = 1,142 \times 10^{-6}$ m²/s, pour l'eau à 15 °C.

$$2\,000 = V_C(0,15)/(1,13 \times 10^{-6})$$

d'où $V_C = 0{,}015$ m/s.

8.2 Déterminer le type de l'écoulement ayant lieu dans un tuyau de 305 mm quand (*a*) de l'eau à 15,6 °C circule à la vitesse de 1,067 m/s et (*b*) du fuel-oil lourd à 15,6 °C et circule avec la même vitesse.

Solution

(*a*) $R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{1{,}067(0{,}305)}{1{,}130 \times 10^{-6}} = 288\,000 > 2\,000$. L'écoulement est turbulent.

(*b*) D'après la table 2 de l'annexe, $\nu = 2{,}05 \times 10^{-4}$ m²/s.
$R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{1{,}067(0{,}305)}{(2{,}05 \times 10^{-4})} = 1\,590 < 2\,000$. L'écoulement est laminaire.

8.3 Pour que les conditions soient celles de l'écoulement laminaire, quelle doit être la taille d'un tuyau, s'il doit transporter du fuel-oil moyen à 4,4 °C à un rythme de $5{,}67 \times 10^{-3}$ m³/s ($\nu = 6{,}08 \times 10^{-6}$ m²/s)?

Solution

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 22{,}68\,\frac{10^{-3}}{\pi d^2}\ \text{m/s}.$$

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} \quad \text{donc} \quad 2\,000 = \frac{22{,}68 \times 10^{-3}}{\pi d^2}\left(\frac{d}{6{,}08 \times 10^{-6}}\right)$$

d'où $d = 0{,}59$ m. Utiliser le tuyau normalisé de diamètre immédiatement supérieur (600 mm).

8.4 Déterminer la distribution de la contrainte tangentielle visqueuse à la section droite d'un tuyau circulaire horizontal, dans des conditions d'écoulement permanent.

Solution

(*a*) Pour le système en équilibre représenté dans la figure 8-1(*a*), puisque l'écoulement est permanent, chaque particule se déplace vers la droite sans accélération. Ainsi la somme des forces agissant dans la direction x doit être nulle.

$$p_1(\pi r^2) - p_2(\pi r^2) - \tau(2\pi r L) = 0 \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L} \tag{A}$$

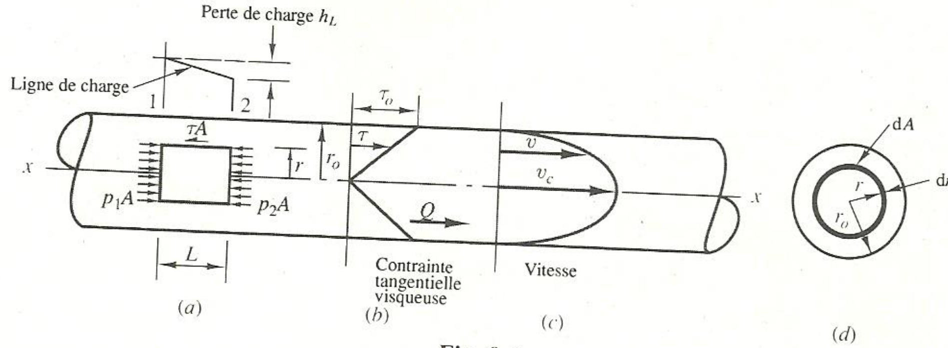


Fig. 8-1

Quand $r = 0$, la contrainte tangentielle visqueuse τ est nulle, et quand $r = r_0$, la contrainte τ_0 à la paroi est maximale. La variation est linéaire ainsi qu'on l'a représentée sur la figure 8-1(*b*). L'équation A est valable en écoulement laminaire et turbulent, puisque aucune restriction n'a été imposée à la nature de cet écoulement au cours de l'établissement de la formule.

Puisque $\frac{(p_1 - p_2)}{w}$ représente la chute de la ligne de charge, ou la perte de charge h_L, multipliant l'équation (A) par w/w, on obtient

$$\tau = \frac{wr}{2L}\left(\frac{p_1 - p_2}{w}\right) \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{wh_L}{2L}\,r \tag{B}$$

8.5 Établir l'expression de la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi du tuyau.

Solution

D'après le problème 8.4, $h_L = \frac{2\tau_0 L}{wr_0} = \frac{4\tau_0 L}{wd}$. La formule de Darcy-Weisbach est $h_L = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g}$.
En égalant ces expressions, on obtient :

$$\frac{4\tau_0 L}{wd} = f\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} \quad \text{et} \quad \tau_0 = f\,\frac{w}{g}\,\frac{V^2}{8} = \frac{f\rho V^2}{8}$$

8.6 Pour un écoulement permanent laminaire, (*a*) quelle est la relation entre la vitesse en un point de la section droite et celle du centre du tuyau, et (*b*) quelle est l'équation donnant la distribution des vitesses ?

Solution

(*a*) Pour l'écoulement laminaire, la contrainte tangentielle visqueuse (voir le chapitre 1) est $\tau = -\mu\left(\frac{dv}{dr}\right)$. En égalant cette expression avec la valeur de τ donnée par l'équation (A) du problème 8.4, nous obtenons

$$-\mu\,\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L}$$

Puisque $\dfrac{(p_1 - p_2)}{L}$ n'est pas fonction de r,

$$-\int_{v_c}^{v} \mathrm{d}v = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}\int_0^r r\,\mathrm{d}r \quad \text{et} \quad -(v - v_c) = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L}$$

ou

$$v = v_c - \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L} \qquad (A)$$

Mais la perte de charge sur L (mètres) est $h_L = \dfrac{(p_1 - p_2)}{w}$, ainsi

$$v = v_c - \frac{w h_L r^2}{4\mu L} \qquad (B) \text{ et } (6)$$

(*b*) Puisque la vitesse au bord est nulle, quand $r = r_0$, $v = 0$ dans (*A*) et nous avons

$$v_c = \frac{(p_1 - p_2)r_0^2}{4\mu L} \quad \text{(sur la ligne médiane)} \qquad (C)$$

Ainsi, en général,

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}(r_0^2 - r^2) \qquad (D)$$

8.7 Établir l'expression de la perte de charge dans un tuyau pour l'écoulement laminaire permanent d'un fluide incompressible. Se reporter à la figure 8-1 (*d*) du problème 8.4.

Solution

$$V_\mathrm{m} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A} = \frac{\int_0^{r_0} v(2\pi r\,\mathrm{d}r)}{\pi r_0^2} = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{\pi r_0^2(4\mu L)}\int_0^{r_0}(r_0^2 - r^2)r\,\mathrm{d}r$$

d'où

$$V_\mathrm{m} = \frac{(p_1 - p_2)r_0^2}{8\mu L} \qquad (A)$$

Ainsi pour l'écoulement laminaire, la vitesse moyenne vaut la moitié de la vitesse maximale v_c de l'équation (*C*) du problème 8.6. Réarrangeant (*A*), nous obtenons :

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{perte de charge} = \frac{8\mu L V_\mathrm{m}}{w r_0^2} = \frac{32\mu L V_\mathrm{m}}{w d^2} \qquad (B)$$

Ces expressions s'appliquent à *l'écoulement laminaire de tous les fluides dans tous les tuyaux et conduits.*

Comme on l'a indiqué au début de ce chapitre, l'expression de la perte de charge pour l'écoulement laminaire par la formule de Darcy est :

$$\text{perte de charge} = \frac{64}{R_\mathrm{E}}\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g}$$

8.8 Déterminer (*a*) la contrainte tangentielle visqueuse aux parois d'un tuyau de 305 mm de diamètre si le liquide qui y circule est de l'eau et si la perte de charge sur 100 m de tuyau est de 5,0 m, (*b*) la contrainte tangentielle visqueuse à 51 mm de l'axe du tuyau, (*c*) la vitesse de frottement (*d*) la vitesse moyenne pour une valeur de f de 0,050, (*e*) le rapport v/v_*.

Solution

(*a*) Utilisant l'équation (*B*) du problème 8.4, quand $r = r_0$, la contrainte tangentielle à la paroi est

$$\tau_0 = \frac{wh_L r_0}{2L} = \frac{9\,810(15)(0{,}1525)}{600} = 37{,}4\ \text{N/m}^2$$

(*b*) Puisque τ varie linéairement de l'axe à la paroi, $\tau = \dfrac{51}{152{,}5}(37{,}4) = 12{,}5\ \text{N/m}^2$

(*c*) D'après l'équation (5), $v_* = \sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{37{,}4}{1\,000}} = 0{,}193\ \text{m/s}$

(*d*) Utilisant $h_L = f\,\dfrac{L}{d}\,\dfrac{V^2}{2g}$, nous avons $5 = 0{,}050\,\dfrac{100}{0{,}305}\,\dfrac{V^2}{2g}$, et $V = 2{,}45$ m/s

Autre méthode : d'après l'équation (*3*), $\tau_0 = f\rho V^2/8$; $37{,}4 = 0{,}050(10^3)V^2/8$, et $V = 2{,}45$ m/s

(*e*) D'après $\tau_0 = \mu(v/y)$ et $\nu = \mu/\rho$ nous obtenons $\tau_0 = \rho\nu(v/y)$ ou $\tau_0/\rho = \nu(v/y)$.

Puisque $\tau_0/\rho = v_*^2$, nous avons $v_*^2 = \nu(v/y)$, $v/v_*^2 = y/\nu$ et $v/v_* = v_* y/\nu$.

8.9 Si dans le problème précédent, de l'eau circule dans un conduit rectangulaire de 915 mm par 1219 mm de même longueur avec la même perte de charge, quelle est la contrainte tangentielle visqueuse s'exerçant entre l'eau et la paroi du conduit?

Solution

Pour des conduits non circulaires, la grandeur à utiliser est le rayon hydraulique. Pour un tuyau circulaire,

$$\text{rayon hydraulique } R = \frac{\text{surface de la section droite}}{\text{périmètre mouillé}} = \frac{\pi\,d^2/4}{\pi\,d} = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2}$$

Reportant $r = 2R$ dans l'équation (*B*) du problème 8.4,

$$\tau = \frac{\rho g h_L}{L}\,R = \frac{9\,810 \times 5}{100} \times \frac{0{,}915 \times 1{,}219}{2(0{,}915 + 1{,}219)} = 128\ \text{Pa}$$

8.10 On pompe de l'huile à lubrifier moyenne, de densité 0,860, par un tuyau horizontal de 50 mm de diamètre et de 300 m de long au rythme de $1{,}14 \times 10^{-3}$ m³/s. Si la chute de pression est de 200 kPa, quelle est la viscosité de l'huile?

Solution

En supposant l'écoulement laminaire et en se reportant à l'expression (*B*) du problème 8.7, nous obtenons

$$(p_1 - p_2) = \frac{32\mu L V_m}{d^2} \quad \text{où} \quad V_m = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}14 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2} = 0{,}581\ \text{m/s}$$

Alors $$200\,000 = 32\mu(300)(0{,}581)/(0{,}05)^2 \quad \text{et} \quad \mu = 0{,}090\ \text{Pa}\cdot\text{s}.$$

La vérification de l'hypothèse initiale que l'écoulement est laminaire consiste à calculer le nombre de Reynolds pour les conditions de l'écoulement considérées. Ainsi

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{0{,}581 \times 0{,}05 \times 0{,}860 \times 1\,000}{0{,}090} = 278$$

Puisque le nombre de Reynolds $< 2\,000$, on a bien un écoulement laminaire et la valeur de μ est correcte.

8.11 De l'huile de viscosité absolue 0,101 Pa · s et de densité 0,850 circule dans 3 000 m de tuyau de fonte de 300 mm de diamètre au rythme de 44,4 l/s. Quelle est la perte de charge dans le tuyau?

Solution

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}044\,4}{\frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2} = 0{,}628 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{0{,}628 \times 0{,}3 \times 0{,}850 \times 1\,000}{0{,}101} = 1\,585$$

ce qui veut dire que l'écoulement est laminaire. Ainsi,

$$f = \frac{64}{R_E} = 0{,}040\,4 \quad \text{et} \quad \text{perte de charge} = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} = 0{,}040\,4 \times \frac{3\,000}{0{,}3} \times \frac{(0{,}628)^2}{2 \times 9{,}81} = 8{,}14 \text{ m.}$$

8.12 Du fuel-oil lourd circule de A à B par un tuyau d'acier de 152 mm de diamètre et de 914 m de long. La pression en A est 10,69 bar et en B de 0,344 8 bar. La viscosité cinématique est de $4{,}13 \times 10^{-4}$ m²/s et la densité de 0,918. Quel est le débit en m^3/s?

Solution

L'équation de Bernoulli, avec A comme référence donne

$$\left(\frac{10{,}69 \times 10^5}{0{,}918 \times 9\,810} + \frac{V^2}{2g} + 0\right) - f\,\frac{914}{0{,}152}\,\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{34\,480}{0{,}918 \times 9\,810} + \frac{V^2}{2g} + 0\right)$$

ou

$$114{,}9 = f(6\,013)(V^2/2g)$$

À la fois V et f sont inconnues et sont fonction l'un de l'autre. Si l'écoulement est laminaire, alors d'après l'équation (B) du problème 8.7,

$$V_m = \frac{(p_1 - p_2)d^2}{32\mu L} = \frac{(1\,069 - 34{,}48)10^3 \times (0{,}152)^2}{32(4{,}13 \times 10^{-4} \times 0{,}918 \times 1\,000)914} = 2{,}16 \text{ m/s}$$

et $R_E = 2{,}16(0{,}152)/4{,}13 \times 10^{-4}) = 795$, pour lequel l'écoulement est bien laminaire. Ainsi,

$$Q = AV = \frac{1}{4}\pi(0{,}152)^2 \times 2{,}16 = 39{,}2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Si l'écoulement avait été turbulent, l'équation (B) du problème 8.7 ne pourrait pas s'appliquer. On va donner une autre méthode dans le problème 8.16 ci-après. De plus, s'il y avait eu une différence de cote entre les points A et B, il aurait fallu remplacer le terme $(p_1 - p_2)$ de l'équation (B) par la chute de la ligne piézométrique en Pa.

8.13 Quelle est la taille des tuyaux à installer pour transporter du fuel-oil lourd au rythme de 0,022 2 m³/s à 15,6 °C si la perte de charge disponible pour les 1 000 m de long du tuyau est de 22,0 m?

Solution

Pour le fuel, $\nu = 2{,}05 \times 10^{-4}$ m²/s et la densité = 0,912. Pour une valeur aussi grande de la viscosité cinématique, on peut admettre que l'écoulement est laminaire. Alors,

$$\text{perte de charge} = \frac{V_m \times 32\mu L}{\rho g d^2} \quad \text{et} \quad V_m = \frac{Q}{A} = \frac{22{,}2 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{0{,}028\,3}{d^2}$$

En reportant

$$22{,}0 = \frac{(0{,}028\,3/d^2)(32)(2{,}05 \times 10^{-4} \times 0{,}912 \times 1\,000)(1\,000)}{9{,}81 \times (0{,}912 \times 1\,000)d^2}$$

d'où $d = 0{,}17$ m.

Vérifier l'hypothèse de l'écoulement laminaire, en utilisant $d = 0{,}17$ m

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(0{,}028\,3/d^2)d}{\nu} = \frac{0{,}028\,3}{0{,}17 \times 2{,}05 \times 10^{-4}} = 812$$

d'où l'écoulement est laminaire.

On emploiera des tuyaux normalisés de 175 mm.

8.14 On décharge du pétrole à l'aide d'un tuyau allant d'un point 2 de cote 66,66 m à un point 1 situé à 965,5 m du point 2 et de cote 82,65 m, à une pression de 2,50 kPa. Sachant que la rugosité du tuyau est de 0,500 mm, quel est le diamètre nécessaire pour décharger ce pétrole à la cadence de 0,10 m³/s?

Données : $w = 0{,}05$ kN/m³; $\mu = 2{,}92 \times 10^{-4}$ Pa · s; $\rho = 719$ kg/m³.

Solution

$$\text{perte de charge} = f\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right) = f\left(\frac{965{,}5}{d}\right)\left[\frac{V^2}{(2 \times 9{,}81)}\right] = \frac{49{,}21 f V^2}{d}$$

$$Q = AV = 0{,}10 = \left[\frac{(\pi)(d)^2}{4}\right]V \quad \text{d'où} \quad V = \frac{0{,}127\,3}{d^2}$$

$$\text{perte de charge} = \frac{(49{,}21 f)(0{,}127\,3/d^2)^2}{d} = \frac{0{,}797\,5 f}{d^5}$$

Écrivons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 (référence en 2).

$$\frac{2{,}50}{7{,}05} + \frac{V_1^2}{2g} + 82{,}65 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 66{,}66 + \frac{0{,}797\,5 f}{d^5}$$

Supposons une valeur de f égale à 0,020 0 et reportons-la dans l'équation de Bernoulli. Comme $V_1 = V_2$, les pertes dues aux vitesses se compensent :

$$0{,}355 + 82{,}65 = 66{,}66 + \frac{(0{,}795\,5)(0{,}020\,0)}{d^5}$$

d'où $d = 0{,}250$ m.

Vérifions maintenant que la valeur supposée de f est correcte.

$$V = \frac{0{,}127\,3}{(0{,}250)^2} = 2{,}037 \text{ m/s}$$

$$R_E = \frac{\rho d V}{\mu} = \frac{(719)(0{,}250)(2{,}037)}{2{,}92 \times 10^{-4}} = 1{,}25 \times 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0{,}000\,50}{0{,}250} = 0{,}002\,0$$

À partir de l'abaque A-1, $f = 0{,}023\,5$. Il est évident que la valeur supposée ($f = 0{,}020\,0$) n'était pas tout à fait exacte. Reprenons le calcul avec la nouvelle valeur 0,023 5.

$$0{,}355 + 82{,}65 = 66{,}66 + \frac{(0{,}797\,5)(0{,}023\,5)}{d^5} \quad \text{d'où} \quad d = 0{,}258 \text{ m}$$

Vérifions, de nouveau, que la valeur supposée de f est correcte.

$$V = \frac{0{,}127\,3}{(0{,}258)^2} = 1{,}912 \text{ m/s}$$

$$R_E = \frac{\rho d V}{\mu} = \frac{(719)(0{,}258)(1{,}912)}{2{,}92 \times 10^{-4}} = 1{,}21 \times 10^6 \qquad \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0{,}000\,50}{0{,}258} = 0{,}001\,94$$

À partir du diagramme A-1, $f = 0{,}023\,5$. Cette valeur de f est en accord avec la dernière valeur de f supposée. On en déduit une valeur correcte de d. Le diamètre du conduit doit être de 0,258 m.

8.15 Calculer la perte de charge pour 305 m de longueur de tuyau de fonte neuve, sans revêtement, de diamètre intérieur égal à 305 mm, quand (*a*) de l'eau à 15,6 °C y coule à 1,525 m/s et (*b*) du fuel-oil moyen à 15,6 °C y coule avec la même vitesse.

Solution

(*a*) Quand on utilise le diagramme A-1, on doit d'abord évaluer la rugosité relative et ensuite calculer le nombre de Reynolds. D'après la table du diagramme A-1, la valeur de ε pour des tuyaux de fonte non revêtue varie de 0,012 à 0,060 cm. Pour un diamètre intérieur de 30,5 cm et prenant comme valeur de ε (à la construction) $\varepsilon = 0{,}244$ mm; la rugosité relative $\dfrac{\varepsilon}{d} = \dfrac{0{,}244}{305} = 0{,}000\,8$.
Prenant la valeur de la viscosité cinématique de l'eau lue dans la table 2 de l'annexe,

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(1{,}525 \times 0{,}305)}{(1{,}13 \times 10^{-6})} = 411\,000 \quad \text{(écoulement turbulent)}$$

D'après le diagramme A-1, pour $\dfrac{\varepsilon}{d} = 0{,}000\,8$ et $R_E = 411\,000$, $f = 0{,}019\,4$ et

$$\text{perte de charge} = 0{,}019\,4\left(\left(\frac{305 \times 2{,}326}{0{,}305}\right)\Big/2g\right) = 2{,}30$$

Ou, en utilisant la table 3 de l'appendice (pour l'eau seulement), $f = 0{,}020\,0$ et :

$$\text{perte de charge} = f\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0{,}020\,0\left(\left(\frac{305 \times 2{,}326}{0{,}305}\right)\Big/2g\right) = 2{,}37 \text{ m}$$

(*b*) Pour le fuel, en utilisant la table 2, $R_E = 1{,}525(0{,}305/4{,}41 \times 10^{-6}) = 105\,000$. Pour un écoulement turbulent, d'après le diagramme A-1, $f = 0{,}021\,3$ et :

$$\text{perte de charge} = 0{,}021\,3(1\,000)(2{,}326/2g) = 2{,}53 \text{ m}.$$

En général, on ne peut estimer avec précision le degré de rugosité d'un tuyau *en service*, et par conséquent, dans ces cas-là, on ne doit pas s'attendre à avoir une valeur de f très précise. Pour cette raison, quand on emploie les diagrammes A-1 et A-2 et la table 3 pour des surfaces autres que des surfaces neuves, il vaut mieux prendre pour troisième chiffre significatif de f, soit *zéro* soit *cinq*, une précision plus grande n'étant pas garantie pour la plupart des cas pratiques.

Pour l'écoulement laminaire, pour tout tuyau et tout fluide, utiliser $f = \dfrac{64}{R_E}$.

8.16 Les points A et B sont situés à 1 200 m l'un de l'autre sur un tuyau d'acier neuf de 15 cm de diamètre intérieur. Le point B est à 15,0 m au-dessus de A et les pressions en A et B sont respectivement de 8,43 bar et de 3,33 bar. Quel est le débit de fuel moyen à 21,1 °C de A vers B ? (D'après le diagramme A-1, $\varepsilon = 0{,}006$ cm.)

Solution

On ne peut calculer immédiatement le nombre de Reynolds. Écrivons l'équation de Bernoulli entre A et B avec pour référence A.

$$\left(\frac{8{,}43 \times 10^5}{0{,}854 \times 9\,810} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right) - f\left(\frac{1\,200}{0{,}15}\right)\frac{V_{15}^2}{2g} = \left(\frac{3{,}33 \times 10^5}{0{,}854 \times 9\,810} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 15{,}0\right) \quad \text{et} \quad \frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45{,}8}{8\,000 f}$$

De même $R_E = \dfrac{Vd}{\nu}$. Reportant la valeur de V trouvée plus haut,

$$R_E = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(45{,}8)}{8\,000 f}} \quad \text{ou} \quad R_E\sqrt{f} = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(45{,}8)}{8\,000}} \qquad (A)$$

Puisque 45,8 correspond au terme h_L, chute dans la ligne piézométrique, et que 8 000 représente $\frac{L}{d}$, l'expression générale à utiliser *quand on doit chercher Q* est

$$R_E\sqrt{f} = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g(d)(h_L)}{L}} \qquad \text{(voir aussi le diagramme A-2)} \qquad (B)$$

Alors,

$$R_E\sqrt{f} = \frac{0,153}{3,83 \times 10^{-6}}\sqrt{\frac{19,61 \times 45,8}{8\,000}} = 13\,400$$

L'examen du diagramme A-2 indique que l'écoulement est turbulent. Alors, d'après le diagramme A-2, $f = 0,020$ pour $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,006}{15,3} = 0,000\,4$. Achevant la résolution, d'après l'équation de Bernoulli écrite ci-dessus,

$$\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45,8}{8\,000(0,020)} = 0,286 \quad \text{d'où} \quad V_{15} = 2,37 \text{ m/s}$$

et

$$Q = A_{15}V_{15} = \frac{1}{4}\pi(0,15)^2 \times 2,37 = 0,042 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{de fuel-oil.}$$

Le lecteur peut vérifier la solution en calculant le nombre de Reynolds et en trouvant la valeur de f d'après le diagramme A-1.

Quand l'écoulement est laminaire, il faut utiliser les méthodes étudiées dans le problème 8.12 ci-dessus.

8.17 Quel serait le débit d'eau (à 15 °C) dans les conditions du problème 8.16, utiliser la table 3.

Solution

L'équation de Bernoulli donne $(52,3 - 15,4) = 8\,000 f \frac{V_{15}^2}{2g}$ d'où $\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{36,9}{8\,000 f}$.

La solution la plus directe dans ce cas-là consiste à prendre une valeur pour f. La table 3 indique, pour un tuyau d'acier neuf de 15 cm, un intervalle pour f allant de 0,027 5 à 0,017 5. Essayons $f = 0,022\,5$. Alors

$$\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{36,9}{(8\,000 \times 0,022\,5)} = 0,205 \text{ m} \quad \text{et} \quad V_{15} = 2,0 \text{ m/s}$$

Vérifions alors le type d'écoulement et la valeur de f dans la table 3 :

$$R_E = 2,0(0,15)/(1,13 \times 10^{-6}) = 266\,000, \quad \text{d'où écoulement turbulent.}$$

À présent f, par interpolation, vaut 0,021 0. Répétant le calcul,

$$\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{37}{(8\,000 \times 0,021\,0)} = 0,22 \text{ m} \quad \text{et} \quad V_{15} = 2,08 \text{ m/s}$$

D'après la table 3 avec une précision pouvant être justifiée, $f = 0,021$ (vérifié). Alors

$$Q = A_{15}V_{15} = \frac{1}{4}\pi(0,15)^2 \times 2,08 = 38 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s d'eau.}$$

Ce procédé peut aussi s'appliquer en utilisant le diagramme A-1, mais il vaut mieux utiliser la méthode du problème 8.16.

8.18 Quel est le débit d'air à 20 °C circulant dans un tuyau d'acier neuf de 5 cm de diamètre intérieur, à la pression de 3 bar avec une chute de pression de 3,43 kPa pour 100 m de tuyau? Utiliser $\varepsilon = 0,007\,5$ cm.

Solution

D'après l'annexe, pour 20 °C, $\rho = 1{,}20$ kg/m^3 et $\nu = 1{,}49 \times 10^{-5}$ m^2/s à la pression atmosphérique normale. À 3 atmosphères, $\rho = 3 \times 1{,}20 = 3{,}60$ kg/m^3 et $\nu = \frac{1}{3} \times 1{,}49 \times 10^{-5} = 4{,}97 \times 10^{-6}$ m^2/s. On peut aussi obtenir cette viscosité cinématique à partir de la relation suivante :

$$\mu = \rho\nu = 1{,}20 \times 1{,}49 \times 10^{-5} = 17{,}9 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s à } 20\ °\text{C et 1 bar de pression absolue.}$$

De plus, à 3 bar de pression absolue, $\rho_{\text{air}} = 3{,}60$ kg/m^3 et

$$\nu \text{ (à 3 bar)} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{17{,}9 \times 10^{-6}}{3{,}60} = 4{,}97 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Pour déterminer le débit, on peut considérer que l'air est incompressible. Alors,

$$\frac{p_1 - p_2}{w} = \text{perte de charge} = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g}, \quad \frac{3\,430}{3{,}60 \times 9{,}81} = 97{,}2 = f\frac{100}{0{,}05}\,\frac{V^2}{2g} \quad \text{et} \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}048\,7}{f}$$

De plus, d'après le problème 8.16, $R_E\sqrt{f} = \dfrac{d}{\nu}\sqrt{\dfrac{2g(d)(h_L)}{L}} = \dfrac{0{,}05}{4{,}97 \times 10^{-6}}\sqrt{\dfrac{19{,}6(0{,}05)(97{,}2)}{100}} = 10\,400$ (turbulent).

D'après le diagramme A-2, $f = 0{,}025$ pour $\dfrac{\varepsilon}{d} = \dfrac{0{,}007\,5}{5} = 0{,}001\,5$. Alors

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}048\,7}{f} = 1{,}948 \text{ m}, \quad V_5 = 6{,}18 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad Q = A_5V_5 = \frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2 \times 6{,}18 = 12{,}1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/s.$$

8.19 Quel doit être le diamètre d'un tuyau de fonte neuf de 2 438 m de long devant transporter 1,06 m^3/s d'eau avec une chute de la ligne piézométrique de 63,53 m? Utiliser pour les calculs la table 3.

Solution

$$\text{Le théorème de Bernoulli donne } \left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A\right) - f\,\frac{2\,438}{d}\,\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B\right)$$

$$\left[\left(\frac{p_A}{w} + z_A\right) - \left(\frac{p_B}{w} + z_B\right)\right] = f\,\frac{2\,438}{d}\,\frac{V^2}{2g}$$

Le terme de gauche dans le crochet représente la chute de la ligne piézométrique; exprimant V sous la forme Q/A et en admettant que l'écoulement est turbulent

$$63{,}53 = f\,\frac{2\,438}{d}\,\frac{(1{,}06/\frac{1}{4}\pi d^2)^2}{2g}, \text{ qui simplifié, donne } d^5 = 3{,}46f.$$

Supposons que $f = 0{,}020$ (puisque à la fois d et V sont inconnus, il est nécessaire de faire une hypothèse). Alors

$$d^5 = f(3{,}46) = 0{,}020(3{,}46) = 0{,}069\,2$$

d'où $d = 0{,}586$ m.

D'après la table 3, pour $V = \dfrac{1{,}06}{\pi(0{,}586)/4} = 3{,}93$ m/s on a $f = 0{,}016\,5$.

Pour une vitesse de cet ordre de grandeur, dans la plupart des tuyaux, l'écoulement est turbulent. Refaisant le calcul,

$$d^5 = 0{,}016\,5(3{,}46) = 0{,}057\,1 \quad \text{d'où} \quad d = 0{,}564 \text{ m}.$$

Vérifiant f, $V = 4{,}2$ m/s et la table 3 donne $f = 0{,}016\,5$ (correct).
On utilisera la taille normalisée la plus proche 60 cm. (Vérifier R_E en utilisant V pour l'eau à 21 °C.)

8.20 Les points C et D de même cote sont situés à 150 m l'un de l'autre sur un tuyau de 200 mm de diamètre et sont reliés à l'aide d'un tuyau étroit à un manomètre différentiel. Quand le débit d'eau est de 0,18 m³/s la dénivellation du mercure dans le manomètre est de 1,96 m. Calculer le coefficient de frottement f.

Solution

$$\left(\frac{p_C}{w} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0\right) - f\,\frac{150}{0{,}20}\,\frac{V_{20}^2}{2g} = \left(\frac{p_D}{w} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p_C}{w} - \frac{p_D}{w}\right) = f(750)\frac{V_{20}^2}{2g} \qquad (1)$$

Pour un manomètre différentiel (voir le chapitre 2), $p_L = p_R$ ou

$$\frac{p_C}{w} + 1{,}96 = \frac{p_D}{w} + 13{,}57(1{,}96), \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_C}{w} - \frac{p_D}{w}\right) = 24{,}64 \text{ m}$$

Egalant (1) et (2), $24{,}64 = \dfrac{f(750)(5{,}73)^2}{2g}$ d'où $f = 0{,}019\,6$.

8.21 On pompe du fuel-oil moyen à 15 °C jusqu'au réservoir C (voir la figure 8-2) par 1 829 m de tuyau d'acier riveté neuf de 406 mm de diamètre intérieur. La pression en A est de 13,8 kPa, quand le débit est de 198 l/s. (a) Quelle est la puissance fournie au fuel par la pompe et (b) quelle doit être la pression en B ? Tracer la ligne piézométrique.

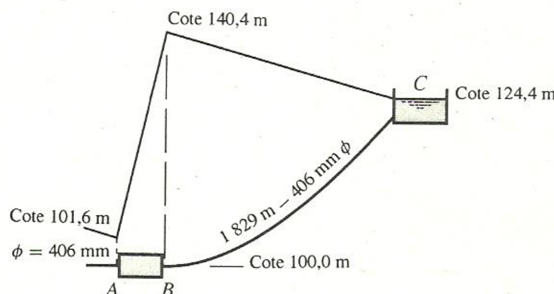


Fig. 8-2

Solution

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}198}{\pi(0{,}203)^2} = 1{,}53 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{1{,}53 \times 0{,}406}{5{,}16} \times 10^6 = 120\,000$$

D'après le diagramme A-1, pour $\dfrac{\varepsilon}{d} = \dfrac{1{,}829}{406} = 0{,}004\,5$, $f = 0{,}030$.

(a) L'équation de Bernoulli de A à C, avec pour référence A, donne

$$\left(\frac{13\,800}{0{,}861 \times 9\,810} + \frac{(1{,}53)^2}{2g} + 0\right) + H_p - 0{,}03\left(\frac{1\,829}{0{,}406}\right)\frac{(1{,}53)^2}{2g} - \frac{(1{,}53)^2}{2g} = (0 + 0 + 24{,}4)$$

Résolvant, $H_p = 38{,}8$ m et la puissance $= wQH_p = 0{,}861 \times 9\,810 \times 0{,}198 \times 38{,}8 = 64\,900$ W.

Le dernier terme du membre de gauche de l'équation de l'énergie représente la perte de charge du tuyau au réservoir (voir la table 4 de l'annexe). En général, quand le rapport de la longueur au diamètre (L/d) dépasse 2 000, on peut négliger les hauteurs de vitesses et les petites pertes dans l'équation de Bernoulli (ici elles s'annulent). La précision qu'apporte la prise en compte de termes aussi minimes dans les calculs est illusoire parce qu'on ne peut connaître f avec une telle précision.

(b) On peut calculer la hauteur due à la pression en B en utilisant les sections A et B ou B et C. Le premier choix donne moins de calculs, alors

$$\left(1{,}65 + \frac{V^2}{2g} + 0\right) + 38{,}8 = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V^2}{2g} + 0\right)$$

Ainsi, $\frac{p_B}{w} = 40{,}4$ m et $p_B = \rho g h = (0{,}861 \times 9\,810)(40{,}4) \approx 341\,200$ Pa.

On a représenté les cotes de la ligne piézométrique dans la figure 8.2.

- En A, la cote $= (100 + 1{,}65)$ m $\approx 101{,}6$ m.
- En B, la cote $= (100 + 40{,}4)$ m $\approx 140{,}4$ m.
- En C, la cote $\approx 124{,}4$ m.

8.22 En un point A d'un tuyau horizontal de 30 cm ($f = 0{,}020$), la hauteur due à la pression est de 60 m. À une distance de 60 m de A le diamètre du tuyau de 30 cm se rétrécit brusquement et passe à 15 cm. À une distance de 30 m de là, le diamètre qui était de 15 cm ($f = 0{,}015$) passe brusquement à 30 cm et le point F est alors situé à 30 m au-delà de ce point. Pour une vitesse de 2,41 m/s dans les tuyaux de 30 cm, tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique. Se reporter à la figure 8-3.

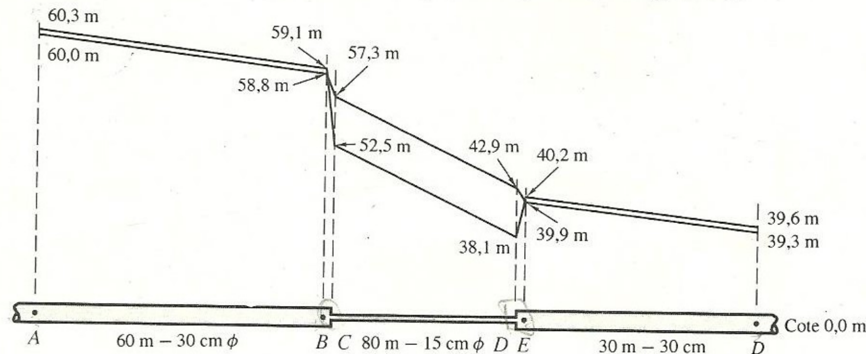


Fig. 8-3

Solution

Les hauteurs dues à la vitesse sont $\frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{(2{,}41)^2}{2g} = 0{,}30$ m et $\frac{V_{15}^2}{2g} = 4{,}80$ m.

La ligne de charge est inclinée dans le sens de l'écoulement d'une quantité égale à la perte de charge. La ligne piézométrique est située en dessous de la ligne de charge d'une quantité égale à la hauteur due à la vitesse en toute section droite. Notons (dans la figure 8-3) que la ligne piézométrique peut se relever là où il y a un changement de section (agrandissement).

Reportons les résultats dans un tableau, à 0,1 m près,

Pertes de charge en m			Cotes de la ligne de charge m	$\frac{V^2}{2g}$ m	Cotes de la ligne piézométrique m
En	**De**	**Calculs**			
A	(Elév. 0,0)		60,3	0,3	60,0
B	A à B	$0{,}20 \times 60/0{,}3 \times 0{,}3 = 1{,}2$	59,1	0,3	58,8
C	B à C	$K_C^* \times 4{,}8 = 0{,}37 \times 4{,}8 = 1{,}8$	57,3	4,8	52,5
D	C à D	$0{,}015 \times 30/0{,}15 \times 4{,}8 = 14{,}4$	42,9	4,8	38,1
E	D à E	$\frac{(V_{15} - V_{30})^2}{2g} = \frac{(9{,}6 - 2{,}4)^2}{19{,}6} = 2{,}7$	40,2	0,3	39,9
F	E à F	$0{,}20 \times 30/0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}6$	39,6	0,3	39,3

* [K_C a été obtenu à partir de la table 5, le terme correspondant à l'élargissement soudain (de D à E) étant lu dans la table 4.]

8.23 De l'huile circule du réservoir A à travers 150 m de tuyau neuf de fonte asphaltée de 150 mm de diamètre jusqu'au point B de cote 30,0 m, comme le montre la figure 8-4. Quelle devra être la pression en A pour que le débit de l'huile soit de 13,0 l/s (densité $= 0{,}840$ et $\nu = 2{,}10 \times 10^{-6}$ m²/s)? Utiliser $\varepsilon = 0{,}12$ mm.

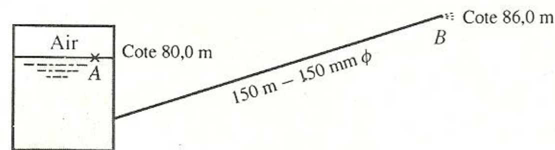


Fig. 8-4

Solution

$$V_{150} = \frac{Q}{A} = \frac{13{,}0 \times 10^{-3}}{1{,}77 \times 10^{-2}} = 0{,}734 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}734 \times 0{,}15}{2{,}11} \times 10^6 = 52\,200.$$

D'après le diagramme A-1, $f = 0{,}023\,5$ et appliquant l'équation de Bernoulli entre A et B, avec pour référence A, on obtient

$$\left(\frac{p_A}{w} + 0 + 0\right) - 0{,}50\frac{(0{,}734)^2}{2g} - 0{,}023\,5\frac{150}{0{,}15}\frac{(0{,}734)^2}{2g} = \left(0 + \frac{(0{,}734)^2}{2g} + 6\right)$$

En résolvant, on a :

$$p_A/w = 6{,}7 \text{ m d'huile} \quad \text{et} \quad p'_A = wh = (0{,}840 \times 9\,810)(6{,}7) = 55\,200 \text{ Pa}$$

8.24 La pression à la section A d'un tuyau de fer neuf de 102 mm de diamètre intérieur est de 341,4 kPa quand le débit de l'air, qui y circule de façon isotherme, est de 0,34 kg/s. Calculer la pression régnant dans le tuyau à la section B située à 549 m de A. (Viscosité absolue $= 18{,}67 \times 10^{-6}$ Pa · s et $t = 32$ °C.) Utiliser $\varepsilon = 0{,}009\,1$ cm.

Solution

L'air a une densité variable puisque les conditions de pression changent le long du parcours.

On a appliqué au chapitre 7 le théorème de Bernoulli dans des conditions où il n'y avait pas de pertes de charge (écoulement idéal). L'expression élémentaire de l'énergie comprenant la perte de charge sur une longueur dL et où $z_1 = z_2$ est

$$\frac{\mathrm{d}p}{w} + \frac{V\,\mathrm{d}V}{g} + f\,\frac{\mathrm{d}L}{d}\,\frac{V^2}{2g} = 0$$

En divisant par $\dfrac{V^2}{2g}$

$$\frac{2g}{V^2}\,\frac{\mathrm{d}p}{w} + \frac{2\,\mathrm{d}V}{V} + \frac{f}{d}\,\mathrm{d}L = 0$$

Pour un écoulement permanent, le débit massique M (kg/s) est constant.

$$M = \rho Q = \rho A V.$$

En remplaçant le terme V par $\dfrac{M}{\rho A}$ dans le terme exprimant la hauteur due à la pression, on a :

$$\frac{2A^2\rho}{M^2}\,\mathrm{d}p + \frac{2\,\mathrm{d}V}{V} + \frac{f}{d}\,\mathrm{d}L = 0$$

Dans des conditions isothermes $\dfrac{p}{\rho} = rT$. Remplaçant ρ par cette valeur on obtient :

$$\frac{2A^2}{M^2 rT}\int_{p_1}^{p_2} p\,\mathrm{d}p + 2\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{f}{d}\int_0^L \mathrm{d}L = 0$$

f étant supposé constant, comme on va l'expliquer plus loin. En intégrant et en reportant les bornes d'intégration, on a :

$$\frac{A^2}{M^2rT}(p_2^2 - p_1^2) + 2(\ln V_2 - \ln V_1) + f(L/d) = 0 \qquad (A)$$

Pour pouvoir comparer (A) à la forme usuelle de l'équation $(z_1 = z_2)$, nous obtenons :

$$(Kp_1^2 + 2 \ln V_2) - f(L/d) = (Kp_2^2 + 2 \ln p_2) \qquad (B)$$

ou $K = \dfrac{A^2}{M^2rT}$. Réarrangeant (A) pour avoir la solution,

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{M^2rT}{A^2}\left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f\,\frac{L}{d}\right] \qquad (C)$$

Comme $\dfrac{M^2}{A^2} = \rho^2V^2$ et que $\rho = p/rT$, on obtient pour K^{-1}

$$K^{-1} = \frac{M^2rT}{A^2} = \frac{p^2V^2}{rT} = p\rho V^2 = p_1\rho_1V_1^2 = \frac{w_1p_1V_1^2}{g} \qquad (D)$$

Alors (C) s'écrit

$$(p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = \frac{w_1p_1V_1^2}{g}\left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f\,\frac{L}{d}\right]$$

$$\frac{(p_1 - p_2)}{w_1} = \frac{2\left[2 \ln \dfrac{V_2}{V_1} + f\,\dfrac{L}{d}\right]\dfrac{V_1^2}{2g}}{1 + \dfrac{p_2}{p_1}} = \text{perte de charge} \qquad (E)$$

On étudiera au chapitre 13 les pressions et les vitesses limites.

Avant de résoudre cette expression, il est important d'examiner le coefficient de frottement f, puisque la vitesse V n'est pas constante pour les gaz où des variations de densité peuvent apparaître.

$$R_E = \frac{Vd}{\mu/\rho} = \frac{Vd\rho}{\mu} = g = \frac{w}{\rho}, \text{ alors } R_E = \frac{Md}{A\mu} \qquad (F)$$

On doit remarquer que le nombre de Reynolds est constant pour l'écoulement permanent puisque μ ne varie pas s'il n'y pas de variation de la température. Ainsi le coefficient de frottement f est constant dans le problème, même si la vitesse augmente quand la pression décroît. Résolvons (F) en utilisant la viscosité absolue donnée :

$$R_E = \frac{0{,}34 \times 0{,}102 \times 10^6}{(\pi/4)(0{,}102)^2 \times 18{,}67} = 228\,000.$$

D'après le diagramme A-1, pour $\dfrac{\varepsilon}{d} = 0{,}000\,9$, $f = 0{,}020\,5$.

En utilisant (C) ci-dessus, et négligeant $2 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$ qui est très petit par rapport au terme $f(L/d)$, on obtient :

$$(341\,400)^2 - p_2^2 = \frac{(0{,}34)^2 \times 287(32 + 273)}{[(\pi/4)(0{,}102)^2]^2}\left[\text{négl.} + (0{,}020\,5)\frac{549}{0{,}102}\right]$$

d'où

$$p_2 = 315{,}9 \text{ kPa (abs.)}$$

En B : $\rho_2 = \dfrac{31{,}59 \times 10^4}{287(32 + 273)} = 3{,}61$ kg/m³, $V_2 = \dfrac{M}{\rho^2A} = \dfrac{0{,}34}{3{,}61 \times 7{,}87 \times 10^{-3}} = 12{,}0$ m/s

En A : $\rho_1 = \dfrac{34{,}14 \times 10^4}{287(32 + 273)} = 3{,}90$ kg/m³, $V_1 = \dfrac{0{,}34}{3{,}90 \times 7{,}87 \times 10^{-3}} = 11{,}1$ m/s

Ainsi, $2 \ln \dfrac{V_2}{V_1} = 2 \ln\left(\dfrac{12}{11,1}\right) = 2 \times 0,078 = 0,156$, qui est négligeable par rapport au terme $f\ (L/d)$ qui vaut 111. Par conséquent, la pression à la section B est $p_2 = 315,9$ kPa.

Si on avait supposé l'air incompressible, alors

$$\frac{p_1 - p_2}{w_1} = f\,\frac{L}{d}\,\frac{V^2}{2g} = 0,020\,5 \times \frac{549}{0,102} \times \frac{(11,1)^2}{2g} = 693 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = w_1 h = 3,92 \times 9,81 \times 693 = 26\,600 \text{ Pa} = 26,6 \text{ kPa}$$

et $p_2' = 341,4 - 26,6 = 314,8$ kPa. Une concordance de résultats assez peu fréquente.

8.25 Un tuyau de fer, de 150 mm de diamètre intérieur et quelque peu rouillé transporte 20 N d'air par seconde de A à B. En A la pression est de 483 kPa (absolue) et en B la pression doit être de 448 kPa. L'écoulement est isotherme à 20 °C. Quelle est la longueur du tuyau de A à B ? Utiliser $\varepsilon = 0,40$ mm.

Solution

Calculant les valeurs fondamentales (voir l'annexe pour 20 °C et 1,013 bar)

$$\rho_1 = 1,205(483/101,3) = 5,75 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_2 = 1,205(448/101,3) = 5,33 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = \frac{W}{w_1 A} = \frac{20}{5,75 \times 9,81 \times \frac{1}{4}\pi(0,15)^2} = 20,1 \text{ m/s} \qquad V_2 = \frac{20}{5,33 \times 9,81 \times \frac{1}{4}\pi(0,15)^2} = 21,6 \text{ m/s}$$

$$R_E = \frac{20,1 \times 0,15}{(101/483)(1,49 \times 10^{-5})} = 968\,000. \quad \text{D'après le diagramme A-1, } f = 0,025 \text{ pour } \varepsilon/d = 0,002\,6.$$

En utilisant l'équation (E) du problème 8-24 on a :

$$\frac{(483 - 448) \times 10^3}{56,4} = \frac{(2)[2 \ln(21,6/20,1) + 0,025(L/0,150)](20,1)^2/2g}{1 + 448/483} \quad \text{et} \quad L = 173 \text{ m}.$$

Note : Pour la circulation de gaz dans les tuyaux, si p_2 ne dépasse pas p_1 de plus de 10 % on ne commettra pas une erreur supérieure à 5 % dans la perte de charge en admettant que le fluide est incompressible et en employant l'équation de Bernoulli sous la forme habituelle.

8.26 Les ordonnées de la ligne de charge et de la ligne piézométrique au point A sont respectivement de 13,0 m et 12,4 m. Pour le système représenté sur la figure 8-5, calculer (a) la puissance consommée entre A et H si l'ordonnée de la ligne de charge en H est 1,0 m et (b) les hauteurs dues à la pression en E et F situées à la cote 6,0 m. (c) Tracer, à 0,1 m près, la ligne de charge et la ligne piézométrique, en admettant que pour la vanne CD, K vaut 0,40 et que f vaut 0,010 pour les tuyaux de 150 mm.

Fig. 8-5

Solution

L'écoulement doit s'effectuer à partir du réservoir puisque la ligne de charge en G est située en dessous du niveau de celui-ci, GH représente la turbine. Avant de pouvoir calculer la puissance consommée, on doit d'abord calculer le débit G et la hauteur de charge consommée.

(a) En G, $V_{30}^2/2g = 0{,}6$ m (différence entre les ordonnées de la ligne de charge et de la ligne piézométrique). De plus $V_{15}^2/2g = 16 \times 0{,}6 = 9{,}6$ m et $V_{60}^2/2g = \dfrac{1}{16}(0{,}6) \approx 0{,}04$ m. Pour obtenir Q,

$$V_{30} = 3{,}43 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 3{,}43 = 0{,}242 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$\text{Puissance} = wQH_T/10^3 = 9\,810(0{,}242)(13{,}0 - 1{,}0)/10^3 = 28{,}5 \text{ kW consommés}$$

(b) Pour aller de F en G, avec pour niveau de référence zéro :

$$(\text{énergie en } F) - 0{,}030(30/0{,}3)(0{,}6) = (\text{énergie en } G = 13{,}0).$$
$$\text{énergie en } F = 13{,}0 + 1{,}8 = 14{,}8 \text{ m}.$$

Pour aller de E en F, avec pour niveau de référence zéro :

$$(\text{énergie en } E) - (13{,}72 - 3{,}43)^2/2g = (\text{énergie } F = 14{,}8).$$
$$\text{énergie en } E = 14{,}8 + 5{,}4 = 20{,}2 \text{ m}$$

Hauteur due à la pression en $E = 20{,}2 - (6{,}0 + 9{,}6) = 4{,}6$ m d'eau.
Hauteur due à la pression en $F = 14{,}8 - (6{,}0 + 0{,}6) = 8{,}2$ m d'eau.

(c) En remontant à partir de F :

Chute de la ligne de charge de D à $E = 0{,}010(7{,}5/0{,}15)(9{,}6) = 4{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de C à $D = 0{,}40(9{,}6) = 3{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de B à C = même que de D à E $= 4{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de A à $B = 0{,}50(9{,}6) = 4{,}8$ m.

(Cote en D $-4{,}8$) = Cote en $E = 20{,}2$, Cote $D = 25{,}0$ m.
(Cote en C $-3{,}8$) = Cote en $D = 25{,}0$, Cote $C = 28{,}8$ m.
(Cote en B $-4{,}8$) = Cote en $C = 28{,}8$, Cote $B = 33{,}6$ m.
(Cote en A $-4{,}8$) = Cote en $B = 33{,}6$, Cote $C = 38{,}4$ m.

La ligne piézométrique est située $V^2/2g$ au-dessous de la ligne de charge : 9,6 m dans le tuyau de 150 mm, 0,6 m dans celui de 30 cm et 0,04 m dans celui de 600 mm. On a représenté ces valeurs dans la figure 8-5.

8.27 Un vieux conduit rectangulaire de 300 mm × 460 mm de section transporte de l'air à 20 °C à la pression de 105 kPa (abs.) sur 460 m avec une vitesse moyenne de 2,97 m/s. Calculer la perte de charge et la chute de pression, en admettant que le conduit est horizontal et que la hauteur des aspérités de la surface vaut 0,55 mm.

Solution

On doit légèrement modifier le terme représentant la perte de charge pour pouvoir appliquer l'équation de Bernoulli à une section droite non circulaire. On pourra appliquer l'équation qui en résulte avec une précision convenable à l'écoulement turbulent. Remplaçons le diamètre par le *rayon hydraulique* qu'on a défini comme étant le quotient de la surface de la section droite par le périmètre mouillé, soit $R = a/p$.

Pour un tuyau circulaire, $R = \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi d^2}{\pi d} = \dfrac{d}{4}$, et on peut réécrire la formule de Darcy sous la forme

$$\text{chute de pression} = \frac{f}{4}\frac{L}{R}\frac{V^2}{2g}$$

Solution

L'écoulement doit s'effectuer à partir du réservoir puisque la ligne de charge en G est située en dessous du niveau de celui-ci, GH représente la turbine. Avant de pouvoir calculer la puissance consommée, on doit d'abord calculer le débit G et la hauteur de charge consommée..

(*a*) En G, $V_{30}^2/2g = 0{,}6$ m (différence entre les ordonnées de la ligne de charge et de la ligne piézométrique). De plus $V_{15}^2/2g = 16 \times 0{,}6 = 9{,}6$ m et $V_{60}^2/2g = \frac{1}{16}(0{,}6) \approx 0{,}04$ m. Pour obtenir Q,

$$V_{30} = 3{,}43 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \times 3{,}43 = 0{,}242 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$\text{Puissance} = wQH_T/10^3 = 9\,810(0{,}242)(13{,}0 - 1{,}0)/10^3 = 28{,}5 \text{ kW consommés}$$

(*b*) Pour aller de F en G, avec pour niveau de référence zéro :

$$(\text{énergie en } F) - 0{,}030(30/0{,}3)(0{,}6) = (\text{énergie en } G = 13{,}0).$$
$$\text{énergie en } F = 13{,}0 + 1{,}8 = 14{,}8 \text{ m}.$$

Pour aller de E en F, avec pour niveau de référence zéro :

$$(\text{énergie en } E) - (13{,}72 - 3{,}43)^2/2g = (\text{énergie } F = 14{,}8).$$
$$\text{énergie en } E = 14{,}8 + 5{,}4 = 20{,}2 \text{ m}$$

Hauteur due à la pression en $E = 20{,}2 - (6{,}0 + 9{,}6) = 4{,}6$ m d'eau.
Hauteur due à la pression en $F = 14{,}8 - (6{,}0 + 0{,}6) = 8{,}2$ m d'eau.

(*c*) En remontant à partir de F :

Chute de la ligne de charge de D à $E = 0{,}010(7{,}5/0{,}15)(9{,}6) = 4{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de C à $D = 0{,}40(9{,}6) = 3{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de B à C = même que de D à E $= 4{,}8$ m.
Chute de la ligne de charge de A à $B = 0{,}50(9{,}6) = 4{,}8$ m.

(Cote en D $-4{,}8$) = Cote en $E = 20{,}2$, Cote $D = 25{,}0$ m.
(Cote en C $-3{,}8$) = Cote en $D = 25{,}0$, Cote $C = 28{,}8$ m.
(Cote en B $-4{,}8$) = Cote en $C = 28{,}8$, Cote $B = 33{,}6$ m.
(Cote en A $-4{,}8$) = Cote en $B = 33{,}6$, Cote $C = 38{,}4$ m.

La ligne piézométrique est située $V^2/2g$ au-dessous de la ligne de charge : 9,6 m dans le tuyau de 150 mm, 0,6 m dans celui de 30 cm et 0,04 m dans celui de 600 mm. On a représenté ces valeurs dans la figure 8-5.

8.27 Un vieux conduit rectangulaire de 300 mm × 460 mm de section transporte de l'air à 20 °C à la pression de 105 kPa (abs.) sur 460 m avec une vitesse moyenne de 2,97 m/s. Calculer la perte de charge et la chute de pression, en admettant que le conduit est horizontal et que la hauteur des aspérités de la surface vaut 0,55 mm.

Solution

On doit légèrement modifier le terme représentant la perte de charge pour pouvoir appliquer l'équation de Bernoulli à une section droite non circulaire. On pourra appliquer l'équation qui en résulte avec une précision convenable à l'écoulement turbulent. Remplaçons le diamètre par le *rayon hydraulique* qu'on a défini comme étant le quotient de la surface de la section droite par le périmètre mouillé, soit $R = a/p$.

Pour un tuyau circulaire, $R = \frac{1}{4}\frac{\pi d^2}{\pi d} = \frac{d}{4}$, et on peut réécrire la formule de Darcy sous la forme

$$\text{chute de pression} = \frac{f}{4}\frac{L}{R}\frac{V^2}{2g}$$

Pour f et son rapport avec la rugosité du conduit et le nombre de Reynolds, on utilise

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{V(4R)}{\nu}$$

Pour le conduit de 300 mm × 460 mm, $R = \frac{a}{p} = \frac{0,300 \times 0,460}{2(0,300 + 0,460)} = 0,091$ m et

$$R_E = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \times 2,97 \times 0,091}{(101/105)(1,49)} \times 10^5 = 75\,400$$

D'après le diagramme A-1, $f = 0,024$ pour $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{0,055}{(4 \times 9,1)} = 0,001\,5$. Alors,

$$\text{perte de charge} = \frac{0,024}{4} \times \frac{460}{0,091} \times \frac{(2,97)^2}{2g} = 13,6 \text{ m d'air},$$

et la chute de pression $= \rho g h = (105/101,3)(1,205)(13,6) \times 9,81 = 167$ Pa.

On peut observer que l'hypothèse d'une densité de l'air constante est satisfaisante.

8.28 Un tuyau neuf, en fonte, ($C = 130$) de 1 m de diamètre et de 845 m de longueur crée une perte de charge de 1,11 m. Trouver le débit du tuyau en utilisant la formule de Hazen-Williams.

Solution

$$V = (0,849\,2)(130)\left(\frac{1}{4}\right)^{0,63}\left(\frac{1,11}{845}\right)^{0,54} = 1,281 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = \left[\frac{(\pi)(1)^2}{4}\right](1,281) = 1,01 \text{ m}^3/\text{s}.$$

8.29 Résoudre le problème 8.28 à l'aide de la formule de Manning.

Solution

$$V = \frac{1,0}{0,012}\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}\left(\frac{1,11}{845}\right)^{1/2} = 1,199 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = \left[\frac{(\pi)(1)^2}{4}\right](1,199) = 0,942 \text{ m}^3/\text{s}$$

8.30 Résoudre le problème 8.28 à l'aide du diagramme B-2.

Solution

À partir du diagramme B-2, pour $h_1 = \frac{1,11}{845} = 0,001\,314$ et $d = 1\,000$ mm, $Q = 0,91$ m^3/s. Ce débit vaut pour $C = 120$.

Pour $C = \frac{130 \times 0,91}{(Q)_{C=130}} = \frac{120}{130}$, $\quad (Q)_{C=130} = 0,99 \text{ m}^3/s$.

8.31 Résoudre le problème 8.29 à l'aide du diagramme B-3.

Solution

À partir du diagramme B-3, pour $h_1 = \frac{1,11}{845} = 0,001\,314$ et $d = 1\,000$ mm, $Q = 0,88$ m^3/s. Ce débit vaut pour $n = 0,013$.

$$\text{Pour } n = \frac{0{,}012 \times 0{,}88}{(Q)_{n=0{,}012}} = \frac{0{,}012}{0{,}013}, \qquad (Q)_{n=0{,}012} = 0{,}95 \text{ m}^3/\text{s}.$$

8.32 Un tuyau de ciment ($C = 120$) de 914 mm de diamètre et de 1 220 m de long crée une perte de charge de 3,87 m. Trouver le débit du tuyau en utilisant la formule de Hazen-Williams.

Solution

$$V = 0{,}849\,2 \times 120 \times \left(\frac{0{,}914}{4}\right)^{0{,}63} \times \left(\frac{3{,}87}{1\,220}\right)^{0{,}53} = 1{,}80 \text{ m/s}.$$

$$Q = AV = \pi \left[\frac{(0{,}914)^2}{4}\right] \times 1{,}80 = 1{,}18 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ndt : On aurait pu appliquer la formule de Hazen-Williams donnant directement le débit Q :

$$Q = 0{,}278\,5\, Cd^{2{,}63} s^{0{,}53} = 0{,}278\,5 \times 120 \times 0{,}789\,4 \times 0{,}044\,7 = 1{,}18 \text{ m}^3/\text{s}.$$

8.33 Résoudre le problème 8.32 en utilisant la formule de Manning ($n = 0{,}013$).

Solution

$$V = \left(\frac{1}{0{,}013}\right)\left(\frac{0{,}914}{4}\right)^{2/3}\left(\frac{3{,}87}{1\,220}\right)^{1/2} = 1{,}60 \text{ m/s}$$

$$Q = 1{,}06 \text{ m}^3/\text{s}$$

8.34 Résoudre le problème 8.32 en utilisant le diagramme B-2 (Hazen-Williams).

Solution

On voit, à partir du diagramme B-2, que $h = \dfrac{3{,}87}{1\,220} = 0{,}003\,17$ m/m; $d = 914$ mm et $Q = 1{,}18$ m^3/s.

8.35 Résoudre le problème 8.33 en utilisant le diagramme B-3 (Manning).

Solution

D'après le diagramme :

$$h = 0{,}003\,17 \text{ m/m}; \quad d = 914 \text{ mm}; \quad Q = 1{,}05 \text{ m}^3/\text{s}.$$

8.36 Quelle doit être la dimension de la section d'un tuyau carré devant transporter de l'eau sur une distance de 45 m, sachant que son débit est de 4,0 m^3 à la seconde et que la hauteur de perte de charge vaut 1,80 m? On utilisera la formule de Hazen-Williams.

Solution

$$v = \frac{4{,}0}{a^2} = 0{,}849\,2 \times 120 \times \left(\frac{a^2}{4a}\right)^{0{,}63}\left(\frac{1{,}8}{45}\right)^{0{,}54} \quad \text{d'où} \quad a = 0{,}79 \text{ m}.$$

En pratique, on utiliserait un conduit de 800 mm × 800 mm.

8.37 De l'eau circule dans un tuyau de fonte ($C = 120$; $d = 500$ mm) à la vitesse de 2,0 m/s. Trouver la perte due aux frottements par 100 m de tuyau. Utiliser le diagramme B-2 (Hazen-Williams).

Solution

$$\frac{2{,}0}{(V)_{C=120}} = \frac{130}{120} \quad \text{d'où} \quad (V)_{C=120} = 1{,}85 \text{ m/s}.$$

À partir du diagramme B-2, en prenant $d = 500$ mm et $V = 1{,}85$ m/s, on obtient $h = 0{,}006\,7$ m par mètre de tuyau. La perte de charge sur 100 m de tuyau est donc de $100 \times 0{,}006\,7 = 0{,}67$ m. Cette perte s'exprime en unité de pression (kPa) :

$$p = \rho g h = 1 \times 9{,}81 \times 0{,}67 = 6{,}6 \text{ kPa.}$$

Problèmes supplémentaires

8.38 Si la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi d'un tuyau de 305 mm est de 47,9 Pa et si $f = 0{,}040$, quelle est la vitesse moyenne (*a*) si de l'eau à 21 °C circule, (*b*) si un fluide de densité 0,70 circule? *Rép.* 3 ,08 m/s; 3,7 m/s.

8.39 Quelles sont les vitesses de frottement du problème précédent? *Rép.* 0,219 m/s, 0,261 m/s.

8.40 De l'eau coule dans un tuyau de 61 m de longueur et de 150 mm de diamètre et la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi est de 44 Pa. Calculer la perte de charge. *Rép.* 7,2 m.

8.41 Une huile SAE 10 s'écoule dans un tuyau de diamètre égal à 200 mm. Trouver la vitesse maximale pour laquelle l'écoulement deviendra laminaire.
Données : $\rho = 869$ kg/m^3; $\mu = 8{,}14 \times 10^{-2}$ Pa · s. *Rép.* 0,937 m/s.

8.42 Pour quelle taille de tuyau, la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi sera-t-elle de 29,9 N/m^2 quand de l'eau y circulant sur 91,4 m provoque une perte de charge de 6,1 m? *Rép.* 91,4 mm.

8.43 Calculer la vitesse critique (inférieure) pour un tuyau de 102 mm transportant de l'eau à 27 °C?
Rép. $1{,}730 \times 10^{-2}$ m/s.

8.44 Calculer la vitesse critique (inférieure) pour un tuyau de 102 mm transportant du fuel-oil lourd à 43 °C?
Rép. 0,89 m/s.

8.45 De l'eau, à 20 °C, s'écoule dans un tuyau neuf, en fonte, à la vitesse de 4,2 m/s. Le tuyau mesure 400 m et a un diamètre de 150 mm. Déterminer la perte de charge due aux frottements. *Rép.* 54,2 m.

8.46 Quelle sera la perte de charge dans un tuyau de fonte neuve, horizontal de 100 m de long et de 0,10 m de diamètre, transportant du fuel-oil moyen à 10 °C quand la vitesse est de 75 mm/s? *Rép.* $1{,}26 \times 10^{-2}$ m.

8.47 Quelle est la perte de charge dans le problème 8.46 si la vitesse du fuel est de 1,20 m/s? *Rép.* 2,20 m.

8.48 Ne prenant en considération que la perte de charge due au tuyau, quelle est la hauteur due à la pression nécessaire pour débiter 0,222 m^3/s de fuel-oil lourd à 38 °C le long de 914 m de tuyau de fonte neuve, de 300 mm de diamètre intérieur? Utiliser $\varepsilon = 0{,}24$ mm. *Rép.* 41 m.

8.49 Dans le problème 8.48, quelle est la valeur minimum de la viscosité cinématique du fuel pour laquelle l'écoulement est laminaire? *Rép.* $4{,}6 \times 10^{-4}$ m^2/s.

8.50 En ne prenant en considération que la perte causée par le tuyau, quelle doit être la différence de niveau de deux réservoirs situés à 250 m l'un de l'autre pour que le débit d'huile à lubrifier de poids moyen soit de 30 l/s à 10 °C pour un tuyau de 150 mm de diamètre? *Rép.* 16,6 m.

8.51 De l'eau, à 20 °C, s'écoule dans un tuyau neuf, en fonte ($d = 100$ mm) à la vitesse de 5,0 m/s. Déterminer la chute de pression en kPa par 100 m de tuyau et la puissance perdue par frottement (en kW). *Rép.* 314 kPa pour 100 m; 12,4 kW par 100 m.

8.52 De l'huile de densité 0,802 et de viscosité cinématique $1,86 \times 10^{-4}$ m^2/s s'écoule du réservoir A au réservoir B à travers un tuyau neuf de 305 m de long au rythme de 89 l/s. La hauteur due à la pression dont on dispose est de 161 mm. Quel doit être le diamètre du tuyau à utiliser? *Rép.* 600 mm.

8.53 Une pompe fournit du fuel-oil à 15,6 °C par un tuyau de laiton de 305 m de long et de 50,8 mm de diamètre à un réservoir situé à 3,05 m au-dessus du réservoir de distribution. En négligeant les pertes mineures, pour un débit de $3,71 \times 10^{-3}$ m^3/s calculer la puissance de la pompe (en kW) si son rendement est de 80 %. *Rép.* 6,1 kW.

8.54 De l'eau à 38 °C s'écoule de A en B à travers un tuyau de fonte de 244 m de long et de 300 mm de diamètre moyen ($\varepsilon = 0,061$ cm). Le point B est à 9,1 m au-dessus de A et la pression en B doit être maintenue à 138 kPa. Si le débit doit être de 222 l/s, quelle doit être la pression en A? *Rép.* 314 kPa.

8.55 Déterminer le débit d'un tuyau en fer forgé neuf ($d = 150$ mm) transportant de l'eau à 20 °C, la perte de pression due aux frottements n'excédant pas 35 kPa par 100 m de tuyau placé horizontalement. *Rép.* 0,044 5 m^3/s.

8.56 Une vieille canalisation à usage commercial, horizontale, de 100 cm de diamètre intérieur et de 2 500 m de long transporte du fuel-oil de densité 0,912 avec un débit de 1,20 m^3/s, avec une perte de charge de 22,0 m. Quelle doit être la pression en A en amont pour que la pression en B soit de 137 kPa? Utiliser $\varepsilon = 13,7$ mm *Rép.* 334 kPa.

8.57 Une conduite usée de 600 mm de diamètre intérieur et de 1 220 m de long, transporte du fuel-oil moyen à 30 °C de A à B. Les pressions en A et B sont respectivement de 393 kPa et 138 kPa, et le point B est situé à 18,3 m au-dessus du point A. Calculer le débit en m^3/s, en utilisant $\varepsilon = 0,49$ mm. *Rép.* 0,73 m^3/s.

8.58 Une huile SAE 10 coule, à 20 °C, dans un tuyau de ciment horizontal de 300 m de long ($w = 8,52$ kN/m^3; $\rho_{\text{huile}} = 860$ kg/m^3; $\mu = 8,14 \times 10^{-2}$ Pa · s). Quelle devra être la taille du tuyau pour qu'il débite 0,014 2 m^3/s, avec une chute de pression due aux frottements de 23,94 kPa? *Rép.* 156 mm.

8.59 De l'eau s'écoule du réservoir A dont le niveau est à la cote 25 m au réservoir B dont le niveau est maintenu à la cote 18 m. Les réservoirs sont reliés par 30 m de tuyau de 30 cm ($f = 0,020$), puis par 30 m de tuyau de 15 cm ($f = 0,015$). Il y a deux coudes de 90° dans chaque tuyau ($K = 0,50$ pour chacun), K pour la contraction vaut 0,75 et le tuyau de 30 cm s'avance dans le réservoir A. Si la cote au point de changement de taille des tuyaux est de 16 m, trouver les hauteurs dues à la pression dans les tuyaux de 30 cm et de 15 cm au point de changement de taille. *Rép.* 8,51 m, 5,90 m.

8.60 Dans la figure 8-6, le point B est à 180 m du réservoir. Quand de l'eau circule au rythme de 15×10^{-3} m^3/s, calculer (a) la perte de charge causée par l'obstruction partielle C et (b) la pression en B en bar (abs.) *Rép.* 1,68 m, 0,96 bar (abs.)

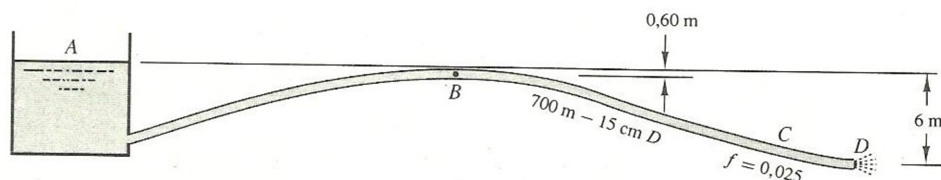


Fig. 8-6

8.61 Un solvant à usage commercial à 20 °C circule du réservoir A au réservoir B dans un tuyau de fonte asphaltée de 152 m de long et de 150 mm de diamètre. La différence de hauteur des niveaux des liquides est de 7,0 m. Le tuyau avance dans le réservoir A et deux coudes sur le parcours provoquent une perte de 2 hauteurs dues à la vitesse? Quel sera le débit? Utiliser $\varepsilon = 0,14$ mm *Rép.* 0,044 m^3/s.

8.62 Un tuyau vitrifié, de 300 mm de diamètre, mesure 100 m. À l'aide de la formule de Hazen-Williams, déterminer le débit du tuyau si la perte de charge vaut 2,54 m. *Rép.* 0,177 m^3/s.

8.63 Un conduit d'acier, de 51 mm × 102 mm de section transporte de l'eau à 15 °C à un rythme de 18 l/s et à une pression constante, rendant la ligne piézométrique parallèle à la pente du conduit. De combien le conduit descend-il

sur 305 m, en admettant que la hauteur des aspérités de la surface est de 0,26 mm? (Utiliser $\nu = 1,132 \times 10^{-6}$ m²/s.) *Rép.* 79,2 m.

8.64 Quand du fuel-oil moyen à 15 °C circule de A à B avec un débit de 42 l/s par 1 067 m de conduite de fonte neuve sans revêtement de 150 mm de diamètre, la perte de charge est de 44 m. Les sections A et B sont situées respectivement à la cote 0,0 m et 18,3 m et la pression en B est de 345 kPa. Quelle doit être la pression en A pour avoir le débit indiqué? *Rép.* 862 kPa.

8.65 (a) Calculer le débit de l'eau à travers le tuyau neuf en fonte représenté dans la figure 8-7. (b) Quelle est la hauteur due à la pression en B situé à 30 m du réservoir A (utiliser la table 3). *Rép.* 99 l/s, 0,582 m.

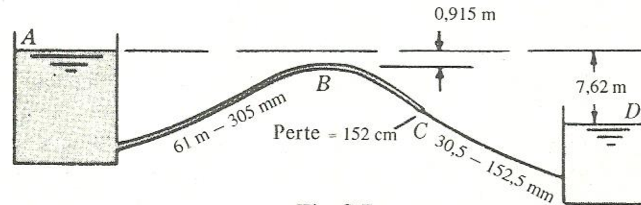


Fig. 8-7

8.66 Résoudre le problème 8.62 en utilisant la formule de Manning. *Rép.* 0,143 m³/s.

8.67 De l'eau à 38 °C s'écoule par le système représenté dans la figure 8-8. Les longueurs des tuyaux de 7,5 cm et 15 cm de diamètre en fonte asphaltée neuve sont respectivement de 50 m et 30 m. Les facteurs de perte pour les accessoires et les vannes sont : coudes de 7,5 cm, $K = 0,40$ chacun; coude de 15 cm, $K = 0,60$ et vanne de 15 cm $K = 3,0$. Calculer le débit en m³/s. *Rép.* 0,014 m³/s.

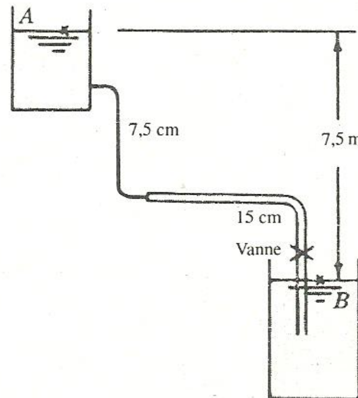


Fig. 8-8

8.68 Si la pompe BC représentée dans la figure 8-9 fournit 51,5 kW au système quand le débit d'eau est de 220 l/s, à quel niveau peut-on disposer le réservoir D? *Rép.* 21,0 m.

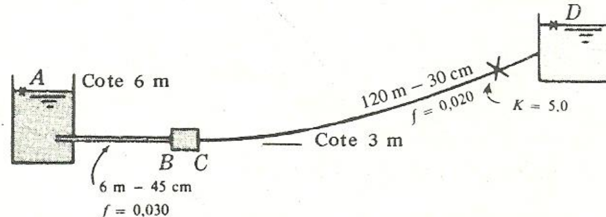


Fig. 8-9

8.69 Une pompe située à la cote 3 m fournit 210 l/s d'eau par un système de tuyaux horizontaux à un réservoir fermé où la surface du liquide est à la cote 6,0 m. La hauteur due à la pression à l'entrée de 30 cm de diamètre de la pompe est de −1,20 m et à la sortie de 15 cm de diamètre de 58,0 m. Le tuyau de 15 cm ($f = 0,030$) a 30 m de long, passant

brutalement à 30 cm ($f = 0{,}020$) sur 180 m et se terminant au réservoir. Une vanne de 30 cm, ($K = 1{,}0$) est située à 30 m du réservoir. Calculer la pression dans le réservoir au-dessus de la surface de l'eau. Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique. *Rép.* 0,86 bar.

8.70 Un tuyau en ciment ($d = 250$ mm) de 915 m de longueur, a un débit d'eau de 0,142 m^3/s. Calculer la perte d'énergie due aux frottements en s'aidant de la formule de Hazen-Williams? *Rép.* 311 kPa.

8.71 Quel diamètre doit-on utiliser pour un tuyau de fonte moyen pour débiter 0,028 3 m^3/s d'eau à 20 °C sur 1 219 m avec une chute de la ligne piézométrique de 21,3 m (utiliser la table 3). *Rép.* $d = 162$ mm.

8.72 La pompe BC fournit de l'eau au réservoir F. On a représenté la ligne piézométrique dans la figure 8-10. Calculer (*a*) la puissance fournie à l'eau par la pompe BC, (*b*) la puissance consommée par la turbine DE et (*c*) le niveau d'eau du réservoir F. *Rép.* 700 kW; 49,5 kW; 89,6 m.

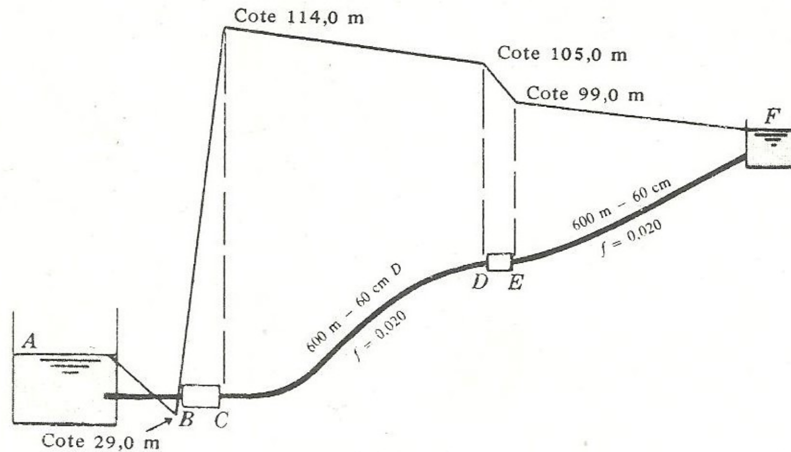


Fig. 8-10

8.73 De l'air est insufflé dans un tuyau usé en fer de 50 mm de diamètre intérieur à la température constante de 20 °C au rythme de 6,67 N/s. À la section A, la pression est de 377 kPa absolus. Quelle va être la pression à 152 m de A dans un tuyau horizontal? Utiliser $\varepsilon = 0{,}250$ mm. *Rép.* 365 kPa.

8.74 Résoudre le problème 8.62 à l'aide du diagramme B-2 (Hazen-Williams). *Rép.* 0,178 m^3/s.

8.75 Résoudre le problème 8.66 à l'aide du diagramme B-3 (Manning). *Rép.* 0,144 m^3/s.

8.76 Un tuyau neuf, en fonte, de diamètre 305 mm, mesure 1 610 m. Déterminer son débit à l'aide de la formule (*19*), sachant que la perte de charge est de 7,47 m. *Rép.* 0,088 m^3/s.

8.77 Résoudre le problème 8.76 à l'aide de la formule (*20*). *Rép.* 0,074 5 m^3/s.

8.78 Résoudre le problème 8.76 à l'aide du diagramme B-2 (Hazen-Williams). *Rép.* 0,087 m^3/s.

8.79 Résoudre le problème 8.77 à l'aide du diagramme B-3 (Manning). *Rép.* 0,074 m^3/s

8.80 Résoudre le problème 8.70 à l'aide du diagramme B-2 (Hazen-Williams). *Rép.* 305 kPa.

8.81 Résoudre le problème 8.70 (tuyau vitrifié) à l'aide du diagramme B-2 (Hazen-Williams). *Rép.* 358 kPa.

8.82 Du gaz carbonique à 38 °C circule dans un tuyau de fer neuf, horizontal, de 102 mm de diamètre et de 61 m de long. La pression à la section amont A est de 8,28 bar manométrique et la vitesse moyenne est de 12,2 m/s. En admettant que la variation de densité est négligeable, quelle est la chute de pression dans les 61 m du tuyau? (La viscosité absolue à 38 °C = 158×10^{-7} Pa · s.) *Rép.* 0,123 bar.

8.83 L'écoulement est laminaire dans un conduit rectangulaire large, de 20 cm de haut. En admettant que la distribution des vitesses vérifie l'équation $v = 48y(1-5y)$, calculer (*a*) le débit par unité de largeur, (*b*) le coefficient de l'énergie cinétique, et (*c*) le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximale. *Rép.* 320 l/s · m; $\alpha = 1{,}543$; 0,67.

8.84 Au laboratoire, on utilise un tuyau de plastique de 25 mm de diamètre pour mettre en évidence l'écoulement laminaire. Si la vitesse critique inférieure doit être de 3, 0 m/s, quelle doit être la viscosité cinématique du liquide à utiliser? *Rép.* 39×10^{-6} m²/s.

8.85 Pour l'écoulement laminaire dans les tuyaux, $f = 64/R_E$. En utilisant ce renseignement, établir l'expression de la vitesse moyenne en fonction de la perte de charge, du diamètre et des autres grandeurs relatives à la question. *Rép.* $V = gd^2h_L/32\nu L$.

8.86 Calculer le débit ayant lieu dans un tuyau de 30 cm de diamètre si l'équation de la distribution des vitesses est $v^2 = 70(y - y^2)$, avec l'origine située à la paroi du tuyau. *Rép.* 0,126 m³/s.

Chapitre 9

Systèmes complexes de conduites

INTRODUCTION

Le chapitre 8 a été consacré aux écoulements dans les conduites fermées mais l'étude s'est limitée aux écoulements à travers de simples conduites de dimension constante. Dans de nombreuses applications pratiques, les problèmes sont plus compliqués car ils mettent en jeu plusieurs conduites ou une seule conduite de taille variable. Le chapitre 9 traite de ces problèmes d'écoulement plus complexes à travers les conduites, des conduites équivalentes en série, en parallèle ou ramifiées, des réseaux de conduites (canalisations).

CONDUITES ÉQUIVALENTES

Une conduite est *équivalente* à une autre ou à un autre système de conduites lorsque, pour une perte de charge donnée, le débit de la conduite équivalente est le même que celui de la conduite initiale ou d'un système initial. On peut établir qu'une conduite est équivalente à une autre (ou à un système de conduite) lorsque, pour un débit donné, on observe la même perte de charge dans la conduite équivalente que la conduite initiale. En réalité il y a un nombre infini de conduites équivalentes pour un système donné de conduites connectées en séries; il faut donc spécifier le diamètre de la conduite équivalente que l'on souhaite obtenir et en déterminer la longueur ou bien, on se donne la longueur de la conduite équivalente dont on a besoin et on trouve le diamètre.

Le calcul des conduites équivalentes est assez direct; il implique la recherche de pertes de charge, les débits et les sections étant connus, ou bien la recherche de débits, les pertes et les sections étant données. De tels calculs se font à l'aide de la formule d'Hazen-Williams (équation (*19*) du chapitre 8). On peut utiliser les diagrammes B-1, B-2, B-3 pour obtenir des solutions rapides mais moins précises. *(On rappelle ici que la formule de Hazen-Williams ne s'applique qu'aux écoulements d'eau.)*

Les problèmes 9.1, 9.2 et 9.3 illustrent les calculs concernant les conduites équivalentes.

CONDUITES EN SÉRIE

Des conduites sont *en série* si elles sont connectées bout à bout de sorte que le fluide s'écoule continûment sans branchement. Le débit volumique, à travers les conduites en série, reste constant.

On traite les problèmes d'écoulement dans les conduites en série en cherchant une conduite équivalente (voir le paragraphe précédent) à laquelle on applique les méthodes décrites au chapitre 8. Les problèmes 9.4, 9.5 et 9.6 illustrent la méthode.

CONDUITES EN PARALLÈLE

Des conduites sont *en parallèle* si elles sont connectées de façon que l'écoulement se divise en deux ou plusieurs branches qui se rejoignent en aval, comme le montre la figure 9-1. Dans cette figure, le fluide circulant dans la conduite AB se partage à la jonction B; une partie du fluide traverse la branche BCE, l'autre, la branche BDE. Les deux conduites se rejoignent en E et le flux passe à travers la conduite unique EF (on notera que la figure 9-1 représente une vue de dessus – les conduites sont donc dans un plan horizontal).

Pour résoudre les problèmes relatifs aux conduites en parallèle, on applique trois principes importants :

(1) Le courant total, entrant dans chaque jonction, doit être égal à celui qui en sort.

(2) La perte de charge entre deux jonctions (par exemple les jonctions B et E dans la figure 9-1) est la même dans toutes les branches connectées à ces jonctions.

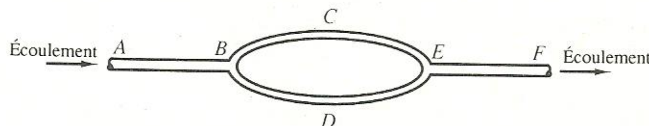


Fig. 9-1 Conduites en parallèle

(3) Dans le domaine des vitesses courantes, le pourcentage du flux total, dans chaque branche, est constant (c'est-à-dire dans les branches BCE et BDE et d'autres pouvant se trouver entre les jonctions B et E) et cela quelles que soient les pertes de charge entre les jonctions.

On peut résoudre généralement les problèmes traitant d'écoulement dans des conduites en parallèle en appliquant les trois principes qui viennent d'être définis (et auxquels il faut satisfaire).

Les problèmes 9.7 à 9.11 illustrent les problèmes de conduites de ce type.

CONDUITES RAMIFIÉES

Des conduites sont dites *ramifiées*, si elles se partagent en deux ou plusieurs autres (ou se combinent pour n'en former qu'une seule), sans se rejoindre en aval. La figure 9-2 montre un exemple simple de système de conduites ramifiées où trois réservoirs, dans des conditions diverses de pression, sont connectés par trois conduites se rejoignant en J. L'écoulement peut se produire du réservoir supérieur gauche vers les deux autres (une conduite se subdivisant en deux) ou bien des deux réservoirs supérieurs vers le réservoir inférieur gauche (deux conduites se rejoignant en une seule). La direction réelle de l'écoulement dépendra (1) des pressions et des cotes des réservoirs, et (2) des diamètres, des longueurs et de la nature des conduits. (Si les réservoirs de la figure 9-2 sont ouverts à l'air libre, toutes les pressions seront égales à la pression atmosphérique.)

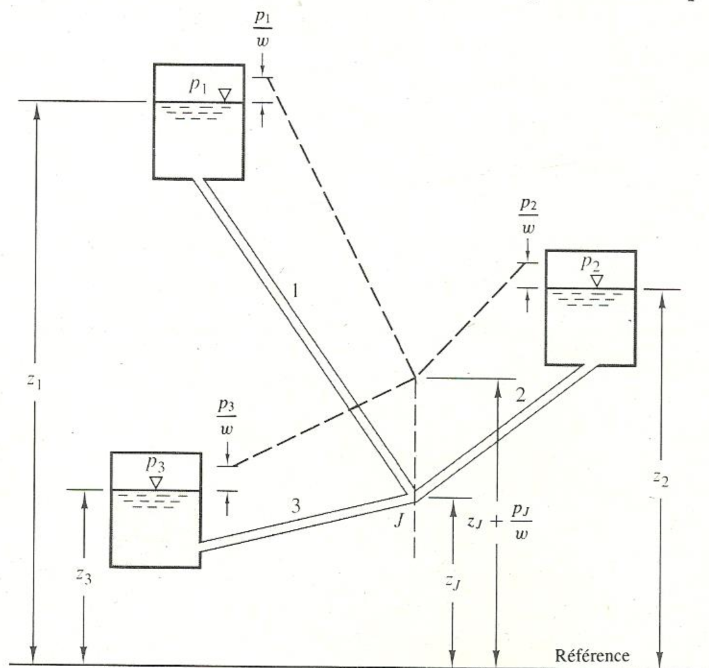


Fig. 9-2 Conduites ramifiées

Le problème général, associé aux conduites ramifiées, est de trouver le débit de chaque conduite alors que d'autres données sont connues (pressions et cotes dans les réservoirs, constantes relatives aux conduites, propriétés du fluide). On résout ce genre de problème en appliquant l'équation de continuité qui spécifie que le courant total, entrant en J, doit être égal au courant qui en sort. Ainsi, sur la figure 9-2, Q_1 doit être égal à $Q_2 + Q_3$ ou $Q_1 + Q_2$ doit être égal à Q_3. Le débit, dans chaque conduite, se calcule à l'aide de formules d'écoulement, telles que celles de Darcy-Weisbach ou de Hazen-Williams faisant intervenir le frottement, les pertes mineures et les différences de cote.

Ces problèmes exigent généralement une résolution par approximations successives. La meilleure méthode consiste à supposer une cote de la ligne piézométrique à la jonction J et à calculer ensuite les débits dans chaque conduite. Si la continuité est respectée à la jonction J (le flux entrant est égal au flux sortant), les débits sont alors corrects. Si la continuité n'est pas satisfaite, on essaie une autre valeur de la cote de la ligne piézométrique à la jonction (plus élevée si le courant d'entrée dans la jonction est trop important, plus faible si le courant de sortie est trop important). Après quelques essais, on obtient habituellement la solution.

Les problèmes 9.13, 9.14 et 9.15 illustrent la méthode utilisée dans le cas des conduites ramifiées.

RÉSEAUX DE CONDUITES

En pratique, beaucoup de canalisations sont constituées de nombreuses conduites connectées, d'une manière complexe, avec plusieurs points d'entrée et de sortie. Par exemple, la configuration de conduites de la figure 9-3 représente un système de distribution d'eau dans une petite ville ou une subdivision. Un tel système est appelé *réseau de conduites* et est, en fait, un ensemble complexe de conduites en parallèle. L'analyse de tels réseaux peut s'avérer complexe, mais il est possible de trouver des solutions en appliquant la *méthode Hardy Cross* du nom de son auteur.

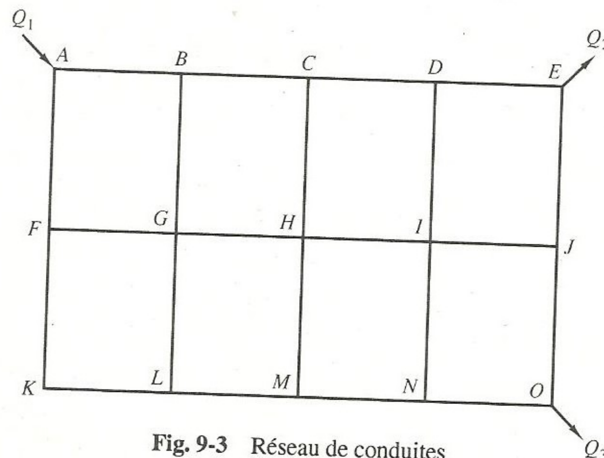


Fig. 9-3 Réseau de conduites

Dans la première étape de l'application de la méthode Hardy-Cross, il s'agit de faire des suppositions sur les écoulements circulant dans chaque conduite du réseau. Elles doivent être faites de façon à satisfaire au premier principe donné plus haut, concernant les conduites en parallèle (le flux entrant à chaque jonction est égal au flux sortant). On fait des hypothèses sur les débits dans chaque branche et on calcule alors les pertes de charge dans chaque branche, en se basant généralement sur la formule de Hazen-Williams.

L'étape suivante consiste à trouver la somme algébrique des pertes de charge dans chaque boucle du réseau (les courants circulant dans une boucle dans le sens des aiguilles d'une montre sont comptés positivement et produisent des pertes de charge positives; les courants circulant en sens inverse sont comptés négativement et produisent des pertes de charges négatives). D'après le deuxième principe, donné ci-dessus, relatif aux conduites en parallèle – les pertes de charge entre deux jonctions sont les mêmes dans toutes les branches – la somme algébrique des pertes de charge, dans chaque boucle, doit être nulle pour que les débits dans les branches de la boucle soient corrects. Donc, si la perte de charge calculée pour chaque boucle du réseau est nulle, les valeurs des débits supposées au départ sont satisfaisantes et le problème est résolu.

La probabilité de formuler une hypothèse initiale correcte pour tous les débits est quasiment nulle. La prochaine étape consistera alors à calculer une *correction de débit* dans chaque boucle du réseau, à partir de l'équation suivante :

$$\Delta = -\frac{\sum(H_L)}{n\sum(H_L/Q_0)} \qquad (1)$$

où Δ = correction du débit d'une boucle;
$\sum(H_L)$ = somme algébrique des pertes de charge de toutes les conduites de la boucle;
n = une quantité dépendant de la formule utilisée pour exprimer les débits ($n = 1{,}85$ pour la formule de Hazen-Williams);
$\sum(H_L/Q_0)$ = sommation des pertes de charge divisées par les débits correspondant à chaque conduite de la boucle.

L'étape finale consiste à utiliser les corrections de débit de chaque boucle afin d'ajuster les débits supposés au début sur chaque conduite et de répéter tout le processus pour les débits ajustés. La méthode est réitérée jusqu'à ce que toutes les corrections (Δ) deviennent nulles ou négligeables.

On démontre l'équation (*1*) dans le problème 9.18 et on donne davantage de détails sur la méthode Hardy-Cross. Les problèmes 9.19, 9.20 et 9.21 en sont une illustration.

Problèmes résolus

9.1 Pour une perte de charge de 5,0 m /1 000 m, et utilisant $C_1 = 100$ pour tous les tuyaux, combien de tuyaux de 20 cm sont équivalents à un tuyau de 40 cm? à un tuyau de 60 cm?

Solution

En se servant du diagramme B-1, pour $S = 5{,}0$ m /1 000 m on a :

Q pour un tuyau de 20 cm = 22 l/s = 0,022 m^3/s.

Q pour un tuyau de 40 cm = 140 l/s = 0,14 m^3/s.

Q pour un tuyau de 60 cm = 380 l/s = 0,38 m^3/s.

Ainsi, il faudrait prendre 140/22, soit 6,4 tuyaux de 20 cm pour avoir l'équivalent hydraulique d'un tuyau de 40 cm de la même rugosité relative. De la même façon, 380/22 ou 17,3 tuyaux de 20 cm sont équivalents à un tuyau de 60 cm pour une perte de charge de 5,0 m /1 000 ou pour toute autre condition relative à la perte de charge.

9.2 On raccorde en série un conduit en ciment de 225 m de longueur et de 300 mm de diamètre à un autre conduit en ciment de 400 m de longueur et de 500 mm de diamètre. Trouver le diamètre du conduit équivalent mesurant 625 m.

Solution

Supposons un débit de 0,1 m^3/s. Pour le conduit de 300 mm de diamètre, débitant 0,1 m^3/s, $h = 0{,}007\,4$ m /m (d'après le diagramme B-2). Pour le conduit de 500 mm de diamètre, débitant 0,1 m^3/s, $h = 0{,}000\,64$ m /m (d'après le diagramme B-2).

$$\text{pertes totales} = (0{,}074 \times 225) + (0{,}000\,64 \times 400) = 1{,}92 \text{ m}.$$

Pour le conduit équivalent mesurant 625 m et ayant ces mêmes pertes :

$$h = \frac{1{,}92}{625} \approx 0{,}003\,1 \text{ m /m}.$$

À partir du diagramme B-2, on obtient pour $Q = 0{,}1$ m^3/s : $d = 360$ mm.

9.3 Quelle longueur de tuyau de 15 cm peut remplacer le système de tuyaux représenté dans la figure 9-4?

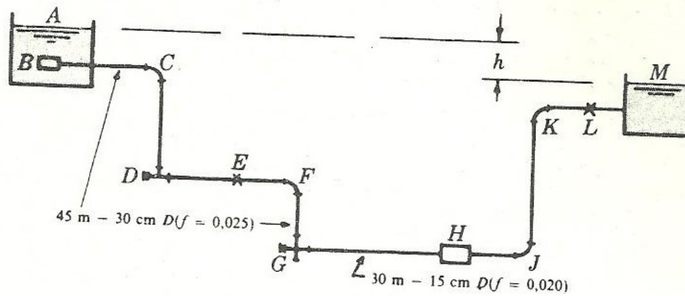


Fig. 9-4

Coefficients K

Filtre B	$= 8{,}0$
Coudes C, F de 300 mm chacun	$= 0{,}5$
Té D de 300 mm	$= 0{,}7$
Vanne E de 300 mm	$= 1{,}0$
Croix G de 300 mm × 150 mm $(\times V_{15}^2/2g)$	$= 0{,}7$
Appareil de mesure H de 150 mm	$= 6{,}0$
Coudes J, K de 150 mm (chacun)	$= 0{,}5$
Vanne L de 150 mm	$= 3{,}0$

Solution

On résoud ce problème en appliquant l'équation de Bernoulli entre A et M avec pour niveau de référence, comme suit :

$$(0+0+h) - \Big(8{,}0 + \underbrace{2\times 0{,}5}_{\text{Coude}} + 0{,}7 + 1{,}0 + 0{,}025\times\frac{45}{0{,}30}\Big)\frac{V_{30}^2}{2g}$$

$$-\Big(0{,}7 + 6{,}0 + \underbrace{2\times 0{,}5}_{\text{Coudes}} + 3{,}0 + \underbrace{1{,}0}_{\text{Sortie}} + 0{,}020\times\frac{30}{0{,}15}\Big)\frac{V_{15}^2}{2g} = (0+0+0)$$

Alors, $h = 14{,}45\dfrac{V_{30}^2}{2g} + 15{,}7\dfrac{V_{15}^2}{2g} = \Big(14{,}45\times\dfrac{1}{16} + 15{,}7\Big)\dfrac{V_{15}^2}{2g} = 16{,}6\dfrac{V_{15}^2}{2g}$.

Pour n'importe quelle valeur de h, la perte de charge est $16{,}6(V_{15}^2 + 2g)$. La perte de charge sur L_E m de tuyau de 15 cm est $f(L_E/d)(V_{15}^2/2g)$. Égalant les deux valeurs,

$$16{,}6\frac{V_{15}^2}{2g} = 0{,}020\frac{L_E}{0{,}15}\frac{V_{15}^2}{2g} \quad \text{et} \quad L_E = 124{,}5 \text{ m.}$$

Les hauteurs dues à la vitesse dans cette égalité s'annulent. On doit se rappeler que l'équivalence hydraulique exacte dépend de f qui varie pour des grands intervalles de variation de la vitesse.

9.4 Un système de tuyaux composé est constitué par 1 800 m de tuyau de 50 cm, 1 200 m de tuyau de 40 cm et 600 m de tuyau de 30 cm de fonte neuve. Replacer le système par (a) un système équivalent de même longueur constitué par un seul tuyau de 40 cm et (b) un système équivalent constitué d'un tuyau de taille équivalente, mais de 3 600 m de long.

Solution

Utiliser $C_1 = 130$ pour un tuyau de fonte neuve.

(a) Puisque la grandeur hydraulique commune pour un système composé est le débit, admettons que la valeur de celui-ci est de 130 l/s (n'importe quelle valeur commode peut servir). Pour utiliser le diagramme B, changer Q_{130} en Q_{100}, c'est-à-dire

$$Q_{100} = (100/130)(130) = 100 \text{ l/s}$$

- $S_{50} = 0{,}64$ m/1 000 m et la perte de charge $= 0{,}64 \times 1{,}8 = 1{,}15$ m (15 %)
- $S_{40} = 1{,}87$ m/1 000 m perte de charge $= 1{,}87 \times 1{,}2 = 2{,}24$ m (27 %)
- $S_{30} = 8{,}0$ m/1 000 m perte de charge $= 8{,}0 \times 0{,}6 = 4{,}80$ m (59 %)

Pour $Q = 130$ l/s : perte de charge totale $= 8{,}19$ m (100,0 %)

Le tuyau équivalent de 40 cm doit transporter 130 l/s avec une perte de charge 8,19 m ($C_1 = 130$).

$$S_{40} = 1{,}87 \text{ m}/1\,000 \text{ m} = \frac{\text{perte de charge en m}}{\text{longueur équivalente en m}} = \frac{8{,}19}{L_E}$$

et $L_E = 4\,380$ m.

(*b*) Les 3 600 m de tuyau, $C_1 = 130$, doivent transporter 130 l/s avec une perte de charge de 8,19 m.

$$S_E = \frac{\text{perte de charge en m}}{\text{longueur en m}} = \frac{8{,}19}{3\,600} = 2{,}28 \text{ m}/1\,000 \text{ m}.$$

Et d'après le diagramme B, utilisant $Q_{100} = 100$ l/s, $D = 38$ cm (approximativement).

9.5 Pour le système composé du problème 9.4, quel sera le débit produit par une perte de charge totale de 21,0 m, (*a*) en utilisant la méthode du tuyau équivalent? (*b*) en utilisant la méthode du pourcentage?

Solution

(*a*) D'après le problème 9.4, le système équivaut à 4 380 m de tuyau de 40 cm. Pour une perte de charge de 21,0 m,

$$S_{40} = 21/4\,380 = 4{,}93 \text{ m}/1\,000 \text{ m et, d'après le diagramme } B,\ Q_{100} = 140 \text{ l/s}.$$

Ainsi,

$$Q_{130} = (130/100)140 = 182 \text{ l/s} \approx 0{,}180 \text{ m}^3/\text{s}.$$

(*b*) La méthode du pourcentage nécessite le calcul de la perte de charge pour un débit supposé Q. Bien qu'on dispose de ces valeurs d'après le problème 9.4, on va effectuer un nouveau calcul, pour servir de vérification à la solution. En admettant que $Q_{130} = 65$ l/s, alors $Q_{100} = (100/130)65 = 50$ l/s et d'après le diagramme B

- $S_{50} = 1{,}35$ m/1 000 m et la perte de charge $= 1{,}35 \times 1{,}8 = 2{,}4$ m (15,7 %)
- $S_{40} = 4{,}0$ m/1 000 m perte de charge $= 4{,}0 \times 1{,}2 = 4{,}8$ m (28,5 %)
- $S_{30} = 17{,}0$ m/1 000 m perte de charge $= 17{,}0 \times 0{,}6 = 10{,}2$ m (55,8 %)

Pour $Q = 65$ l/s : perte de charge totale $= 17{,}4$ m (100,0 %)

Les pourcentages qui apparaissent ici sont les mêmes que ceux qu'on a trouvés dans le problème 9.4. Appliquons ces pourcentages à la perte de charge totale donnée de 21,0 m, on obtient

- $H_{L50} = 21 \times 15{,}7\ \% = 3{,}30$ m, $S = 3{,}30/1\,800 = 1{,}83$ m/1 000 m, $Q = 130/100 \times 142 = 185$ l/s;
- $H_{L40} = 21 \times 28{,}5\ \% = 6{,}00$ m, $S = 6{,}00/1\,200 = 5{,}00$ m/1 000 m, $Q = 130/100 \times 140 = 182$ l/s;
- $H_{L30} = 21 \times 55{,}8\ \% = 11{,}70$ m, $S = 11{,}70/600 = 19{,}50$ m/1 000 m, $Q = 130/100 \times 139 = 181$ l/s.

Le calcul pour un des diamètres est suffisant pour obtenir le débit Q, mais les calculs de vérification donnent l'assurance qu'on n'a pas fait d'erreur.

9.6 L'eau coule d'un réservoir A dans un réservoir B à la cadence de 0,05 m³/s à travers trois tuyaux de ciment, connectés en série (figure 9-5). Trouver la différence de cote H entre les deux réservoirs. On néglige toutes les pertes mineures.

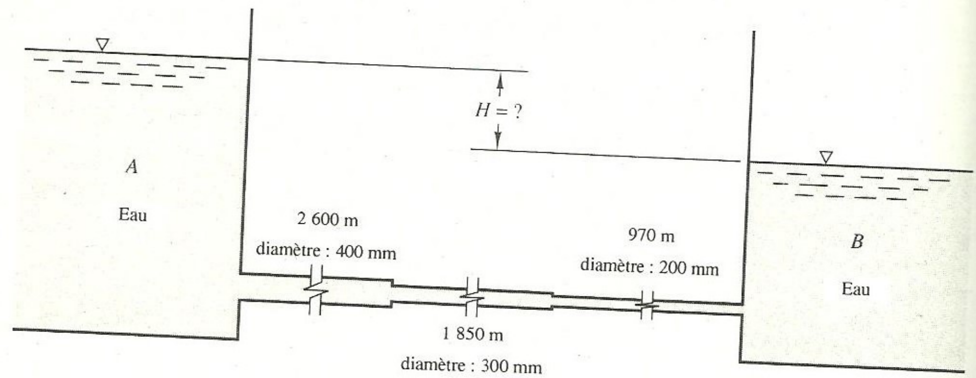


Fig. 9-5

Solution

Pour un tuyau de 400 mm de diamètre et un débit de 0,050 m^3/s, le diagramme B-2 indique que $h = 0{,}000\,51$ m/m. Pour le tuyau de 300 mm de diamètre, $h = 0{,}002\,0$ m/m; pour le tuyau de 200 mm, $h = 0{,}015$ m/m.

$$\text{pertes totales} = (0{,}000\,51 \times 2\,600) + (0{,}002 \times 1\,850) + (0{,}015 \times 970) = 19{,}6 \text{ m}.$$

C'est donc la valeur de H, les pertes mineures étant négligées.

9.7 Pour le système représenté dans la figure 9-6, quand le débit du réservoir A au conduit D est de 140 l/s, la pression en D est de 1,37 bar. Le débit en D doit être augmenté pour atteindre 184 l/s avec une pression de 2,75 bar. Quel est le diamètre du tuyau qu'il faut disposer entre B et C sur 1 500 m (représenté en pointillé) parallèlement au conduit existant de 30 cm de diamètre pour obtenir ce résultat?

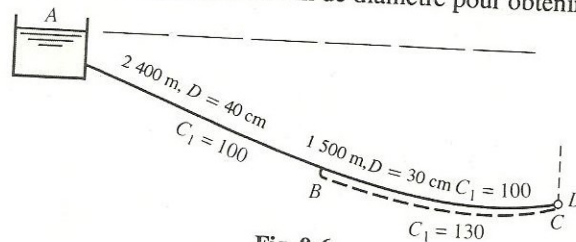


Fig. 9-6

Solution

La cote du réservoir A peut être déterminée en se servant des données contenues dans la première phrase du problème. D'après le diagramme B, pour $Q = 140$ l/s,

$$S_{40} = 4{,}8 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad \text{perte de charge} = 4{,}8 \times 2{,}4 = 11{,}5 \text{ m}$$

$$S_{30} = 20{,}0 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad \text{perte de charge} = 20{,}0 \times 1{,}5 = 30{,}0 \text{ m}$$

$$\text{Perte de charge totale} = 41{,}5 \text{ m}$$

La ligne piézométrique tombe de 41,5 m à l'ordonnée 14,0 m au-dessus de D (équivalente à 1,37 bar). Ainsi le réservoir A est à $(41{,}5 + 14{,}0) = 55{,}5$ m au-dessus de D.

Pour une pression de 2,75 bar, l'ordonnée de la ligne piézométrique en D est à 28,0 m au-dessus de D, c'est-à-dire que la hauteur de charge disponible pour un débit de 184 l/s est de $(55{,}5 - 28{,}0) = 27{,}5$ m.

Dans le tuyau de 40 cm, $Q = 184$ l/s, $S = 8{,}2$ m/1 000 m, la perte de charge $= 8{,}2 \times 2{,}4 = 19{,}7$ m. Ainsi,

$$\text{perte de charge entre } B \text{ et } C = 27{,}5 - 19{,}7 = 7{,}8 \text{ m}.$$

A
Eau
2 600 m
diamètre : 400 mm
$H = ?$
970 m
diamètre : 200 mm
1 850 m
diamètre : 300 mm
B
Eau

Fig. 9-5

Solution

Pour un tuyau de 400 mm de diamètre et un débit de 0,050 m^3/s, le diagramme B-2 indique que $h = 0{,}000\,51$ m/m. Pour le tuyau de 300 mm de diamètre, $h = 0{,}002\,0$ m/m; pour le tuyau de 200 mm, $h = 0{,}015$ m/m.

$$\text{pertes totales} = (0{,}000\,51 \times 2\,600) + (0{,}002 \times 1\,850) + (0{,}015 \times 970) = 19{,}6 \text{ m}.$$

C'est donc la valeur de H, les pertes mineures étant négligées.

9.7 Pour le système représenté dans la figure 9-6, quand le débit du réservoir A au conduit D est de 140 l/s, la pression en D est de 1,37 bar. Le débit en D doit être augmenté pour atteindre 184 l/s avec une pression de 2,75 bar. Quel est le diamètre du tuyau qu'il faut disposer entre B et C sur 1 500 m (représenté en pointillé) parallèlement au conduit existant de 30 cm de diamètre pour obtenir ce résultat?

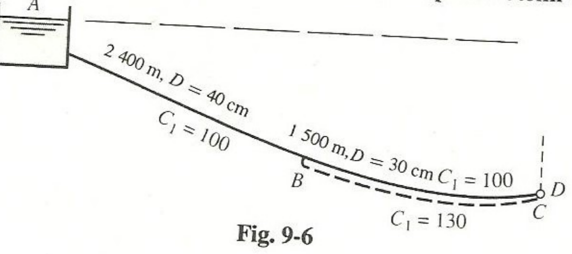


Fig. 9-6

Solution

La cote du réservoir A peut être déterminée en se servant des données contenues dans la première phrase du problème. D'après le diagramme B, pour $Q = 140$ l/s,

$$S_{40} = 4{,}8 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad \text{perte de charge} = 4{,}8 \times 2{,}4 = 11{,}5 \text{ m}$$
$$S_{30} = 20{,}0 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad \text{perte de charge} = 20{,}0 \times 1{,}5 = 30{,}0 \text{ m}$$
$$\text{Perte de charge totale} = 41{,}5 \text{ m}$$

La ligne piézométrique tombe de 41,5 m à l'ordonnée 14,0 m au-dessus de D (équivalente à 1,37 bar). Ainsi le réservoir A est à $(41{,}5 + 14{,}0) = 55{,}5$ m au-dessus de D.

Pour une pression de 2,75 bar, l'ordonnée de la ligne piézométrique en D est à 28,0 m au-dessus de D, c'est-à-dire que la hauteur de charge disponible pour un débit de 184 l/s est de $(55{,}5 - 28{,}0) = 27{,}5$ m.

Dans le tuyau de 40 cm, $Q = 184$ l/s, $S = 8{,}2$ m/1 000 m, la perte de charge $= 8{,}2 \times 2{,}4 = 19{,}7$ m. Ainsi,

$$\text{perte de charge entre } B \text{ et } C = 27{,}5 - 19{,}7 = 7{,}8 \text{ m}.$$

Pour le tuyau existant de 30 cm, $S = 7,8/1\,500 = 5,2$ m/1 000 m, $Q = 68,0$ l/s et le débit dans le nouveau tuyau doit être de $(184,0 - 68,0) = 116,0$ l/s avec une hauteur de charge disponible (chute dans la ligne piézométrique) de 7,8 m entre B et C.

$$S = 7,8/1\,500 = 5,2 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q_{100} = (100/130)116 = 89,3 \text{ l/s}.$$

Le diagramme B donne $D = 34$ cm approximativement (utiliser le tuyau normalisé de diamètre immédiatement supérieur 350 mm).

9.8 Pour le système de tuyaux en parallèle de la figure 9-7, la hauteur de pression en A est de 36,0 m d'eau et la hauteur de pression en E est de 22,0 m d'eau. En admettant que les tuyaux sont dans un plan horizontal, quels sont les débits dans chaque branche en parallèle?

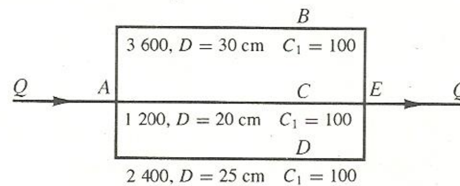


Fig. 9-7

Solution

La chute de la ligne piézométrique entre A et E est $(36 - 22) = 14$ m, en négligeant les petites valeurs des différences des hauteurs de vitesses. On peut calculer les débits si on connaît les pentes des lignes piézométriques. Ainsi, en utilisant le diagramme B,

$$S_{30} = 14/3\,600 = 3,90 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{30} = 58 \text{ l/s}, \quad (42,0\ \%)$$
$$S_{20} = 14/1\,200 = 11,70 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{20} = 35 \text{ l/s}, \quad (25,4\ \%)$$
$$S_{25} = 14/2\,400 = 5,85 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{25} = 45 \text{ l/s}, \quad (32,6\ \%)$$
$$Q \text{ total} = 138 \text{ l/s}, \ (100,0\ \%)$$

9.9 Dans le problème 9.8, si le débit total Q avait été de 280 l/s, quelle serait la perte de charge entre A et E et comment Q se répartirait-il dans les branches? Donner deux solutions, la méthode du pourcentage et la méthode du tuyau équivalent.

Solution

Dans le système en parallèle, la grandeur hydraulique commune est la perte de charge entre les nœuds (AE). La résolution s'effectue comme si le problème 9.8 n'avait pas été résolu.

En admettant que la perte de charge entre A et E est de 8,0 m, on peut trouver les débits pour la perte de charge supposée d'après le diagramme B.

$$S_{30} = 8/3\,600 = 2,22 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{30} = 45 \text{ l/s}, \quad (42,8\ \%)$$
$$S_{20} = 8/1\,200 = 6,67 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{20} = 27 \text{ l/s}, \quad (25,7\ \%)$$
$$S_{25} = 8/2\,400 = 3,33 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{25} = 33 \text{ l/s}, \quad (31,5\ \%)$$
$$Q \text{ total} = 105 \text{ l/s}, \ (100,0\ \%)$$

(*a*) **Méthode du pourcentage**

Le débit dans chaque branche du réseau en parallèle est un pourcentage constant du débit total traversant le système pour n'importe quelle valeur raisonnable de la perte de charge d'un nœud à l'autre. Les pourcentages

rencontrés ci-dessus sont en accord avec ceux qui ont été trouvés dans le problème 9.8 (avec la précision du diagramme). Appliquons ces pourcentages du débit donné de 280 l/s :

$$Q_{30} = 42{,}8\ \% \times 280 = 120{,}0\ \text{l/s}, \quad S_{30} = 15{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m}, \quad (H_L)_{A-E} = 54\ \text{m}$$
$$Q_{20} = 25{,}7\ \% \times 280 = 72{,}0\ \text{l/s}, \quad S_{20} = 43{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m}, \quad (H_L)_{A-E} = 52\ \text{m}$$
$$Q_{25} = 31{,}5\ \% \times 280 = 88{,}0\ \text{l/s}, \quad S_{25} = 22{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m}, \quad (H_L)_{A-E} = 53\ \text{m}$$
$$Q = 280{,}0\ \text{l/s}$$

Cette méthode fournit une vérification des calculs, comme il est indiqué ci-dessus pour les trois valeurs de la perte de charge. C'est la méthode recommandée.

(*b*) **Méthode du tuyau équivalent** (utiliser un tuyau de 30 cm de diamètre)

On doit faire le calcul des débits pour une perte de charge supposée, comme dans la première méthode. En utilisant les valeurs trouvées ci-dessus, pour une perte de charge de 8,0 m, de débit produit est de 105 l/s. Le tuyau équivalent doit avoir le même débit pour une perte de charge de 8,0 m, c'est-à-dire :

$$Q = 105\ \text{l/s}, \; H_L = 8{,}0\ \text{m} \quad \text{et} \quad S_{30} = 11{,}8/1\,000\ \text{m},$$

obtenu à partir du diagramme B.

De $S = h/L$, $11{,}8 = 8{,}0\ \text{m}/L_E$ m et $L_E = 678$ m (de tuyau de 30 cm, $C_1 = 100$).
Pour le débit donné de 280 l/s, $S_{30} = 80$ m/1 000 m et la perte de charge entre A et $E = 80 \times 678/1\,000 = 54$ m.
Avec cette perte de charge, on peut calculer les trois valeurs des débits.

9.10 Pour le système représenté dans la figure 9-8, (*a*) quel est le débit quand la chute de la ligne piézométrique de A à B est de 60 cm? (*b*) quelle est le longueur que doit avoir un tuyau de 50 cm ($C_1 = 120$) pour être équivalent à la section AB?

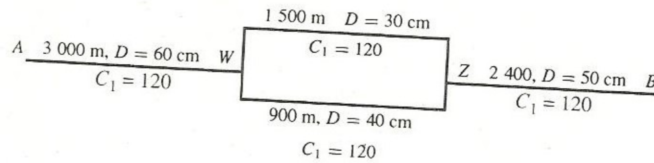


Fig. 9-8

Solution

(*a*) On obtient la solution la plus directe en donnant une valeur arbitraire à la chute de la ligne piézométrique (perte de charge) de W à Z et en tirant les conclusions logiques de cette hypothèse.
Par exemple, admettons que la perte de charge est de 9 m de W à Z. Alors, d'après le diagramme B,

$$S_{30} = 9/1\,500 = 6{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m} \quad \text{et} \quad Q_{30} = (120/100)72 = 86{,}4\ \text{l/s} \quad (26{,}4\ \%)$$
$$S_{40} = 9/900 = 10{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m} \quad \text{et} \quad Q_{40} = (120/100)200 = 240{,}0\ \text{l/s} \quad (73{,}6\ \%)$$
$$Q\ \text{total} = 326{,}4\ \text{l/s} \quad (100{,}0\ \%)$$

On peut calculer la perte de charge de A à B à partir de ce débit total de 326,4 l/s. Pour pouvoir se servir du diagramme B, utiliser $Q_{100} = (100/120)326{,}4 = 272{,}0$ l/s.

de A à W, $S_{60} = 2{,}6\ \text{m}/1\,000\ \text{m}$, $H_L = 2{,}6\,\dfrac{3\,000}{1\,000} = 7{,}8\ \text{m}$, (24,0 %)
de W à Z, (supposé) $= 9{,}0$ m, (28,0 %)
de Z à B, $S_{50} = 6{,}5\ \text{m}/1\,000\ \text{m}$, $H_L = 6{,}5\,\dfrac{2\,400}{1\,000} = 15{,}6\ \text{m}$, (48,0 %)

perte de charge totale (pour $Q = 326{,}4$ l/s) $= 32{,}4$ m, (100,0 %)

Appliquant ces pourcentages à la perte de charge donnée de 60 cm, on obtient

$$(H_L)_{A-W}(\text{réelle}) = 60 \times 24\,\% = 14{,}4\ \text{m} \qquad S_{60} = \frac{14{,}4}{3\,000} = 4{,}8\ \text{m}/1\,000\ \text{m};$$

$$(H_L)_{W-Z}(\text{réelle}) = 60 \times 28\,\% = 16{,}8\ \text{m}$$

$$(H_L)_{Z-B}(\text{réelle}) = 60 \times 48\,\% = 28{,}8\ \text{m} \qquad S_{50} = \frac{28{,}8}{2\,400} = 12\ \text{m}/1\,000\ \text{m}.$$

D'après le diagramme B, le débit dans le tuyau de 60 cm est de $(120/100)(380) = 456$ l/s. Pour le vérifier, dans le tuyau de 50 cm, le débit sera $Q = (120/100)(380) = 456$ l/s.
Le débit se répartit dans le circuit WZ selon les pourcentages calculés ci-dessus, à savoir 26 % et 74 %.

(*b*) En utilisant les renseignements ci-dessus pour le système de A à B, un débit de 326,4 l/s produit une chute de la ligne piézométrique de 32,4 m. Pour un débit de 326,4 l/s dans un tuyau de 50 cm, $C_1 = 120$

$$S_{50} = 6{,}0\ \text{m}/1\,000\ \text{m} = 32{,}4/L_E \quad \text{soit} \quad L_E = 5\,400\ \text{m}$$

9.11 Le système de conduites en parallèle (figure 9-9) débite 0,850 m^3/s dans les conduites AB et EF. Si toutes les conduites sont en ciment, quel est le débit dans les conduites BCE et BDE?

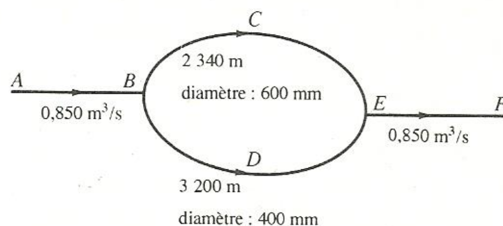


Fig. 9-9

Solution

Supposons une perte de charge de 1,00 m entre B et E. Pour la conduite BCE, $h = 1{,}00/2\,340 = 0{,}43 \times 10^{-3}$ m/m. À partir du diagramme B-2, pour $d = 600$ mm, $Q_{BCE} = 0{,}133$ m^3/s. Pour la conduite BDE, $h = 1{,}00/3\,200 = 0{,}31 \times 10^{-3}$ m/m et $Q_{BDE} = 0{,}038$ m^3/s. Si la perte de charge, supposée entre B et E (1,00 m) est correcte, la somme des débits, à travers BCE et BDE, doit être égale au débit total. Mais :

$$Q_{BCE} + Q_{BDE} = 0{,}133 + 0{,}038 = 0{,}171\ \text{m}^3/\text{s} \neq 0{,}850\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Les deux valeurs étant différentes, cela signifie que la perte de charge supposée (1,00 m) est incorrecte; toutefois les débits seront dans le même rapport que pour une perte de charge de 1,00 m. Donc :

$$Q_{BCE} = \left(\frac{0{,}133}{0{,}171}\right)(0{,}85) = 0{,}661\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_{BDE} = \left(\frac{0{,}038}{0{,}171}\right)(0{,}85) = 0{,}189\ \text{m}^3/\text{s}.$$

9.12 Dans la figure 9-10, quel est le système de plus grande capacité $ABCD$ ou $EDGH$ ($C_1 = 120$ pour les tuyaux)?

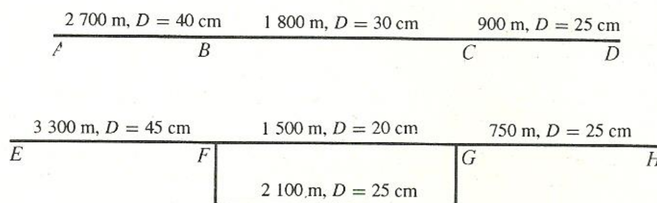


Fig. 9-10

Solution

Admettons que $Q = 90$ l/s dans $ABCD$. Alors, en utilisant la règle à calcul hydraulique,

$$\begin{aligned}
S_{40} &= 1{,}6 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, & H_L &= 1{,}6(2\,700/1\,000) = 4{,}3 \text{ m}\\
S_{30} &= 6{,}5 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, & H_L &= 6{,}5(1\,800/1\,000) = 11{,}7 \text{ m}\\
S_{25} &= 15{,}0 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, & H_L &= 15{,}0(\ 900/1\,000) = 13{,}5 \text{ m}\\
\text{Pour } Q &= 90 \text{ l/s}, & &\text{perte de charge totale} = 29{,}5 \text{ m}
\end{aligned}$$

Pour la boucle FG de $EFGH$, trouver le pourcentage d'un débit quelconque Q qui circule dans chaque branche. Admettons que la perte de charge de F à G est de 8,0 m. Alors

$$\begin{aligned}
S_{20} &= 8/1\,500 = 5{,}33 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q_{20} = 24{,}0 \text{ l/s} \qquad (40{,}7\ \%)\\
S_{25} &= 8/2\,100 = 3{,}81 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q_{25} = 35{,}0 \text{ l/s} \qquad (59{,}3\ \%)\\
& \qquad\qquad Q_{100}\text{total} = 59{,}0 \text{ l/s} \qquad (100{,}0\ \%)
\end{aligned}$$

Pour comparer les capacités, on peut suivre plusieurs voies. Plutôt que d'utiliser des tuyaux équivalents, on peut calculer la perte de charge produite par un débit de 90 l/s dans chacun des deux systèmes. Le système présentant la perte de charge la plus petite a la plus grande capacité. Ou alors on peut calculer le débit Q produit par une chute identique de la ligne piézométrique pour les deux systèmes. Le système de tuyaux présentant le plus grand débit a la capacité la plus grande. Dans ce problème, comparons la perte de charge de 29,5 m dans $ABCD$ quand $Q = 90$ l/s avec la valeur de la perte de charge obtenue pour $EFGH$ avec le même débit :

(*a*) Pour $Q_{45} = 75$ l/s, $S_{45} = 0{,}90$ m/1 000 m, $(H_L)_{EF} = 3{,}0$ m.

(*b*) Pour $Q_{20} = 40{,}7\ \% \times 75 = 30{,}5$ l/s, $S_{20} = 8{,}7$ m/1 000 m, $(H_L)_{FG} = 13{,}1$ m,
ou pour $Q_{25} = 59{,}3\ \% \times 75 = 44{,}5$ l/s, $S_{25} = 6{,}2$ m/1 000 m, $(H_L)_{FG} = 13{,}0$ m.

(*c*) Pour $Q_{25} = 75$ l/s, $S_{25} = 15{,}5$ m/1 000 m, $(H_L)_{GH} = 11{,}6$ m.
La perte de charge totale de E à $H = 27{,}7$ m.
Par conséquent, le système $EFGH$ a la capacité la plus grande.

9.13 Dans la figure 9-11, quand la pompe Y a produit 140 l/s, trouver les hauteurs de pression en A et B. Tracer la ligne piézométrique.

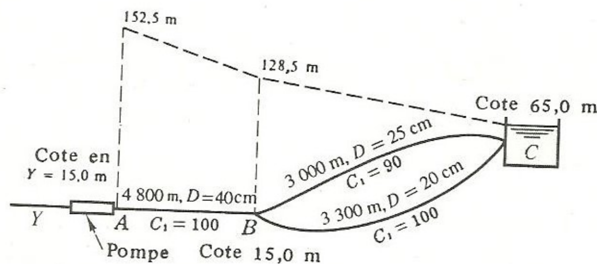


Fig. 9-11

Solution

Ramener la section (boucle) BC à un tuyau équivalent de 40 cm de diamètre $C_1 = 100$. En procédant ainsi, on dispose immédiatement d'un tuyau de taille unique de la même rugosité relative pour toutes les conditions d'écoulement. En admettant que la chute de la ligne piézométrique est de 7 m entre B et C, on obtient les valeurs suivantes.

$$\begin{aligned}
S_{25} &= 7/3\,000 = 2{,}23 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, & Q_{25} &= 27{,}0 \text{ l/s}\\
S_{20} &= 7/3\,300 = 2{,}12 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, & Q_{20} &= 14{,}0 \text{ l/s}\\
& & Q \text{ total} &= 41{,}0 \text{ l/s}
\end{aligned}$$

Pour $Q = 41{,}0$ l/s et $D = 40$ cm ($C_1 = 100$), $S_{40} = 0{,}55$ m/1 000 m $= 7{,}0/L_E$ et $L_E = 12\,700$ m.

Le débit de la pompe au réservoir est de 140 l/s. Pour une longueur de $(12\,700 + 4\,800) = 17\,500$ m de tuyau équivalent de 40 cm, la perte de charge entre H et C est de

$$S_{40} = 5{,}00 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \qquad H_L = 5{,}00(17\,500/1\,000) = 87{,}5 \text{ m.}$$

Ainsi, l'ordonnée de la ligne piézométrique en A est de $(65{,}0 + 87{,}5) = 152{,}5$ m comme le montre la figure. La chute de A à $B = 5{,}00(4\,800/1\,000) = 24{,}0$ m et l'ordonnée en B est $(152{,}5 - 24{,}0) = 128{,}5$ m.

$$\text{Hauteur due à la pression en } A = 152{,}5 - 15{,}0 = 137{,}5 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur due à la pression en } B = 128{,}5 - 15{,}0 = 113{,}5 \text{ m}$$

9.14 Dans la figure 9-12, le débit du réservoir A est de 430 l/s. Calculer la puissance consommée par la turbine DE si la hauteur de pression en E est de $-3{,}0$ m. Tracer les lignes piézométriques.

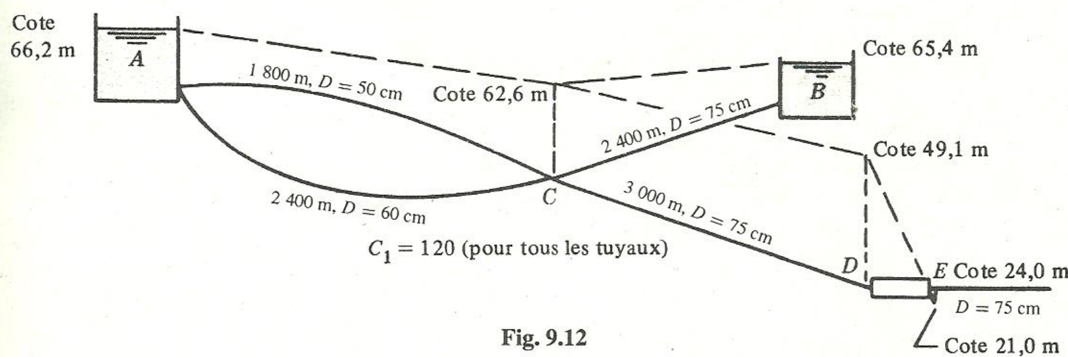


Fig. 9.12

Solution

L'analyse d'un système de tuyaux ramifié doit se concentrer sur le point de jonction C. D'abord, la somme des débits allant vers C doit être égale à la somme des débits quittant C. Ensuite, la hauteur de la ligne piézométrique en C donne souvent la clef de la solution.

Pour calculer la hauteur de la ligne piézométrique en C, admettons que la perte de charge de A à C soit de 7,0 m. Alors

$$S_{50} = 7/1\,800 = 3{,}90 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{50} = 216 \text{ l/s} \quad (42{,}6\ \%)$$

$$S_{60} = 7/2\,400 = 2{,}92 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{60} = 290 \text{ l/s} \quad (57{,}4\ \%)$$

$$Q \text{ total} = 506 \text{ l/s} \quad (100{,}0\ \%)$$

Appliquant ces pourcentages au débit donné de 430 l/s de A à C, en tenant compte du fait que pour $C_1 = 100$, $Q = (100/120)430 = 358$ l/s.

$$Q_{50} = 151 \text{ l/s} \qquad S_{50} = 2{,}00 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad H_L = 3{,}6 \text{ m}$$

$$Q_{60} = 207 \text{ l/s} \qquad S_{60} = 1{,}50 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad H_L = 3{,}6 \text{ m (accord)}$$

Ainsi la hauteur de la ligne piézométrique en $C = 66{,}2 - 3{,}6 = 62{,}6$ m. Avec ce renseignement, la ligne piézométrique tombe de 2,8 m de B à C. Alors,

$$S_{75} = 2{,}8/2\,400 = 1{,}17 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q_{(100)} = 340 \text{ l/s}, \quad Q_{(120)} = (120/100)340 = 408 \text{ l/s}$$

De plus, le débit sortant en C = le débit entrant en C.

$$Q_{C-D} = 430 + 408 \approx 840 \text{ l/s} = 0{,}84 \text{ m}^3/\text{s}$$

pour $C_1 = 120$, et pour $C_1 = 100$, $Q = 698$ l/s.

Ainsi $S_{75} = 4{,}5$ m/1 000 m, $(H_L)_{C-D} = 13{,}5$ m et la hauteur de la ligne piézométrique en $D = 62{,}6 - 13{,}5 = 49{,}1$ m.

$$\text{La puissance consommée } (kW) = 9{,}81(0{,}84)(49{,}1 - 21{,}0) \approx 230 \text{ kW}$$

9.15 Dans la figure 9-13, la vanne F est partiellement fermée, créant une perte de charge de 1,00 m quand le débit qui y circule est de 28 l/s. Quelle est la longueur du tuyau de 25 cm qui part du réservoir A?

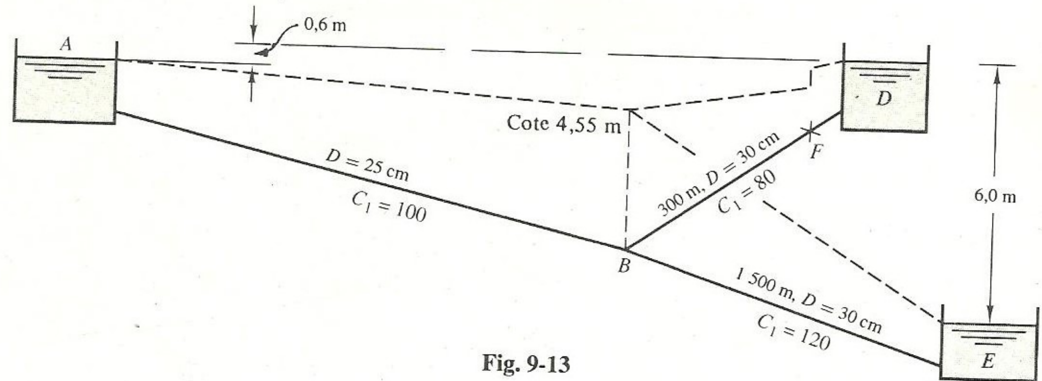


Fig. 9-13

Solution

Pour DB, le débit $Q = 28$ l/s ($C_1 = 80$) et pour $C_1 = 100$, $Q = (100/80)28 = 35{,}0$ l/s et $S_{30} = 1{,}50$ m/1 000 m.

La perte totale de charge de D à $B = 1{,}50(300/1\,000) + 1{,}00 = 1{,}45$ m, donnant une hauteur piézométrique en B de 4,55 m (prenant pour hauteur en E zéro).

Pour BE, $S_{30} = (4{,}55 - 0{,}0)/1\,500 = 3{,}03$ m/1 000 m et $Q = 52$ l/s ($C_1 = 100$), pour $C_1 = 120$, $Q = 62{,}4$ l/s.

Pour AB, le débit $Q = 62{,}4 - 28{,}0 = 34{,}4$ l/s et $S_{25} = 3{,}50$ m/1 000 m (diagramme B).

Alors, d'après $S = h/L$, $L = h/S = (0{,}85/3{,}50)1\,000 = 243$ m.

9.16 De l'eau doit être pompée au rythme de 55 l/s au moyen d'un tuyau de fonte neuf de 1 200 m de long, vers un réservoir dont la surface est à 36 m au-dessus du niveau d'eau d'en bas. Le prix annuel du pompage de 55 l/s est de 164 F par m de charge, et le prix annuel du tuyau est 10 % de son prix initial. Admettons que le tuyau de fonte en place coûte 1 400,00 F par tonne, pour des tuyaux de type B (50 m de charge) ayant les «poids» suivants (par mètre) : 15 cm, 49,5 kg, 20 cm, 71,0 kg; 25 cm, 95,0 kg; 30 cm, 122,0 kg et 40 cm, 186,0 kg. Calculer le diamètre du tuyau le plus économique pour cette installation.

Solution

On va donner en détail les calculs relatifs au tuyau de 30 cm, en donnant un résumé de tous les résultats dans le tableau ci-après. La perte de charge dans un tuyau de 30 cm, utilisant $C_1 = 130$ pour un tuyau en fonte neuf, est de 2,10 m/1 000 m.

Ainsi, la charge contre laquelle la pompe travaille $= 36 + 1\,200(2{,}10/10\,000) = 38{,}5$ m.

$$\text{coût du pompage} = 38{,}5 \times 164 \text{ F} = 6\,314 \text{ F par an.}$$

$$\text{coût du tuyau en place} = 1\,400 \text{ F} \times 1\,200 \times 122/1\,000 = 204\,960 \text{ F}$$

$$\text{coût annuel du tuyau} = 10\,\% \times 204\,960 \text{ F} = 20\,496 \text{ F.}$$

En reportant ces valeurs dans un tableau pour faire la comparaison avec les coûts des autres tailles considérées, on obtient le tableau suivant

D cm	S m/1 000 m	Perte de charge en m	Hauteur totale de pompage $= 36 + H_L$	Prix annuel (en F) pour 55 l/s pompage + prix du tuyau = total		
15	65,0	78,0	114,0 m	18 700	8 300	27 000
20	16,2	19,5	55,5 m	9 100	11 900	21 000
25	5,3	6,4	42,4 m	6 940	16 000	22 940
30	2,1	2,5	38,5 m	6 310	20 500	26 810
40	0,6	0,7	36,7 m	6 020	31 300	37 320

La taille la plus économique est 20 cm.

9.17 Pour les hauteurs constantes des surfaces d'eau représentées dans la figure 9-14(a) quels seront les débits?

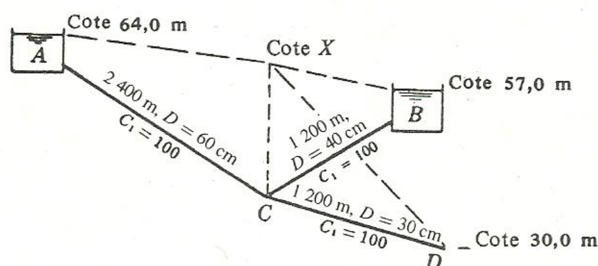


Fig. 9-14(a)

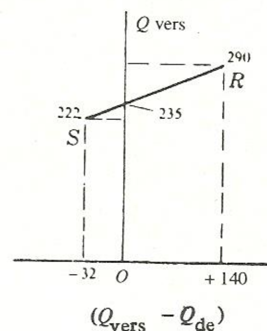


Fig. 9-14(b)

Solution

Puisque l'on ne connaît pas la hauteur de la ligne piézométrique en C (tous les débits étant inconnus), on va résoudre le problème par approximations successives. Une valeur commode à donner à la hauteur de la ligne piézométrique en C est la valeur 57 m. Avec cette valeur, le débit en direction ou au départ de B va être nul, réduisant ainsi le nombre des opérations à effectuer.

Pour une hauteur de la ligne piézométrique en C de 57,0 m. :

$$S_{60} = (64 - 57)/2\,400 = 2{,}91 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q = 290 \text{ l/s vers } C$$
$$S_{30} = (57 - 30)/1\,200 = 22{,}5 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q = 150 \text{ l/s de } C$$

L'examen de ces valeurs du débit indique que la ligne piézométrique doit être plus haute, réduisant ainsi le débit au départ de A et augmentant celui allant vers D aussi bien que celui allant vers B. Pour tenter d'encadrer la hauteur correcte en C, prenons pour valeur 60 m. Ainsi la hauteur en $C = 60$ m.

$$S_{60} = (64 - 60)/2\,400 = 1{,}67 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q = 222 \text{ l/s vers } C$$
$$S_{40} = (60 - 57)/1\,200 = 2{,}50 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q = 98 \text{ l/s de } C$$
$$S_{30} = (60 - 30)/1\,200 = 25{,}0 \text{ m}/1\,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad Q = 156 \text{ l/s de } C$$

Le débit partant de $C = 254$ l/s dépasse le débit entrant en C qui est de 222 l/s. En utilisant la figure 9-14 pour obtenir une indication permettant de faire une troisième hypothèse raisonnable, joindre les points qu'on a reportés R et S. La ligne ainsi tracée coupe l'abscisse zéro $(Q_{\text{entrant}} - Q_{\text{sortant}}) = 0$ en $Q_{\text{entrant}} = 235$ l/s (à l'échelle). Les valeurs reportées ne variant pas linéairement, prenons un débit en direction de C un peu plus grand, disons 245 l/s.

Pour $Q = 245$ l/s vers C, $S_{60} = 2{,}00$ m/1 000 m et $(H_L)_{A-C} = 2{,}00 \times 2\,400/1\,000 = 4{,}8$ m et la hauteur de la ligne piézométrique en C vaut $64{,}0 - 4{,}8 = 59{,}2$ m. Alors,

$$S_{40} = 2{,}20/1\,200 = 1{,}83 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q = 80 \text{ l/s de } C$$
$$S_{30} = 29{,}2/1\,200 = 24{,}30 \text{ m}/1\,000 \text{ m}, \quad Q = 155 \text{ l/s de } C$$

$$Q \text{ total de } C = 235 \text{ l/s}$$

Ces débits résultants s'accordent suffisamment pour ne pas nécessiter plus de calculs. (Une hauteur de la ligne piézométrique de 59,5 cm donne pour les débits qui entrent et sortent de C des valeurs approximativement égales à 238 l/s).

9.18 Établir l'expression utilisée pour étudier les débits dans un réseau de tuyaux.

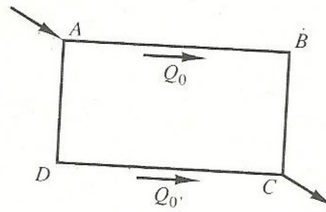


Fig. 9-15

Solution

La méthode d'approche, imaginée par Hardy Cross, consiste à donner des valeurs aux débits circulant dans tout le réseau, et ensuite à rétablir l'équilibre entre les pertes de charge calculées. Dans la boucle simple du système de tuyaux représenté figure 9-15, pour avoir le débit exact dans chaque branche de la boucle, on écrit :

$$(H_L)_{ABC} = (H_L)_{ADC} \quad \text{ou} \quad (H_L)_{ABC} - (H_L)_{ADC} = 0 \tag{1}$$

Pour utiliser cette relation, la formule du débit à employer doit être écrite sous la forme $H_L = kQ^n$. D'après la formule de Hazen-Williams, cette expression est $H_L = kQ^{1,85}$.

Mais, puisqu'on a donné des valeurs Q_0, le débit correct dans n'importe quel tuyau du réseau peut s'exprimer sous la forme $Q = Q_0 + \Delta$ où Δ est la correction à appliquer à Q_0. Alors, en utilisant le théorème du binôme,

$$kQ^{1,85} = k(Q_0 + \Delta)^{1,85} = k(Q_0^{1,85} + 1{,}85Q_0^{1,85-1}\Delta + \ldots)$$

On peut négliger les termes au-delà du second puisque Δ est petit par rapport à Q_0.

Pour la boucle ci-dessus, reportant dans l'expression (1), nous obtenons

$$k(Q_0^{1,85} + 1{,}85Q_0^{1,85}\Delta) - k(Q_{0'}^{1,85} + 1{,}85Q_{0'}^{0,85}\Delta) = 0$$
$$k(Q_0^{1,85} - Q_{0'}^{1,85}) + 1{,}85k(Q_0^{0,85} - Q_{0'}^{0,85})\Delta = 0$$

Résolvons en Δ,

$$\Delta = -\frac{k(Q_0^{1,85} - Q_0^{1,85})}{1{,}85k(Q_0^{0,85} - Q_{0'}^{0,85})} \tag{2}$$

En général, on peut écrire, pour une boucle plus compliquée

$$\Delta = -\frac{\sum kQ_0^{1,85}}{1{,}85\sum kQ_0^{0,85}} \tag{3}$$

Mais $kQ_0^{1,85} = H_L$ et $kQ_0^{0,85} = H_L/Q_0$. Par conséquent

$$\Delta = -\frac{\sum(H_L)}{1{,}85\sum(H_L/Q_0)} \quad \text{pour chaque boucle de réseau.} \tag{4}$$

En utilisant l'expression (4), on doit prendre des précautions en ce qui concerne le signe du numérateur. L'expression (1) indique que les débits s'effectuant dans le sens des aiguilles d'une montre peuvent être considérés comme produisant des pertes de charge dans le sens des aiguilles d'une montre, et que des débits s'effectuant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, des pertes de charge dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Cela signifie qu'on donne le signe moins à toutes les conditions relatives au sens contraire des aiguilles d'une montre mises en jeu dans une boucle, en particulier le débit Q et la perte de charge H_L. Ainsi, pour éviter les erreurs, on doit observer cette règle des signes au cours de la résolution. D'autre part, le dénominateur de (4) est toujours positif.

Les deux prochains problèmes vont donner des exemples de la manière dont on doit utiliser l'équation (4).

9.19 Le système de boucle représenté dans la figure 9-16 est le même que celui qui est apparu dans une partie du problème 9.10. Pour $Q = 456$ l/s (débit total), calculer le débit dans chaque branche de la boucle, en utilisant le procédé de Hardy Cross.

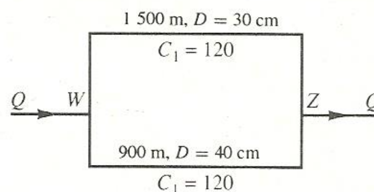


Fig. 9-16

Solution

On suppose que les débits Q_{30} et Q_{40} sont respectivement de 150 l/s et de 306 l/s. On prépare le tableau suivant, (notons les -206 l/s), on calcule les valeurs de S à l'aide du diagramme B, alors on obtient $H_L = S \times L$ et (H_L/Q_0). Notons que les grandes valeurs de $\sum H_L$ indiquent que les débits Q ne sont pas bien équilibrés. (Les valeurs ont été choisies délibérément pour produire ces grandes valeurs de $\sum H_L$, afin d'illustrer le procédé).

D cm	L m	Q_0 supposé l/s	S m/1000 m	H_L,m	H_L/Q_0	Δ	Q_1
30	1 500	150	17,0	25,5	0,170	−27,8	122,2
40	900	−306	−16,0	−14,4	0,046	−27,8	−333,8
		Σ = 456		Σ = +11,1	0,216		456,0

$$\Delta = -\frac{\Sigma H_L}{1{,}85\Sigma(H_L/Q)} = -\frac{11{,}1}{1{,}85(0{,}216)} = -27{,}8 \text{ l/s}$$

Alors les valeurs de Q_1, deviennent $(150 - 27{,}8) = 122{,}2$ l/s et $(-306{,}0 - 27{,}8) = -333{,}8$ l/s. En répétant à nouveau le calcul, on obtient

S	H_L	H_L/Q_1	Δ	Q_2
11,0	16,5	0,135	+3,2	125,4
−19,0	−17,1	0,051	+3,2	330,6
	Σ = −0,6	0,186		456,0

Aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire, puisque le diagramme B_1 ne peut dépasser une précision de 3,0 l/s. Idéalement ΣH_L devrait valoir zéro, mais on atteint rarement ce but.

On notera que dans le problème 9.10 la quantité circulant dans le tuyau de 30 cm est de 26 % des 456 l/s soit 120,4 l/s ce qui constitue une vérification satisfaisante.

9.20 De l'eau circule dans le système de tuyaux représenté à la figure 9-17, avec certains débits mesurés indiqués sur le schéma. Au point A, la cote est de 60 m et la hauteur de pression est de 45,0 m. La cote en I est de 30,0 m. Calculer (a) le débit en tous les points du réseau et (b) la hauteur de pression en I (utiliser $C_1 = 100$).

Solution

(a) On peut donner les grandes lignes d'approche comme suit :

(1) Donner n'importe quelle valeur au débit, procédant boucle par boucle – dans le cas présent, par les boucles I, II, III et IV. Examiner soigneusement chaque point de branchement, pour que le débit entrant soit égal au débit sortant (principe de continuité).

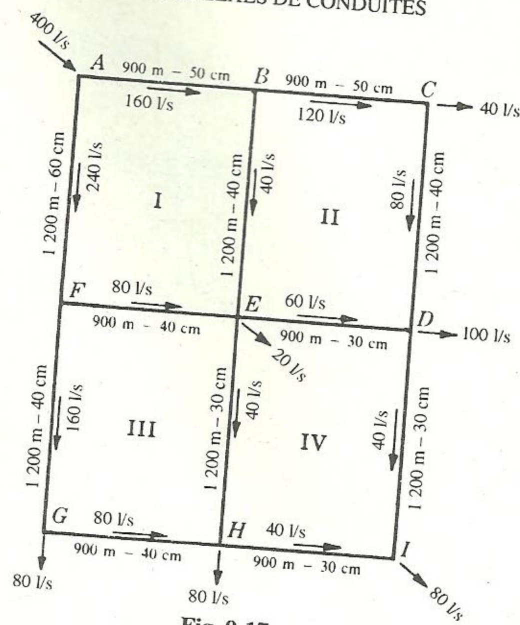


Fig. 9-17

(2) Calculer pour chaque boucle, la perte de charge de chaque tuyau qui la constitue (à l'aide d'une équation ou par le diagramme).

(3) Faire la somme des pertes de charge le long de chaque boucle, en prenant garde au signe (si la somme des pertes de charge de la boucle est nulle, les débits Q_1 sont corrects).

(4) Faire la somme des valeurs H_L/Q_1, et calculer la correction Δ à apporter à chaque boucle.

(5) Appliquer la valeur Δ à chaque tuyau, augmentant ou diminuant ainsi les Q supposés. Pour les cas où un tuyau forme deux boucles, la différence entre les deux Δ doit être appliquée comme correction effective du débit Q_1 (voir l'application ci-dessous).

(6) Continuer ainsi jusqu'à ce que les valeurs Δ soient négligeables.

Les étapes indiquées ci-dessus ont été effectuées et les résultats inscrits dans une table. Les valeurs de H_L s'obtiennent en multipliant S par le nombre de 1 000 m du tuyau considéré. On a aussi inscrit dans la table les valeurs du quotient de H_L par Q.

On calcule les termes Δ (expression (*4*) problème 9.18) comme suit :

$$\Delta_{\text{I}} = \frac{-(-1,434)}{1,85(0,058\,4)} = +13,3 \qquad \Delta_{\text{III}} = \frac{-(-7,310)}{1,85(0,163\,0)} = +24,2$$

$$\Delta_{\text{II}} = \frac{-(-1,140)}{1,85(0,116\,3)} = +\ 5,3 \qquad \Delta_{\text{IV}} = \frac{-(+2,070)}{1,85(0,229\,5)} = -4,9$$

Pour la ligne EF de la boucle I, le terme Δ net vaut $(\Delta_{\text{I}} - \Delta_{\text{III}})$, ou $[+13,3 - (+24,2)] = -10,9$. On observera qu'on associe le Δ de la boucle I avec le Δ de la boucle III puisque la ligne EF est commune aux deux boucles. D'une manière semblable, pour la ligne FE de la boucle III, le terme Δ net vaut $(\Delta_{\text{III}} - \Delta_{\text{I}})$ ou $[+24,2 - (+13,3)] = +10,9$. Notons que les Δ nets ont la même grandeur mais *des signes opposés*. On peut le comprendre facilement puisque la circulation dans EF s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre dans la boucle I, tandis que la circulation FE dans la boucle III s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

En calculant les valeurs de Q_2 pour le deuxième calcul, $Q_{AB} = (160,0 + 13,3) = 173$ l/s tandis que $Q_{EF} = (-80,0 - 10,9) = 91$ l/s et $Q_{FA} = (-240,0 + 13,3) = 227$ l/s.

On continue ce procédé jusqu'à ce que les termes Δ n'aient plus de sens par rapport à la précision attendue, en gardant présent à l'esprit la précision des valeurs de C_1. On se reportera à la dernière colonne du tableau de la page suivante pour avoir les valeurs finales de Q dans les différentes canalisations.

Tronçon	D,cm	L,m	Q_1,l/s (supposé)	S m/1 000 m	H_L,m	(H_L/Q_1)	Δ	Q_2
AB	50	900	160	2,20	1,980	0,012 4	+13,3	173,3
BE	40	1 200	40	0,50	0,600	0,015 0	+13,3 − (5,3) = +8,0	48,0
EF	40	900	−80	−1,90	−1,710	0,021 4	+13,3 − (24,2) = −10,9	−90,9
FA	60	1 200	−240	−1,92	−2,304	0,009 6	+13,3	−226,7
					Σ = −1,434	0,058 4		
BC	50	900	120	1,30	1,170	0,009 8	+5,3	125,3
CD	40	1 200	80	1,90	2,160	0,027 0	+5,3	85,3
DE	30	900	−60	−4,30	−3,870	0,064 5	+5,3 − (4,9) = +10,2	−49,8
EB	40	1 200	−40	−0,50	−0,600	0,015 0	+5,3 − (13,3) = −8,0	−48,0
					Σ = −1,140	0,116 3		
FE	40	900	80	1,90	1,710	0,021 4	+24,2 − (13,3) = +10,9	90,9
EH	30	1 200	40	2,00	2,400	0,060 0	+24,2 − (−4,9) = +29,1	69,1
HG	40	900	−80	−1,80	−1,620	0,020 3	+24,2	−55,8
GF	40	1 200	−160	−6,50	−9,800	0,061 3	+24,2	−135,8
					Σ = −7,310	0,163 0		
ED	30	900	60	4,30	3,870	0,064 5	−4,9 − (5,3) = −10,2	49,8
DI	30	1 200	40	2,00	2,400	0,060 0	−4,9	35,1
IH	30	900	−40	−2,00	−1,800	0,045 0	−4,9	−44,9
HE	30	1 200	−40	−2,00	−2,400	0,060 0	−4,9 − (24,2) = −29,1	−69,1
					Σ = +2,070	0,229 5		

Tronçon	Q_2	S	H_L	H_L/Q	Δ
AB	173,3	2,70	2,430	0,014 0	+7,2
BE	48,0	0,70	0,840	0,017 5	+7,2 − (−1,2) = +8,4
EF	−90,9	−2,30	−2,070	0,022 8	+7,2 − (−6,4) = +13,6
FA	−226,7	−1,70	−2,040	0,009 0	+7,2
			Σ = −0,840	0,063 3	
BC	125,3	1,40	1,260	0,010 1	−1,2
CD	85,3	2,10	2,520	0,029 5	−1,2
DE	−49,8	−3,00	−2,700	0,054 2	−1,2 − 8,9 = −10,1
EB	−48,0	−0,70	−0,840	0,017 5	−1,2 − 7,2 = −8,4
			Σ = +0,240	0,111 3	
FE	90,9	2,30	2,070	0,022 8	−6,4 − 7,2 = −13,6
EH	69,1	5,50	6,600	0,095 5	−6,4 − 8,9 = −15,3
HG	−55,8	−0,91	−0,819	0,014 7	−6,4
GF	−135,8	−4,80	−5,760	0,042 4	−6,4
			Σ = +2,091	0,175 4	
ED	49,8	3,00	2,700	0,054 2	+8,9 − (−1,2) = +10,1
DI	35,1	1,61	1,932	0,055 0	+8,9
IH	−44,9	−2,50	−2,250	0,050 1	+8,9
HE	−69,1	−5,50	−6,600	0,095 5	+8,9 − (−6,4) = +15,3
			Σ = −4,218	0,254 8	

Puisque les valeurs des sommes des pertes de charge sont petites pour toutes les boucles, on peut considérer que les débits inscrits dans la dernière colonne du tableau ci-après sont corrects compte tenu de la précision attendue. Le lecteur peut s'exercer en calculant la valeur suivante de Δ, puis Q_5, etc.

(*b*) La hauteur de la ligne piézométrique en A vaut $(60{,}0 + 45{,}0) = 105{,}0$ m. On peut calculer la perte de charge jusqu'en I le long de n'importe quel chemin allant de A à I, en ajoutant les pertes de charge de la manière habituelle, c'est-à-dire dans la direction de la circulation. En utilisant $ABEHI$, nous obtenons $(H_L)_{AI} = (2{,}520 + 1{,}116 + 4{,}200 + 1{,}440) = 9{,}276$ m. Pour le vérifier, en utilisant $ABEDI$, $H_L = (2{,}520 + 1{,}116 + 3{,}780 + 3{,}000) = 10{,}416$ m. En utilisant la valeur 9,8 m, nous obtenons la hauteur de la ligne piézométrique en $I = (105{,}0 - 9{,}8) = 95{,}2$ m. D'où la hauteur due à la pression en $I = (15{,}2 - 30{,}0) = 65{,}2$ m.

Tronçon	Q_3	S	H_L	H_L/Q	Δ	Q_4
AB	180,5	2,80	2,520	0,014 0	−1,1	179,4
BE	56,4	0,93	1,116	0,019 8	−1,1 − 4,9 = −6,0	50,4
EF	−77,3	−1,76	−1,584	0,020 5	−1,1 − 4,8 = −5,9	−83,2
FA	−219,5	−1,60	−1,920	0,008 7	−1,1	−220,6
			$\Sigma = +0{,}132$	0,063 0		
BC	124,1	1,41	1,269	0,010 2	+4,9	129,0
CD	84,1	2,10	2,520	0,030 0	+4,9	89,0
DE	−59,9	−4,20	−3,780	0,063 1	+4,9 − (−2,5) = +7,4	−52,5
EB	−56,4	−0,93	−1,116	0,019 8	+4,9 − (−1,1) = +6,0	−50,4
			$\Sigma = -1{,}107$	0,123 1		
FE	77,3	1,76	1,584	0,020 5	+4,8 − (−1,1) = +5,9	83,2
EH	53,8	3,50	4,200	0,078 1	+4,8 − (−2,5) = +7,3	61,1
HG	−62,2	−1,20	−1,080	0,017 4	+4,8	−57,4
GF	−142,2	−5,10	−6,120	0,043 0	+4,8	−137,4
			$\Sigma = -1{,}416$	0,159 0		
ED	59,9	4,20	3,780	0,063 1	−2,5 − 4,9 = −7,4	52,5
DI	44,0	2,50	3,000	0,068 2	−2,5	41,5
IH	−35,1	−1,60	−1,440	0,041 0	−2,5	−37,6
HE	−53,8	−3,50	−4,200	0,078 1	−2,5 − 4,8 = −7,3	−61,1
			$\Sigma = +1{,}140$	0,250 4		

9.21 Le réseau de conduites de la figure 9-18 représente une rampe d'arrosage. Trouver le débit d'eau dans chaque conduite. On suppose que $C = 120$ pour toutes les conduites.

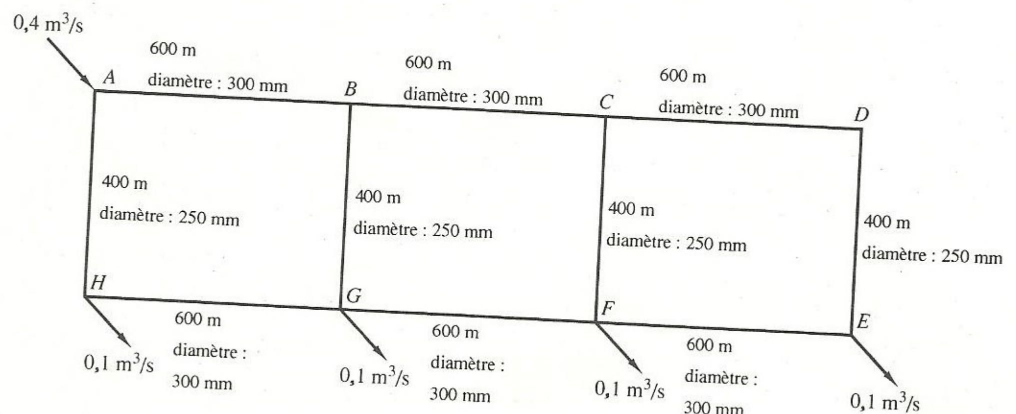


Fig. 9-18

Solution

Conduite	D (mm)	L (m)	$Q_{\text{supposé}}$ (m^3/s)	S (m/m)	L_H (m)	L_H/Q	Δ	Q_{nouveau}
AB	300	600	0,200	0,027	16,20	81,0	0,011	0,211
BG	250	400	0,100	0,017 5	7,00	70,0	−0,003	0,097
GH	300	600	−0,100	−0,007 4	−4,44	44,4	0,011	−0,089
HA	250	400	−0,200	−0,064	−25,60	128,0	0,011	−0,189
					−6,84	323,4		
BC	300	600	0,100	0,007 4	4,44	44,4	0,014	0,114
CF	250	400	0,050	0,004 9	1,96	39,2	0,014	0,064
FG	300	600	−0,100	−0,007 4	−4,44	44,4	0,014	−0,086
GB	250	400	−0,100	−0,017 5	−7,00	70,0	0,003	−0,097
					−5,04	198,0		
CD	300	600	0,050	0,002 0	1,20	24,0	0,000	0,050
DE	250	400	0,050	0,004 9	1,96	39,2	0,000	0,050
EF	300	600	−0,050	−0,002 0	−1,20	24,0	0,000	−0,050
FC	250	400	−0,050	−0,004 9	−1,96	39,2	−0,014	−0,064
					0,00	126,4		

$$\Delta Q_{\mathrm{I}} = -(-6{,}84)/[(1{,}85)(323{,}4)] = 0{,}011$$
$$\Delta Q_{\mathrm{II}} = -(-5{,}04)/[(1{,}85)(198{,}0)] = 0{,}014$$
$$\Delta Q_{\mathrm{III}} = -0{,}00/[(1{,}85)(126{,}4)] = 0{,}00$$

Conduite	S	L_H	L_H/Q	Δ	Q_{nouveau}
AB	0,029 5	17,70	83,9	0,004	0,215
BG	0,017	6,80	70,1	0,001	0,098
GH	−0,005 9	−3,54	39,8	0,004	−0,085
HA	−0,058	−23,20	122,8	0,004	−0,185
		−2,24	316,6		
BC	0,009 5	5,70	50,0	0,003	0,117
CF	0,007 9	3,16	49,4	−0,002	0,062
FG	−0,005 6	−3,36	39,1	0,003	−0,083
GB	−0,017	−6,80	70,1	−0,001	−0,098
		−1,30	208,6		
CD	0,002 0	1,20	24,0	0,005	0,055
DE	0,004 9	1,96	39,2	0,005	0,055
EF	−0,002 0	−1,20	24,0	0,005	−0,045
FC	−0,007 9	−3,16	49,4	0,002	−0,062
		−1,20	136,6		

$$\Delta Q_{\mathrm{I}} = -(-2{,}24)/[(1{,}85)(316{,}6)] = 0{,}004$$
$$\Delta Q_{\mathrm{II}} = -(-1{,}30)/[(1{,}85)(208{,}5)] = 0{,}003$$
$$\Delta Q_{\mathrm{III}} = -(-1{,}20)/[(1{,}85)(136{,}6)] = 0{,}005$$

Conduite	S	L_H	L_H/Q	Δ	Q_{nouveau}
AB	0,031	18,60	86,5	0,000	0,215
BG	0,017 2	6,88	70,2	−0,003	0,095
GH	0,005 5	−3,30	38,8	0,000	−0,085
HA	0,056	−22,40	121,1	0,000	−0,185
		−0,22	316,6		
BC	0,010	6,00	51,3	0,003	0,120
CF	0,007 5	3,00	48,4	0,002	0,064
FG	0,005 2	−3,12	37,6	0,003	−0,080
GB	0,017 2	−6,88	70,2	0,003	−0,095
		−1,00	207,5		
CD	0,002 4	1,44	26,2	0,001	0,056
DE	0,005 9	2,36	42,9	0,001	0,056
EF	0,001 7	−1,02	22,7	0,001	−0,044
FC	0,007 5	−3,00	48,4	−0,002	−0,064
		−0,22	140,2		

$$\Delta Q_{\text{I}} = -(-0{,}22)/[(1{,}85)(316{,}6)] = 0{,}000$$
$$\Delta Q_{\text{II}} = -(-1{,}00)/[(1{,}85)(207{,}5)] = 0{,}003$$
$$\Delta Q_{\text{III}} = -(-0{,}22)/[(1{,}85)(140{,}2)] = 0{,}001$$

Problèmes supplémentaires

9.22 Utilisant le diagramme B-1, calculer le débit dans un tuyau de 406 mm pour une chute de la ligne piézométrique de 1,136 m pour 1 km. (Utiliser $C_1 = 100$)). *Rép.* 0,066 m^3/s.

9.23 Si le tuyau du problème 9.22 avait été un tuyau de fonte neuve, quel aurait été le débit? *Rép.* 0,088 m^3/s.

9.24 Au cours de l'essai d'un tuyau de fonte de 500 mm, le débit permanent a été de 0,175 m^3/s et la ligne piézométrique est tombée de 1,22 m sur une longueur de tuyau de 610 m. Quelle est la valeur à prendre pour C_1? *Rép.* 107.

9.25 On donne un conduit en ciment ($L = 4\,000$ m, $d = 100$ mm). Déterminer le diamètre du conduit équivalent, sachant que la longueur équivalente vaut 1 000 m. *Rép.* 760 mm.

9.26 Quelle est la taille du tuyau de fonte qu'il faut prendre pour avoir un débit de 0,552 m^3/s sur 1 829 m avec une perte de charge de 9,14 m? *Rép.* 600 mm.

9.27 On doit disposer d'un débit de 0,52 m^3/s dans un tuyau de fonte usé ($C_1 = 100$) quand la pente de la ligne piézométrique est de 1,0 m/ 1 000 m. Théoriquement, combien aurait-on besoin de tuyaux de 40 cm? de 50 cm? de 60 cm? de 90 cm? *Rép.* 8,97; 5,07; 3,06; 1.

9.28 Vérifier les rapports du problème 9.27 en utilisant un débit de 520 l/s en supposant n'importe quelle pente pour la ligne piézométrique.

9.29 Quelle perte de charge dans un tuyau de fonte neuf de 400 mm produit le même débit que celui qui a lieu dans un tuyau neuf de 500 mm pour une chute de la ligne piézométrique de 1,0 m/1 000 m? *Rép.* 2,9 m/1 000 m.

9.30 Un réservoir A débite de l'eau dans un réservoir B (figure 9-19) au rythme de 0,020 m^3/s, à travers trois conduits en série. Trouver la différence de cote entre les réservoirs. On néglige les pertes mineures. *Rép.* 16,6 m.

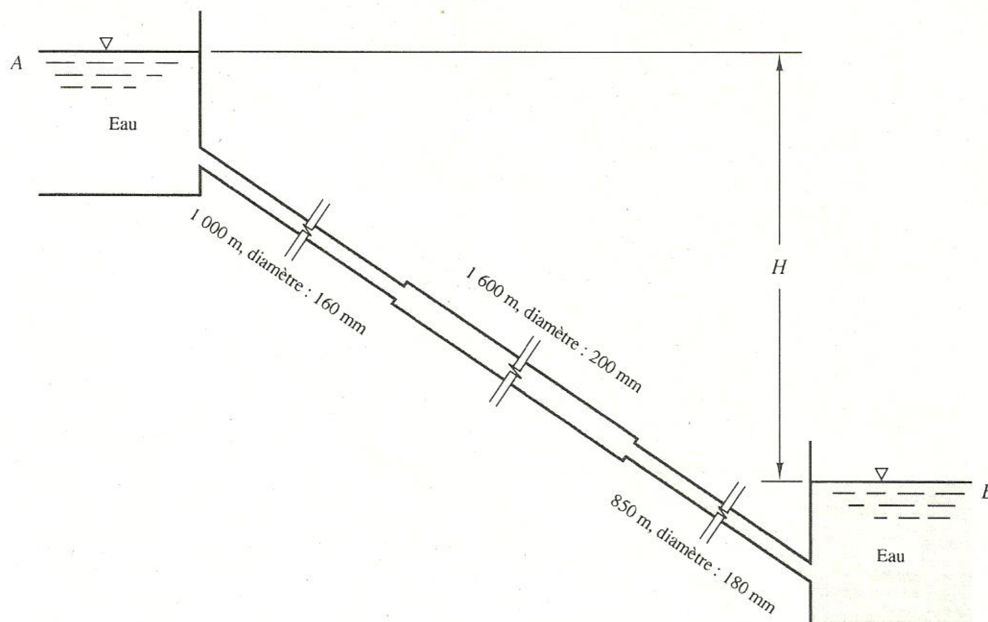


Fig. 9-19

9.31 Le tuyau composé $ABCD$ est constitué par 6 100 m de tuyau de 40 cm, 3 050 m de tuyau de 30 cm et de 1 520 m de tuyau de 20 cm ($C_1 = 100$). (*a*) Calculer le débit quand la perte de charge est de 61 m de A à D. (*b*) Quel est le diamètre que doit avoir le tuyau de 1 520 m de long disposé parallèlement au tuyau existant de 20 cm et le rejoignant aux points C et D pour que la nouvelle section C-D soit équivalente à la section ABC (prendre $C_1 = 100$)? (*c*) Si 2 440 m de tuyau de 30 cm étaient disposés de C à D, parallèlement au tuyau de 20 cm, quelle serait la perte de charge totale de A à D quand $Q = 0{,}085$ m^3/s? *Rép.* 0,061 m^3/s; 168 mm; 41 m.

9.32 Le tuyau composé $ABCD$ est constitué par 3 000 m de tuyau de 50 cm, 2 400 m de tuyau de 40 cm, et L m de tuyau de 30 cm ($C_1 = 120$). Quelle est la longueur L rendant les tuyaux $ABCD$ équivalents à un tuyau de 37,5 cm ayant 4 900 m de long ($C_1 = 100$)? Si la longueur du tuyau de 30 cm disposé entre C et D était de 900 m, quel serait le débit pour une perte de charge de 40 m de A à D? *Rép.* 1 320 m, 0,18 m^3/s.

9.33 À quelle longueur de tuyau de 200 mm de diamètre, 900 m de tuyau de 250 mm de diamètre, 450 m de tuyau de 200 mm de diamètre et 150 m de tuyau de 150 mm de diamètre sont-ils équivalents? (Toutes les valeurs de $C_1 = 120$). *Rép.* 1 320 m.

9.34 Deux conduites sont connectées en série. Le débit d'eau qui les traverse vaut 0,14 m^3/s et la perte de charge totale pour les deux est de 14,10 m. Chaque tuyau a une longueur de 300 m. Le diamètre d'un des tuyaux est de 300 mm. Quel est le diamètre de l'autre? On néglige les pertes mineures. *Rép.* 250 mm.

9.35 Les réservoirs A et D sont reliés par 2 400 m de tuyau de 50 cm (A-B), 1 800 m de 40 cm (B-C) et 600 m de tuyau de taille inconnue (C-D). La différence des niveaux dans les réservoirs est de 25 m. (*a*) Calculer la taille du tuyau CD de façon que 0,18 m^3/s circulent de A à D, en utilisant $C_1 = 120$ pour tous les tuyaux. (*b*) Quel sera le débit produit si le tuyau CD a 350 mm de diamètre et si un tuyau de 300 mm est relié à B, doublant BCD et ayant 2 700 m de long? *Rép.* 32 cm, 0,26 m^3/s.

9.36 Un système de conduites ($C_1 = 120$) est constitué par 3 000 m de tuyau de 75 cm (AB), 2 400 m de tuyau de 60 cm (BC) et de C à D par deux tuyaux de 40 cm en parallèle, chacun de 1 800 m de long. (*a*) Pour un débit de 360 l/s de A à D, quelle est la perte de charge? (*b*) Si on ferme la vanne d'un des tuyaux de 40 cm, quelle serait la variation de la perte de charge pour le même débit? *Rép.* 21,2 m, variation = 31,1 m.

9.37 Dans la figure 9-20, pour une hauteur de pression en D de 30 m, (*a*) Calculer la puissance fournie à la turbine DE. (*b*) Si le tuyau en pointillé était installé (900 m, 600 mm), quelle serait la puissance dont pourrait disposer la turbine si le débit était de 0,54 m^3/s ($C_1 = 120$)? *Rép.* 105 kW, 152 kW.

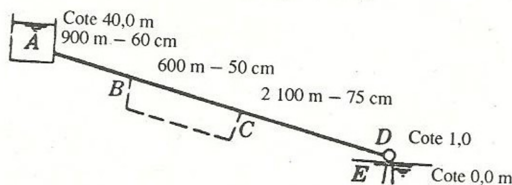


Fig. 9-20

9.38 Dans la figure 9-21, quand les hauteurs de pression en A et B sont respectivement de 3,0 m et 90,0 m, la pompe AB ajoute 73,5 kW au système représenté. Quelle hauteur peut-on maintenir dans le réservoir D? *Rép.* 47 m.

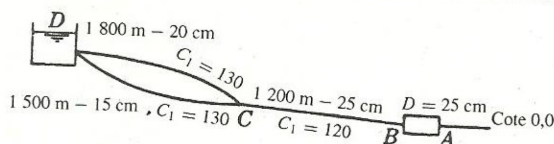


Fig. 9-21

9.39 La figure 9-22 représente un système de conduites en parallèle. Les pressions aux points A et E valent respectivement 70,0 m et 46,0 m. Calculer le débit d'eau dans chaque branche de la boucle. On suppose que $C = 120$ pour toutes les conduites. *Rép.* 0,105 m^3/s; 0,056 m^3/s; 0, 070 m^3/s.

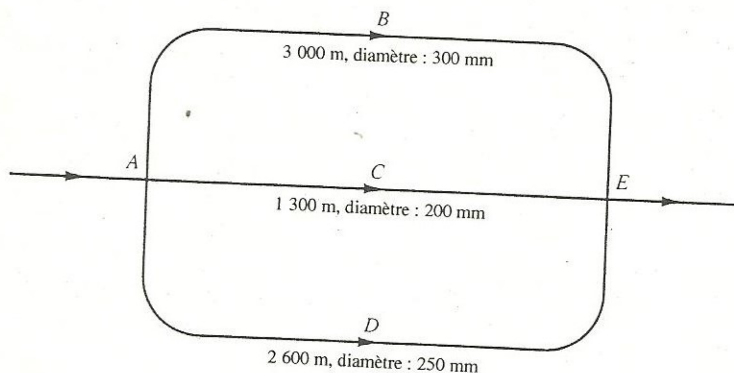


Fig. 9-22

9.40 Il est nécessaire de fournir 0,6 m^3/s au point D, dans la figure 9-23 à la pression de 2,75 bar. Calculer la pression en A. *Rép.* 3,3 bar.

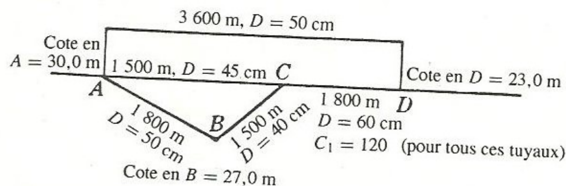


Fig. 9-23

9.41 (*a*) Dans la figure 9-24, la pression dans l'arrivée d'eau D est de 2,06 bar quand le débit venant de A est de 0,25 m^3/s. Les vannes B et C sont fermées. Trouver la hauteur du réservoir A. (*b*) Le débit et la pression donnés en (*a*) sont inchangés mais la vanne C est ouverte à fond tandis que la vanne B n'est ouverte qu'en partie : si la nouvelle hauteur du réservoir est de 64 m, quelle est la perte occasionnée par la vanne B? *Rép.* cote 68 m; 5,8 m.

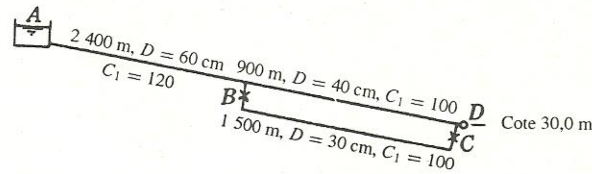


Fig. 9-24

9.42 Calculer le débit de chacun des tuyaux du système représenté dans la figure 9-25. *Rép.* 0,19 m^3/s; 0,14 m^3/s; 0,05 m^3/s.

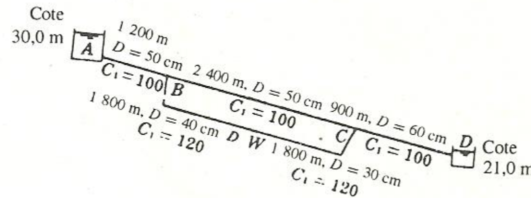


Fig. 9-25

9.43 La pompe XY à la cote 6,0 m débite 0,12 m^3/s dans 1 800 m de tuyaux de fonte neuf YW de diamètre 400 mm. La pression de sortie en Y est de 2, 65 bar. En W deux tuyaux se branchent au tuyau de 400 mm, l'un de 750 m de long et de 300 mm de diamètre ($C_1 = 100$) allant au réservoir A dont la vanne est à la cote 30,0 m et l'autre de 600 m de long et de 250 mm de diamètre ($C_1 = 130$) allant au réservoir B. Calculer la cote de B et les débits entrant et sortant des réservoirs.
Rép. cote 7,1 m; 0,035 m^3/s; 0,155 m^3/s.

9.44 Quand $Q_{ED} = Q_{DC} = 0{,}28$ m^3/s calculer la pression au monomètre en E en bar et la hauteur du réservoir B dans la figure 9-26. *Rép.* 5,16 bar, 54 m.

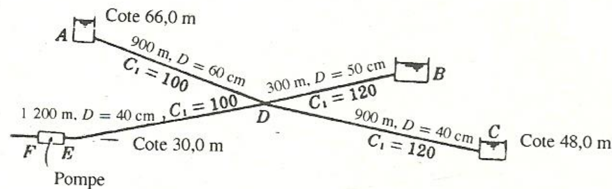


Fig. 9-26

9.45 Le débit d'eau à travers le système de la figure 9-27 est de 0,050 m^3/s avec une perte de charge totale de 9,0 m. Déterminer le diamètre de la conduite A ($C = 120$ pour toutes les conduites). *Rép.* 180 mm.

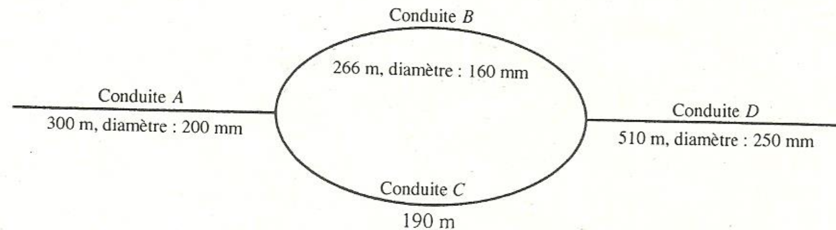


Fig. 9-27

9.46 Dans la figure 9-28, de l'eau circule dans le tuyau de 90 cm au rythme de 900 l/s. Calculer la puissance de la pompe XA (78,5 % de rendement) produisant les débits et les hauteurs du système si la hauteur de pression en X est de zéro. (Tracer les lignes piézométriques.) *Rép.* 200 kW.

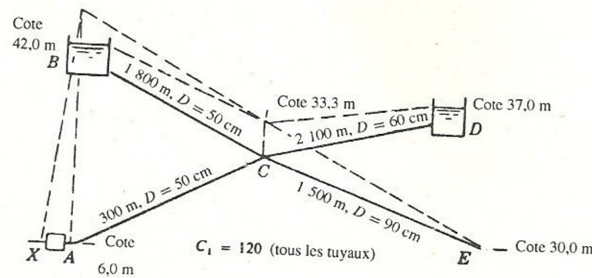


Fig. 9-28

9.47 Quelle quantité d'eau doit fournir la pompe quand le débit dans le tuyau de 900 mm est de 1,31 m^3/s et quelle est la hauteur due à la pression en A dans la figure 9-29 *Rép.* 1,10 m^3/s; 58 m.

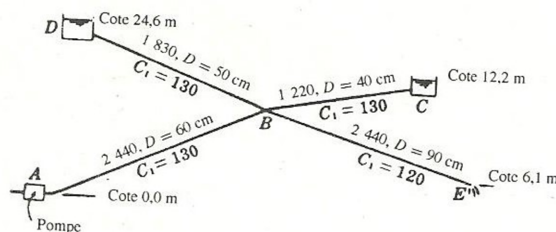


Fig. 9-29

9.48 La hauteur due à la pression en A dans la pompe AB est de 36,0 m quand la puissance est de 103 kW (Figure 9-30). La perte de charge dans la vanne Z est de 3,0 m. Trouver tous les débits et la hauteur du réservoir T. Tracer les lignes piézométriques. *Rép.* $Q_{AW} = Q_{SB} = 0{,}36$ m^3/s; $Q_{SR} = 0{,}064$ m^3/s; $Q_{TS} = 0{,}42$ m^3/s; cote en T : 27,0 m.

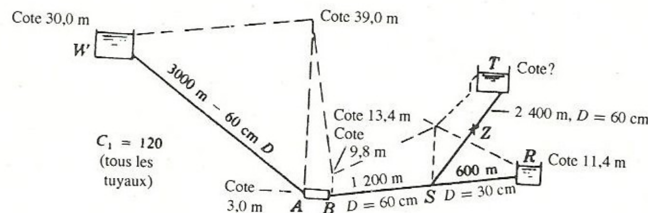


Fig. 9-30

9.49 Le débit total sortant de A, dans la figure 9-31, est de 0,380 m^3/s et le débit allant vers B est de 0,295 m^3/s. Trouver (a) la cote de B et (b) la longueur du tuyau de 600 mm. *Rép.* 26,5 m, 7 700 m.

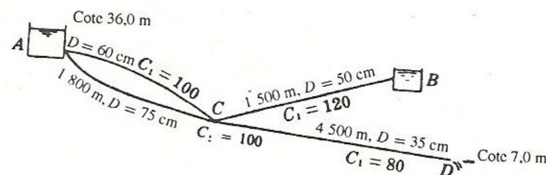


Fig. 9-31

9.50 Quels sont les débits entrant ou sortant des réservoirs de la figure 9-32? *Rép.* Q_{AE} = 140 l/s. Q_{BE} = 3 l/s. Q_{EC} = 79 l/s. Q_{ED} = 64 l/s.

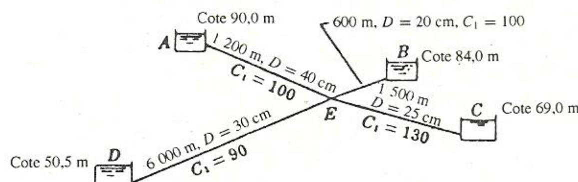


Fig. 9-32

9.51 Si la hauteur due à la pression en F est de 45,0 m, trouver les débits dans le système de la figure 9-33.
Rép. $Q_{FD} = 98$ l/s, $Q_{AD} = 104$ l/s, $Q_{BD} = 48$ l/s, $Q_{DC} = 250$ l/s.

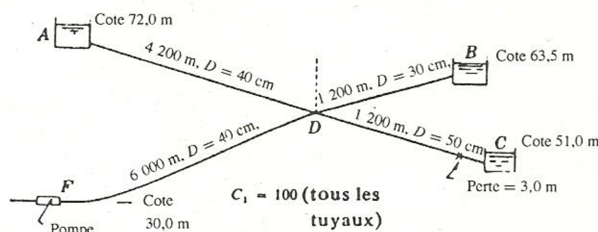


Fig. 9-33

9.52 Utilisant le système de conduites du problème 9.8, pour 0,200 m^3/s, quel est le débit dans chaque branche et quelle est la perte de charge? Utiliser la méthode de Hardy-Cross.
Rép. 28,0 m, $Q_{30} = 82$ l/s, $Q_{20} = 53$ l/s, $Q_{25} = 65$ l/s.

9.53 Résoudre le problème 9-40 en utilisant la méthode de Hardy Cross.

9.54 Trois systèmes de conduites A, B, C sont en cours d'étude. Quel est le système ayant la plus grande capacité? Prendre $C_1 = 100$ pour tous les tuyaux du schéma. *Rép. B.*

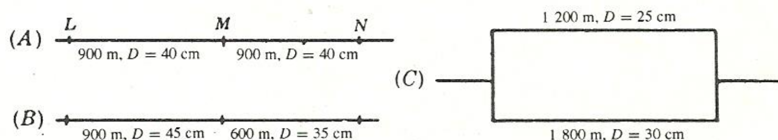


Fig. 9-34

9.55 Dans le problème 9-54 quelle est le diamètre du tuyau de 900 m de long, disposé parallèlement à MN dans le système A (formant ainsi une boucle de M à N) qui donnerait au nouveau système A une capacité de 50 % de plus que le système C? *Rép.* $d = 380$ mm.

9.56 Calculer le débit d'eau dans chaque conduite du réseau de la figure 9-35 ($C = 120$ pour toutes les conduites).
Rép. AB, 0,265; BE, 0,098; EF, 0,079; FA, 0,235; BC, 0,167; CD, 0,067; DE, 0,037; DI, 0,054; IH, 0,046; HE, 0,040; HG, 0,056; GF, 0,156 m^3/s.

9.57 Calculer le débit d'eau dans chaque conduite du réseau décrit dans la figure 9-36. ($C = 120$ pour toutes les conduites).
Rép. AB, 147; BG, 43,3; GH, 67,7; HA, 136; BC, 104; CF, 44,0; FG, 45,6; CD, 59,8; DE, 3,1; EF, 24,6; EL, 27,8; LK, 57,2; KF, 22,4; KJ, 34,8; JG, 22,9; JI, 11,9; IH, 68,5 l/s.

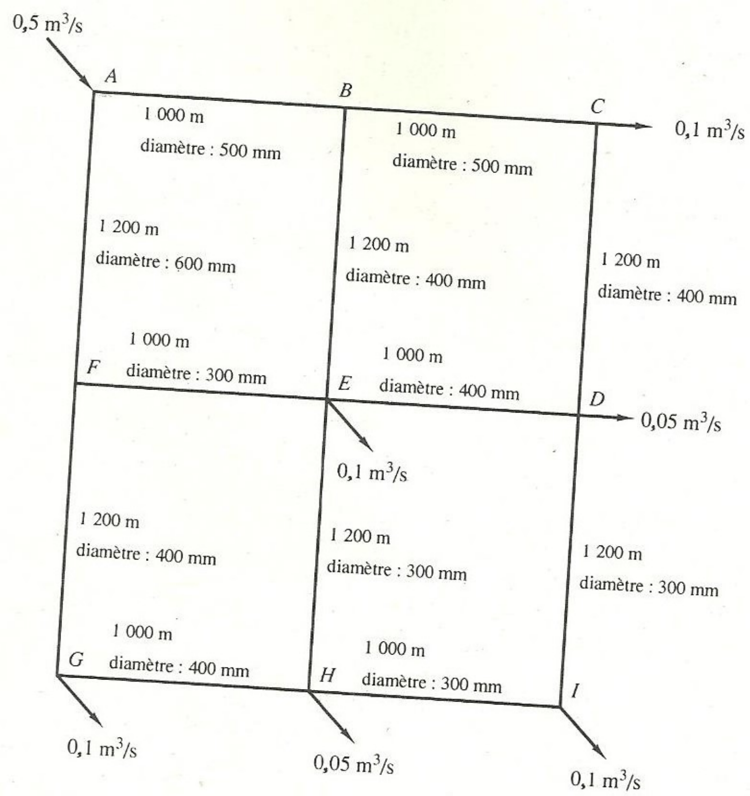


Fig. 9-35

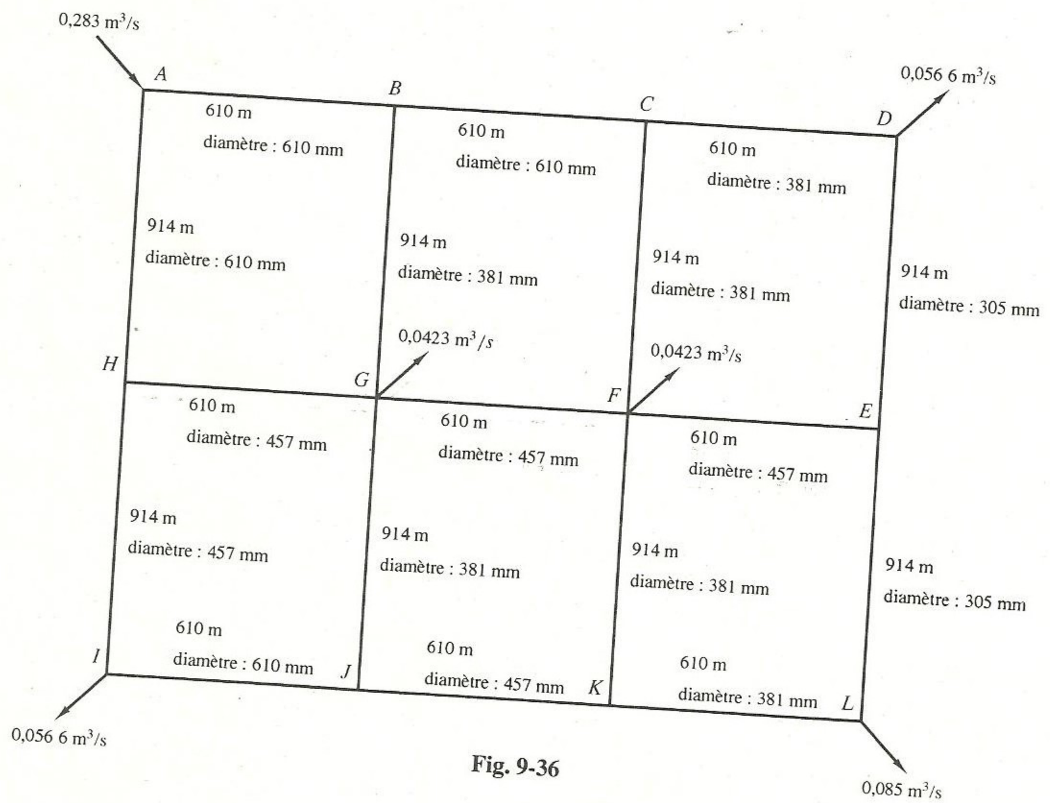


Fig. 9-36

Chapitre 10

Écoulement dans des canaux ouverts

INTRODUCTION

L'écoulement dans un canal ouvert se produit lorsqu'un liquide, coulant par gravité, n'est que partiellement contenu dans sa limite solide. Dans l'écoulement en canaux ouverts, le liquide qui s'écoule a une surface libre et n'a d'autre pression que celle qui est créée par son propre poids et la pression atmosphérique. On trouve des canaux ouverts naturels tels que des criques ou des rivières qui possèdent des sections irrégulières. Il en est aussi d'artificiels (construits par l'homme) tels que les détroits ou les canaux. Ces derniers possèdent souvent des sections régulières rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdales. L'écoulement en canal ouvert peut aussi se produire dans des conduites (de section circulaire) si l'écoulement ne s'effectue pas à plein régime. C'est normalement le cas des collecteurs d'égouts qui ne fonctionnent pas à plein rendement et sont donc profilés comme des canaux ouverts.

ÉCOULEMENT PERMANENT UNIFORME

L'écoulement uniforme implique deux conditions : la permanence et l'uniformité. L'*écoulement* est *permanent* (déjà défini dans les conduits fermés) si les caractéristiques d'écoulement, en tout point, sont indépendantes du temps ($\partial V/\partial t = 0$); $\partial y/\partial t = 0$, etc.) L'*écoulement* est *uniforme* si la profondeur, la pente, la vitesse et la section droite demeurent constantes sur une longueur donnée du canal ($\partial y/\partial L = 0$; $\partial V/\partial L = 0$; etc.)

Dans le cas particulier d'un écoulement permanent uniforme, la ligne de charge, la ligne piézométrique et le fond du canal sont parallèles (les pentes sont égales). Ceci n'est pas vérifié pour un écoulement permanent non uniforme.

ÉCOULEMENT NON UNIFORME

L'écoulement est non uniforme quand la profondeur d'écoulement varie le long du canal ouvert : $\partial y/\partial L \neq 0$. L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non. On peut également le qualifier de tranquille, rapide, ou critique.

ÉCOULEMENT LAMINAIRE

L'*écoulement laminaire* se produit généralement dans les canaux ouverts pour des valeurs du nombre de Reynolds R_E inférieures ou égales à 2 000. L'écoulement *peut* être laminaire jusqu'à $R_E = 10\,000$. En ce qui concerne l'écoulement en canal ouvert, on a

$$R_E = 4RV/\nu$$

où R est le rayon hydraulique (aire divisée par le périmètre mouillé);
V = vitesse d'écoulement;
ν = viscosité cinématique.

LA FORMULE DE CHEZY pour *l'écoulement permanent, uniforme*, établie dans le problème 10.1 s'écrit

$$V = C\sqrt{RS} \tag{1}$$

où V = vitesse moyenne;
C = un coefficient, en $m^{1/2}/s$,
R = rayon hydraulique,
S = pente de la ligne de charge.

LE COEFFICIENT C peut être obtenu en utilisant l'une des expressions suivantes

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad \text{(voir le problème 10.1)} \tag{2}$$

$$C = \frac{23 + \dfrac{0{,}001\,55}{S} + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{n}{\sqrt{R}}\left(23 + \dfrac{0{,}001\,55}{S}\right)} \quad \text{(Kutter)} \tag{3}$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad \text{(Manning)} \tag{4}$$

$$C = \frac{87}{1 + m/\sqrt{R}} \quad \text{(Bazin)} \tag{5}$$

$$C = -23{,}2 \ \lg\left(1{,}811\frac{C}{R_E} + \frac{\varepsilon}{R}\right) \quad \text{(Powell)} \tag{6}$$

Dans les expressions (*3*) à (*5*), n et m désignent des coefficients de rugosité déterminés par des expériences faites seulement dans l'eau. On en donne quelques valeurs dans la table 9 de l'annexe. En général, on préfère la formule de Manning pour les canaux ouverts. La formule de Powell sera étudiée dans les problèmes 10.9 et 10.11.

LE DÉBIT (Q), pour l'écoulement permanent uniforme est, en fonction de la formule de Manning :

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} S^{1/2} \tag{7}$$

Cette formule résulte de la substitution de l'expression (*4*) dans la formule (*1*). Q est en m^3/s si A est en m^2 et R en m (la pente S est sans dimension).

Les conditions associées à l'écoulement permanent uniforme sont dites normales – d'où les termes de profondeur normale et de pente normale.

LA PERTE DE CHARGE (h_L), exprimée en fonction de la formule de Manning est, en utilisant $S = h_L/L$,

$$h_L = \left[\frac{Vn}{R^{2/3}}\right]^2 L \tag{8}$$

En ce qui concerne l'écoulement non uniforme (varié), on peut utiliser les valeurs moyennes de V et R avec une précision raisonnable. Lorsqu'il s'agit d'un long canal, on doit employer de petites longueurs pour lesquelles les changements de profondeur sont du même ordre de grandeur.

DISTRIBUTION VERTICALE DES VITESSES

On peut admettre que la distribution des vitesses dans un canal ouvert est parabolique pour l'écoulement laminaire et logarithmique pour l'écoulement turbulent.

Pour l'écoulement *laminaire uniforme* dans des canaux ouverts larges, de profondeur moyenne y_m, la distribution des vitesses peut s'exprimer par

$$v = \frac{gS}{\nu}(yy_m - \frac{1}{2}y^2) \quad \text{ou} \quad v = \frac{wS}{\mu}(yy_m - \frac{1}{2}y^2) \tag{9}$$

La vitesse moyenne V, déduite de cette équation dans le problème 10.3 devient :

$$V = \frac{gSy_m^2}{3\nu} \quad \text{ou} \quad V = \frac{wSy_m^2}{3\mu} \tag{10}$$

Pour l'écoulement *turbulent uniforme* dans des canaux ouverts larges, la distribution des vitesses (établie dans le problème 10.4) peut s'exprimer par

$$v = 2{,}5\sqrt{\tau_0/\rho}\,\ln(y/y_0) \quad \text{ou} \quad v = 5{,}75\sqrt{\tau_0/\rho}\ \lg_{10}(y/y_0) \tag{11}$$

ÉNERGIE SPÉCIFIQUE

L'énergie spécifique (E) est définie comme étant l'énergie par unité de poids ($J/N = m$); prenant le fond du canal comme référence, on a :

$$E = \text{profondeur} + \text{hauteur dynamique} = y + V^2/2g \tag{12A}$$

Une expression plus précise du terme relatif à l'énergie cinétique serait $\alpha V^2/2g$ (voir le chapitre 7 pour une étude du coefficient de correction α de l'énergie cinétique.

En fonction du débit q par unité de largeur du canal b (c'est-à-dire $q = Q/b$),

$$E = y + \left(\frac{1}{2}g\right)\left(\frac{q}{y}\right)^2 \quad \text{ou} \quad q = \sqrt{2g(y^2E - y^3)} \tag{12B}$$

Pour l'écoulement uniforme, l'énergie spécifique demeure constante d'une section à l'autre. Pour l'écoulement non uniforme, l'énergie spécifique le long du canal peut croître ou décroître.

PROFONDEUR CRITIQUE

La profondeur critique (y_c) pour un débit unitaire constant q s'effectuant dans un canal rectangulaire est atteinte quand l'énergie spécifique est minimale. Comme on le montre dans les problèmes 10.33 et 10.34.

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \frac{2}{3}E_C = \frac{V_c^2}{g} \tag{13}$$

On peut réarranger cette expression pour obtenir V_c :

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad \text{ou} \quad \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \quad \text{pour l'écoulement critique} \tag{14}$$

Ainsi, si le nombre de Froude, $N_F = \dfrac{V_g}{\sqrt{gy_c}} = 1$, on a un écoulement critique. Si $N_F > 1$ on a un écoulement surcritique (écoulement rapide) et si $N_F < 1$, un écoulement sous-critique (écoulement tranquille).

ÉCOULEMENT UNITAIRE MAXIMAL

L'écoulement unitaire maximal (q_{max}) dans un canal rectangulaire pour n'importe quelle énergie spécifique donnée E, tel qu'il est établi dans le problème 10.34, est :

$$q_{max} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g(\tfrac{2}{3}E)^3} \qquad (15)$$

POUR L'ÉCOULEMENT CRITIQUE DANS DES CANAUX NON RECTANGULAIRES, comme on le démontre au problème 10.33 :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \quad \text{ou} \quad \frac{Q^2 b'}{gA_c^3} = 1 \qquad (16)$$

où b' est la largeur de la surface de l'eau. On peut réarranger (*16*) en divisant par A_c^2, comme suit :

$$\frac{V_c^2}{g} = \frac{A_c}{b'} \quad \text{ou} \quad V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{gy_m} \qquad (17)$$

où le terme $\dfrac{A_c}{b'}$ s'appelle la profondeur moyenne y_m.

ÉCOULEMENT NON UNIFORME

En ce qui concerne l'écoulement non uniforme, on divise en général un canal ouvert en longueurs L, appelés *tronçons* afin de les étudier. Pour calculer les courbes de profil des eaux arrières, l'équation de l'énergie (voir le problème 10.46) donne :

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - S} = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_0} \qquad (18)$$

où S_0 = la pente du fond du canal et S = la pente du gradient d'énergie.

Pour des tronçons successifs où les variations de profondeur sont à peu près les mêmes, le gradient d'énergie S peut s'écrire :

$$S = \left(\frac{nV_{\text{moyenne}}}{R_{\text{moyenne}}^{2/3}}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{V_{\text{moyenne}}^2}{C^2 R_{\text{moyenne}}} \qquad (19)$$

Les profils des surfaces pour des conditions d'écoulement variant progressivement peuvent être analysés en utilisant l'expression

$$\frac{dy}{dL} = \frac{S_0 - S}{(1 - V^2/gy)} \qquad (20)$$

Le terme dy/dL représente la pente de la surface de l'eau par rapport au fond du canal. Ainsi si dy/dL est positif, la profondeur augmente en aval. Les problèmes 10.52 et 10.53 établissent l'équation des profils des surfaces ainsi qu'un système pour les classifier.

RESSAUT

Le ressaut a lieu quand l'écoulement sur-critique passe à l'écoulement sous-critique. Dans pareils cas, la hauteur de la surface liquide augmente brusquement dans la direction du courant. Pour un débit constant dans un canal rectangulaire, comme on l'a établi au problème 10.54, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{q^2}{g} = y_1 y_2 \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{21}$$

Les problèmes allant de 10.55 à 10.59 illustrent le phénomène du ressaut.

ÉCOULEMENT DANS DES CANAUX OUVERTS DE SECTIONS DROITES CIRCULAIRES

Les problèmes traitant d'écoulement dans des canaux ouverts, à section circulaire, se résolvent essentiellement de la même façon que ceux qui traitent de sections non circulaires; la différence majeure réside dans le fait qu'il est généralement bien plus difficile de calculer le rayon hydraulique pour une partie de section droite circulaire.

Bien que peu compliqués, les calculs de sections droites en segments de cercle sont néanmoins fastidieux (le problème 10.19 illustre bien ce fait mais les calculs peuvent être bien plus ennuyeux lorsque la profondeur d'écoulement, dans une section droite circulaire, est l'inconnue). Ils peuvent être facilités (avec une faible perte de précision), en utilisant la relation graphique (figure 10-1) fournissant les éléments hydrauliques de la section circulaire. On donne une courbe distincte par élément hydraulique (périmètre mouillé, aire, débit, rayon hydraulique et vitesse) qui montre les variations en fonction de la profondeur relative d'écoulement. On doit bien remarquer que l'ordonnée représente le rapport (en pourcentage) de la profondeur d'écoulement à la profondeur d'écoulement qu'aurait le conduit fonctionnant à plein régime (qui est naturellement son diamètre). L'abscisse représente des rapports similaires concernant les autres éléments hydrauliques. L'utilisation des courbes de la figure 10-1 est illustrée dans les problèmes 10.20 et 10.21.

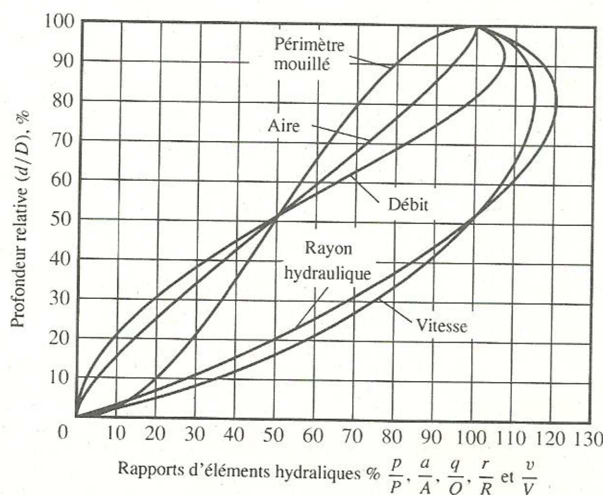


Fig. 10-1 Éléments hydrauliques d'une section circulaire

SECTIONS DROITES LES PLUS EFFICACES

La *section droite la plus efficace* d'un canal ouvert est celle qui a la plus grande capacité, pour une pente, une aire et un coefficient de rugosité donnés. Si ces paramètres demeurent constants, la vitesse (et donc le débit)

sera maximale quand le périmètre mouillé sera minimal. En se basant sur ces prémisses, la section droite la plus efficace (et donc la plus économique) peut être déterminée pour quelques formes courantes.

La plus efficace de toutes les sections est le demi-cercle qui a le plus faible périmètre mouillé pour une aire donnée. Pour une section rectangulaire, la plus efficace a une profondeur égale à la moitié de la largeur. Pour une section triangulaire, la plus efficace a une pente égale à 1. Pour une section trapézoïdale, la plus efficace est celle du demi-hexagone régulier (côtés égaux et angles intérieurs de 120°). Toutes ces sections les plus efficaces sont rassemblées dans la figure 10.2 (voir aussi le problème 10.30).

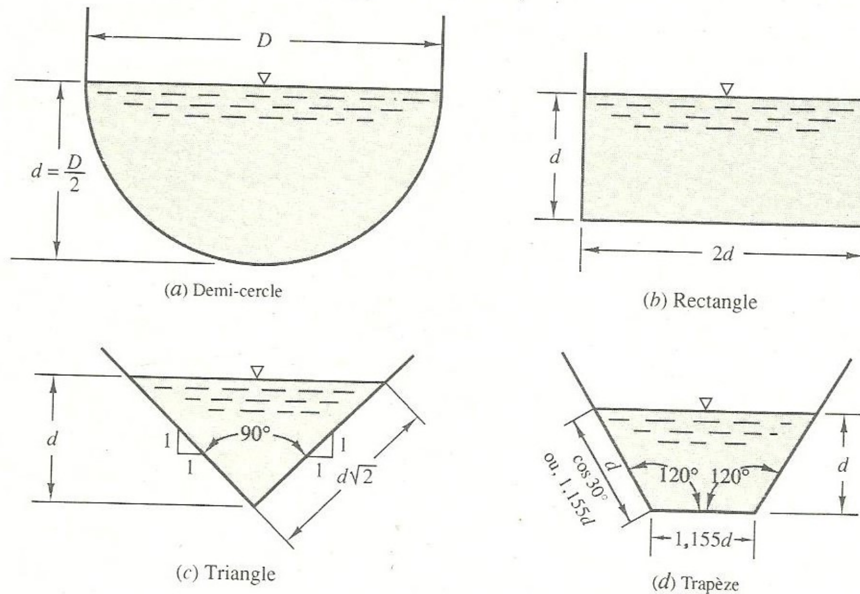


Fig. 10-2 Section droite la plus efficace

Problèmes résolus

10.1 Établir l'équation générale (de Chezy) pour l'écoulement permanent uniforme dans un canal ouvert.

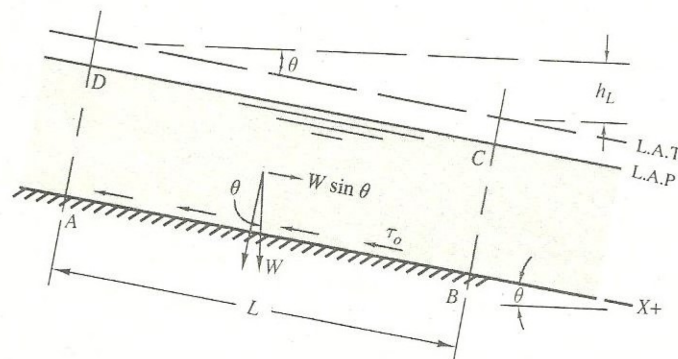


Fig. 10-3

Solution

Dans la figure 10-3, considérons le volume de liquide $ABCD$ de section constante A et longueur L. Le volume peut être considéré comme étant en équilibre puisque l'écoulement est permanent (accélération nulle). Ajoutant les forces agissant dans la direction X,

$$\text{force sur la surface } AD - \text{force sur la surface } BC + W \sin\theta - \underset{(h_L)}{\text{forces résistantes}} = 0$$

$$w\bar{h}A - w\bar{h}A + wAL \sin\theta - \tau_0 pL = 0$$

où τ_0 est la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi (Pa) agissant sur une surface ayant L m de long et le périmètre mouillé de p m de large. Alors

$$wAL \sin\theta = \tau_0 pL \quad \text{et} \quad \tau_0 = \frac{(wA \sin\theta)}{p} = wRS \tag{A}$$

puisque $R = A/p$ et $\sin\theta = \text{tg}\,\theta = S$ pour de petits angles θ.

On a vu dans le chapitre 8, problème 8.5, que $\tau_0 = (w/g) f (V^2/8)$. Alors

$$wRS = \left(\frac{w}{g}\right) f \left(\frac{V^2}{8}\right) \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\left(\frac{8g}{f}\right) RS} = C\sqrt{RS} \tag{B}$$

Pour l'écoulement *laminaire*, on peut prendre pour f, $64/R_E$. Alors

$$C = \sqrt{\left(\frac{8g}{64}\right) R_E} = 1{,}107\sqrt{R_E} \tag{C}$$

10.2 Montrer que la distribution verticale des vitesses est parabolique pour un canal ouvert large et pour un écoulement laminaire uniforme (y_m = profondeur moyenne du canal). Voir la figure 10-4.

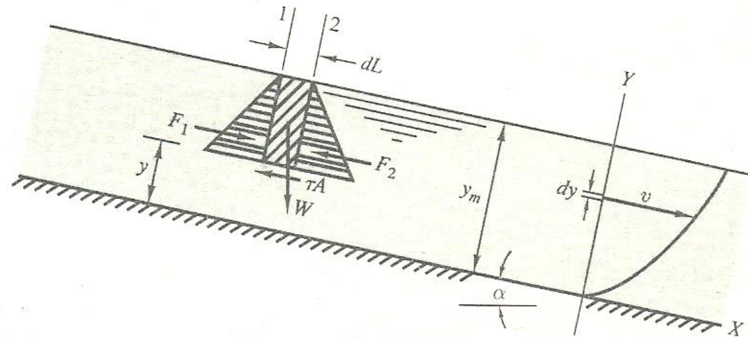


Fig. 10-4

Solution

Quand la vitesse et la profondeur d'écoulement sont relativement petites, reflétant un nombre de Reynolds $< 2\,000$, la viscosité devient le facteur dominant dans l'écoulement. L'écoulement qui en résulte est laminaire. (Pour des canaux ouverts, R_E est défini par $4RV/\nu$.) Pour le système en équilibre représenté en hachuré, utilisant $\Sigma F_x = 0$, nous obtenons (figure 10-4) :

$$F_1 - F_2 + w(y_m - y)\text{d}L\ \text{d}z \sin\alpha - \tau\ \text{d}L\ \text{d}z = 0$$

Puisque $F_1 = F_2$, nous obtenons

$$\tau = w(y_m - y)\sin\alpha$$

Pour l'écoulement laminaire, $\tau = \dfrac{\mu\,\text{d}v}{\text{d}y}$, d'où on obtient

$$\text{d}v = \frac{w}{\mu}(y_m - y)\sin\alpha\ \text{d}y = \frac{wS}{\mu}(y_m - y)\ \text{d}y \tag{A}$$

Pour les faibles valeurs de l'angle α associé à la pente des canaux ouverts, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha =$ pente S. En intégrant (A), on obtient

$$v = \frac{wS}{\mu}(yy_m - \frac{1}{2}y^2) + C \qquad (B)$$

Puisque $v = 0$ quand $y = 0$, la valeur de la constante $C = 0$, l'équation (B) est une équation du second degré représentant une parabole.

10.3 Quelle est la vitesse moyenne V dans le problème 10.2?

Solution

$$\text{La vitesse moyenne } V = \frac{Q}{A} = \frac{\int dQ}{\int dA} = \frac{\int v\,dA}{\int dA} = \frac{(wS/\mu)\int (yy_m - \frac{1}{2}y^2)\,dy\,dz}{\int dy\,dz = y_m\,dz}$$

où dz est une constante (dimension perpendiculaire au plan de la figure)

$$V = \frac{wS\,dz}{\mu y_m\,dz}\int_0^{y_m}(yy_m - \frac{1}{2}y^2)dy = \frac{wSy_m^2}{3\mu}$$

10.4 Pour l'écoulement permanent, uniforme dans des canaux ouverts larges, établir l'équation théorique de la vitesse moyenne pour des surfaces libres (figure 10-5).

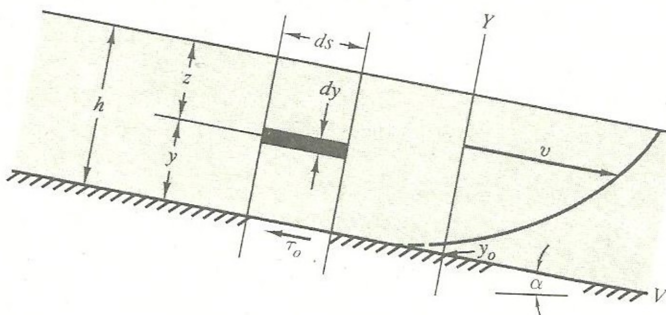


Fig. 10-5

Solution

Pour l'écoulement turbulent en général, la contrainte tangentielle visqueuse peut s'exprimer par

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2$$

où l est la longueur de mélange, fonction de z (voir le chapitre 8).

De plus, d'après l'expression (A) du problème 10.1, $\tau_0 = wRS = whS$, puisque le rayon hydraulique R pour des canaux larges est égal à la profondeur.

Sur la couche limite, puisque y est très petit, $z \cong h$ et $\tau \cong \tau_0$. Ainsi on peut égaler les valeurs de τ_0,

$$\rho l^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = wzS \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dz} = \pm\sqrt{\frac{gzS}{l^2}}$$

Pour intégrer cette expression, essayer une valeur de $l = k(h-z)(z/h)^{1/2}$. Alors,

$$-\frac{dv}{dz} = \sqrt{gS}\left[\frac{z^{1/2}}{k(h-z)(z/h)^{1/2}}\right] = \frac{\sqrt{gSh}}{k}\left(\frac{1}{h-z}\right).$$

Posons $y = (h - z)$ et $dy = -dz$, alors,

$$+y\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\sqrt{gSh}}{k} \quad \text{et} \quad dv = \frac{\sqrt{gSh}}{k}\left(\frac{dy}{y}\right).$$

Puisque $\tau_0/\rho = whS/\rho = gSh$,

$$dv = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left(\frac{dy}{y}\right) \quad \text{ou} \quad v = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ \ln y + C$$

Pour $y = y_0$, $v \cong 0$, alors $C = (-1/k)\sqrt{\tau_0/\rho}\ \ln y_0$ et

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{A}$$

Note : En ne tenant pas compte de la courbe du logarithme à gauche de y_0, bien que faisant une approximation, on obtient des résultats satisfaisants bien compris dans les limites de la précision attendue, puisque y_0 est très petit. Voir le problème 10.5 pour la valeur de y_0.

Dans cette expression (A), $k \cong 0{,}40$ et s'appelle la constante de Von Karman. Puisque le terme $\sqrt{\tau_0/\rho}$ a la dimension m/s, on appelle ce terme la vitesse de frottement qu'on désigne par v_*. Ainsi,

$$v = 2{,}5 v_*\ \ln(y/y_0) \tag{B}$$

De $Q = AV = (h \times 1)V = \int v(dy \times 1)$, on obtient la valeur moyenne de V. Ainsi,

$$V = \frac{\int v(dy \times 1)}{(h \times 1)} = \frac{2{,}5 v_*}{h}\int_0^h (\ln y - \ln y_0)\, dy$$

En utilisant la règle de L'Hôpital du calcul différentiel, la vitesse moyenne pour les surfaces lisses où une couche limite existe peut se calculer ainsi :

$$V = 2{,}5 v_*[\ln h - \ln y_0 - 1] \tag{C}$$

On montrera dans le problème 10.5 que y_0 vaut $\nu/9v_*$. Par conséquent les équation (B) et (C) peuvent s'écrire

$$v = 2{,}5 v_*\ \ln(9v_* y/\nu) \tag{D}$$

et

$$V = 2{,}5 v_*[\ln h - \ln(\nu/9v_*) - 1] \tag{E}$$

Souvent on prend pour vitesse moyenne dans un canal ouvert la vitesse observée à un point situé à 0,6 de la profondeur (mesurée à partir de la surface). Si nous prenons cette valeur pour y, on peut écrire, à partir de (B) ci-dessus, la vitesse moyenne V sous la forme

$$V = 2{,}5 v_*\ \ln(0{,}4h/y_0)$$

D'après le problème 10.5, $y_0 = \delta/103$. Alors pour ces canaux longs, cette vitesse moyenne devient, puisque le rayon hydraulique $R = h$,

$$V = 2{,}5 v_*\ \ln 41{,}2R/\delta \tag{F}$$

10.5 Calculer la valeur de y_0 dans le problème précédent.

Solution

Pour des surfaces lisses, dans une couche limite (laminaire)

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dv}{dy}\right) = \nu\rho\left(\frac{dv}{dy}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{(\tau_0/\rho)}{\nu} = \frac{v_*^2}{\nu} \quad \text{(constante)}$$

En utilisant δ comme épaisseur de la couche limite, on a :

$$\int dv = (v_*^2/\nu)\int_0^\delta dy \quad \text{ou} \quad v_\delta = v_*^2\delta/\nu = R_{E_*}v_* \tag{A}$$

D'après l'expérience, $R_{E_*} \cong 11{,}6$ (à peu près constant). Ainsi,

$$\frac{v_*^2\delta}{\nu} = 11{,}6v_* \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{11{,}6\nu}{v_*} \tag{B}$$

En posant $y = \delta$ dans l'équation (*B*) du problème précédent, nous obtenons,

$$v_\delta = 2{,}5v_* \ln \delta/y_0 \tag{C}$$

En réunissant (*C*) et (*A*),

$$\delta/y_0 = v_\delta/2{,}5v_* = R_{E_*}/2{,}5 \cong 4{,}64,$$

$$\delta/y_0 = e^{4{,}64} = 103 \quad \text{et} \quad \delta = 103y_0 \tag{D}$$

Alors d'après (*B*),

$$y_0 = \frac{\delta}{103} \cong \frac{11{,}6\nu}{103v_*} \cong \frac{\nu}{9v_*} \tag{E}$$

10.6 De l'eau à 15,6 °C circule dans un canal rectangulaire large et lisse ($n = 0{,}011$) sur une profondeur de 1,22 m avec une pente de 0,000 4. Comparer la valeur de C obtenue à l'aide de la formule de Manning avec celle obtenue à partir de l'expression $V = 2{,}5_* \ln(41{,}2R/\delta)$.

Solution

(*a*) À partir de la formule de Manning, $C = (1{,}0/n)R^{1/6} = (1{,}22)^{1/6}/0{,}011 = 94 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$

(*b*) En égalant la formule de Chezy donnant la vitesse moyenne avec l'expression donnée :

$$C/\sqrt{RS} = 2{,}5v_* \ln 41{,}2R/\delta$$

En reportant $v_* = \sqrt{gSR}$ du problème 10.4, nous obtenons

$$C = 2{,}5\sqrt{g} \ln 41{,}2R/\delta \tag{A}$$

Pour l'eau à 15,6 °C, $\nu = 1{,}13 \times 10^{-6}$ et, prenant $\delta = 11{,}6\,\nu/v_*$ d'après (*B*) du problème 10.5, nous trouvons $C = 97{,}7$.

10.7 (*a*) Soit un canal rectangulaire large, profond de 1,22 m avec une pente de 4 m sur 10 000 m. En utilisant la formule théorique donnant la vitesse du problème 10.4, calculer les valeurs des vitesses théoriques pour des augmentations de profondeur de 1/10, en admettant que le canal est lisse. (*b*) Comparer la moyenne des vitesses pour des valeurs 0,2 et 0,8 de profondeur relative avec la vitesse pour profondeur relative 0,6. (*c*) Calculer la position de la vitesse moyenne au-dessous de la surface de l'eau. Prendre pour la viscosité la valeur, $1{,}40 \times 10^{-6}$ m²/s.

Solution

(*a*) Puisque $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho} = \sqrt{gRS} \approx \sqrt{ghS}$ et $y_0 = \nu/9v_*$,

$$\begin{aligned} v &= 2{,}5v_* \ln y/y_0 = 2{,}5 \times \sqrt{ghS} \ln 9v_*y/\nu \\ &= 2{,}5\sqrt{9{,}81 \times 1{,}22(0{,}000\,4)} \ln\left(\frac{9y\sqrt{9{,}81 \times 1{,}22(0{,}000\,4)}}{1{,}4 \times 10^{-6}}\right) \\ &= 0{,}173 \times \ln 44{,}5 \times 10^5 y \end{aligned} \tag{A}$$

En utilisant (A) nous obtenons les valeurs suivantes de la vitesse v :

Dist. vers le bas (%)	y (m)	$445\,000y$	$\ln 445\,000y$	v(m/s)
0	1,20	534 000	13,188	2,28
10	1,08	480 600	13,083	2,26
20	0,96	427 200	12,965	2,24
30	0,84	373 800	12,831	2,22
40	0,72	320 400	12,677	2,19
50	0,60	267 000	12,495	2,16
60	0,48	213 600	12,272	2,12
70	0,36	160 200	11,984	2,07
80	0,24	106 800	11,579	2,01
90	0,12	53 400	10,886	1,88
92,5	0,09	40 050	10,598	1,83
95,0	0,06	26 700	10,192	1,76
97,5	0,03	13 350	9,500	1,64
99,75	0,003	1 335	7,197	1,25

(b) Moyenne des vitesses pour 0,2 et $0{,}8V = \frac{1}{2}(2{,}24 + 2{,}01) = 2{,}13$ m /s.

La valeur de la vitesse pour 0,6 est de 2,12 m /s. Normalement un tel accord est rare.

10.8 En admettant que la formule de Manning donnant C est correcte, pour quelle valeur de n le critère «lisse» est-il vérifié dans le problème 10.6?

Solution

Égalons les valeurs de C, en utilisant l'expression (A) du problème 6, comme suit

$$\frac{R^{1/6}}{n} = 2{,}5\sqrt{g}\ \ln\left(\frac{41{,}2R}{\delta}\right) = 2{,}5\sqrt{g}\ \ln\left(\frac{41{,}2R\sqrt{gSR}}{11{,}6\nu}\right)$$

En reportant les valeurs et en résolvant, nous obtenons : $n = 0{,}010\,6$

10.9 En utilisant l'équation de Powell, prévoir quelle quantité de liquide va circuler dans un canal rectangulaire lisse de 0,6 m de large et de pente 0,010 si la profondeur est de 0,3 m? (Employer $\nu = 39 \times 10^{-6}$ m^2/s).

Solution

L'équation (6) est
$$C = -23{,}20\ \log_{10}\left(1{,}811\ \frac{C}{R_E} + \frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Pour un canal lisse ε/R est faible et on peut ne pas en tenir compte : alors

$$C = 23{,}20\ \log_{10} 0{,}552\,1\ R_E/C \qquad (A)$$

D'après les données, on peut calculer R_E/C en utilisant $V = C\sqrt{RS}$

$$R_E = 4RV/\nu = 4RC\sqrt{RS}/\nu$$
$$0{,}552\,1 R_E/C = 4R^{3/2}S^{1/2}/\nu = 0{,}552\,1(4)(0{,}15)^{3/2}(0{,}01)^{1/2}/0{,}000\,039 = 329$$

Alors $C = 23{,}2\ \log_{10} 329 = 58{,}4\,\text{m}^{1/2}/s$

$$Q = CA\sqrt{RS} = 58{,}4(0{,}18\sqrt{0{,}15(0{,}01)} = 0{,}41\ \text{m}^3/s.$$

10.10 De l'eau coule dans un canal rectangulaire ouvert, en ciment, dont la largeur est de 12,0 m et la profondeur de 2,5 m. La pente du canal vaut 0,002 8. Trouver la vitesse et le débit de l'eau.

Solution

$$V = \frac{1{,}0}{n}\,R^{2/3}S^{1/2}$$

$$R = \frac{(2{,}5)(12{,}0)}{2{,}5 + 12{,}0 + 2{,}5} = 1{,}765\ \text{m} \qquad V = \left(\frac{1{,}0}{0{,}013}\right)(1{,}765)^{2/3}(0{,}002\,8)^{1/2} = 5{,}945\ \text{m/s}$$

$$Q = AV = [(2{,}5)(12{,}0)](5{,}945) = 178\ \text{m}^3/\text{s}.$$

10.11 Calculer C par l'équation de Powell pour un canal rectangulaire de 0,61 m par 305 mm, si $V = 1{,}68$ m/s, $\varepsilon/R = 0{,}002\,0$ et $\nu = 0{,}000\,039$ m²/s.

Solution

Calculons d'abord $R_E = 4RV/\nu = 4\left(\dfrac{305}{2\,000}\right)(1{,}68)/39 \times 10^{-6} \approx 26\,300$. Ensuite

$$C = -23{,}20\ \log_{10}\left(1{,}811\ \frac{C}{26\,300} + 0{,}002\right).$$

En résolvant par approximations successives, on trouve que $C \approx 52\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$ est satisfaisant.

Powell a donné des graphiques de C en fonction de R_E pour diverses valeurs de la rugosité ε/R. Ces graphiques simplifient les calculs. Ils indiquent aussi une ressemblance étroite avec la formule de Colebrook pour l'écoulement dans les tuyaux.

10.12 (*a*) Montrer une corrélation entre le facteur de rugosité f et le facteur de rugosité n.

(*b*) Quelle est la contrainte tangentielle visqueuse moyenne s'exerçant sur les côtés et sur le fond d'un canal rectangulaire de 3,66 m de large, profond de 1,22 m et ayant une pente de 1,60 m / 1 000 m?

Solution

(*a*) Prenant la formule de Manning, comme base de la corrélation,

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{R^{1/6}}{n} \qquad \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{8g}} \qquad f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}}$$

(*b*) D'après le problème 10.1

$$\tau_0 = wRS = w\left(\frac{\text{aire}}{\text{périmètre mouillé}}\right)(\text{pente}) = 9\,810\left(\frac{3{,}66 \times 1{,}22}{1{,}22 + 3{,}66 + 1{,}22}\right)\left(\frac{1{,}60}{1\,000}\right) = 11{,}5\ \text{Pa}$$

10.13 À quel débit doit-on s'attendre dans un canal rectangulaire de 1,22 m de large, revêtu de ciment, ayant une pente de 4 m pour 10 000 m, si l'eau a 610 mm de profondeur? Utiliser à la fois le coefficient C de Kutter et le coefficient C de Manning.

Solution

(*a*) Utilisons le coefficient C de Kutter. D'après la table 9, $n = 0{,}015$.
Le rayon hydraulique $R = 1{,}22 \times 0{,}61/2{,}44 = 0{,}305$ m.
D'après la table 10, pour $S = 0{,}000\,4$, $R = 0{,}305$ m et $n = 0{,}015$, la valeur de $C = 54{,}1\ \mathrm{m^{1/2}/s}$

$$Q = AV = AC\sqrt{RS} = (1{,}22 \times 0{,}61)(54)\sqrt{0{,}305 \times 0{,}000\,4} = 0{,}444$$

(*b*) Utilisons le C de Manning,

$$Q = AV = A\,\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} = (1{,}22 \times 0{,}61)\frac{1}{0{,}015}(0{,}305)^{2/3}(0{,}000\,4)^{1/2} = 0{,}45\ \mathrm{m^3/s}.$$

10.14 Le canal de ciment de la figure 10-6 doit débiter 30 m^3 d'eau à la seconde. Trouver la dénivellation du fond du canal par kilomètre de longueur.

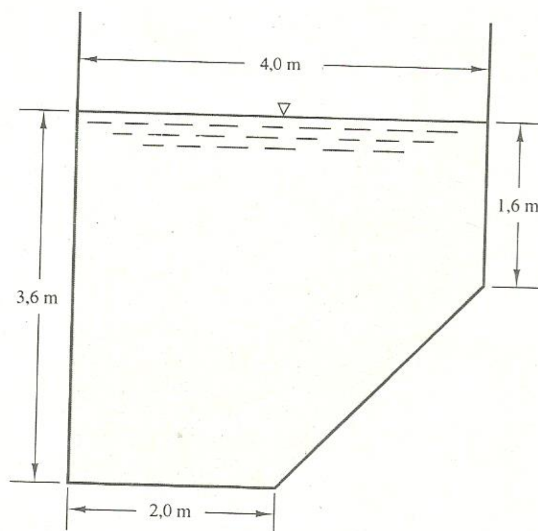


Fig. 10-6

Solution

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}0}{n}R^{2/3}S^{1/2}$$

$$A = (3{,}6)(2{,}0) + (2{,}0)\left(\frac{1{,}6 + 3{,}6}{2}\right) = 12{,}40\ \mathrm{m^2}$$

$$R = \frac{12{,}40}{3{,}6 + 2{,}0 + \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}0^2} + 1{,}6} = 1{,}236\ \mathrm{m}$$

$$30/12{,}40 = \left(\frac{1{,}0}{0{,}013}\right)(1{,}236)^{2/3}S^{1/2}$$

Donc $S = 0{,}000\,746$ soit 0,746 m / km de longueur.

10.15 Dans un laboratoire d'hydraulique, on a mesuré un débit de 0,412 m^3/s dans un canal rectangulaire de 1,22 m de large et de 0,610 m de profondeur. Si la pente du canal était de 0,000 40, quel est le coefficient de rugosité pour le revêtement du canal ?

Solution

(*a*) Par la formule de Kutter,

$$Q = 0{,}412 = AC\sqrt{RS} = (1{,}22 \times 0{,}61)C\sqrt{[(1{,}22 \times 0{,}61)/2{,}44](0{,}000\,4)} \quad \text{et} \quad C = 50{,}1 \approx 50\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

Par interpolation sur la table 10, $n = 0{,}016$.

(*b*) Par la formule de Manning.

$$Q = 0{,}412 = A\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} = (1{,}22 \times 0{,}61)\frac{1}{n}(0{,}305)^{2/3}(0{,}000\,4)^{1/2}, \quad n = 0{,}016\,3.\ \text{Employer } n = 0{,}016.$$

10.16 Avec quelle pente doit-on établir un tuyau d'égout vitrifié de 600 mm pour que le débit soit de 0,17 m^3/s quand il est à moitié plein? quand il est plein? (La table 9 donne $n = 0{,}013$.)

Solution

$$\text{Rayon hydraulique } R = \frac{\text{surface}}{\text{périmètre mouillé}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)}{\frac{1}{2}(\pi d)} = \frac{1}{4}\,d = 0{,}15\ \text{m}$$

(*a*) $Q = 0{,}17 = A\dfrac{1{,}0}{n}\ R^{2/3}S^{1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)(0{,}600)^2 \times (1{,}0/0{,}013)(0{,}6/4)^{2/3}S^{1/2}$, $\sqrt{S} = 0{,}055\,4$ et $S = 0{,}003\,1$.

(*b*) $R = \dfrac{1}{4}d = 0{,}15$ m, comme avant et $A = \dfrac{1}{4}\pi(0{,}6)^2$. Alors $\sqrt{S} = 0{,}027\,7$ et $S = 0{,}000\,77$

10.17 Un canal trapézoïdal, dont la largeur du fond est de 6 m et les côtés inclinés avec une pente de 1, est rempli d'eau sur une profondeur de 1,2 m et a une pente de 0,000 9. Pour une valeur de $n = 0{,}025$, quel est le débit?

Solution

$$\text{Surface } A = 6(1{,}2) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(1{,}2)(1{,}2) = 8{,}64\ \text{m}^2, \quad R = 8{,}64/[6 + 2(1{,}2\sqrt{2})] = 0{,}92\ \text{m}.$$

$$Q = (1/n)AR^{2/3}S^{1/2} = (1/0{,}025)(8{,}64)(0{,}92)^{2/3}(0{,}03) = 9{,}81\ \text{m}^3/\text{s}.$$

10.18 Deux tuyaux de béton ($C = 55$) transportent le débit provenant d'un canal ouvert ayant pour section un demi-carré de 1830 mm de large et 915 mm de profondeur ($C = 66$). La pente des deux structures est de 0,000 90. (*a*) Calculer le diamètre des tuyaux. (*b*) Trouver quelle est la profondeur de l'eau dans le canal rectangulaire, après avoir établi le régime, si la pente est 0,001 60, en utilisant $C = 66$.

Solution

(*a*)

$$Q_{\text{canal}} = Q_{\text{tuyaux}}$$

$$AC\sqrt{RS} = 2AC\sqrt{RS}$$

$$(1{,}83 \times 0{,}915)(66)\sqrt{\frac{1{,}83 \times 0{,}915}{3{,}66}(0{,}000\,9)} = 2\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)(55)\sqrt{\frac{d}{4}(0{,}000\,9)}$$

$$2{,}243 = 1{,}296\,d^{5/2} \quad \text{et} \quad d = 1{,}245\ \text{m}$$

(*b*) Pour une profondeur y, aire $A = 1{,}83y$ et le rayon hydraulique $R = \dfrac{1{,}83y}{1{,}83 + 2y}$. Pour le même débit Q,

$$2{,}243 = (1{,}83y)(66)\sqrt{\frac{1{,}83y}{1{,}83 + 2y}(0{,}001\,6)}, \quad 1{,}83y\sqrt{\frac{1{,}83y}{1{,}83 + 2y}} = 0{,}85 \qquad y^3 - 0{,}236y = 0{,}216$$

En résolvant par approximations successives :

$$\text{pour } y = 0{,}74 \text{ m}, \ (0{,}405 - 0{,}175) \neq 0{,}216 \ (\text{diminuer } y)$$

$$\text{pour } y = 0{,}73 \text{ m}, \ (0{,}389 - 0{,}172) = 0{,}217 \ (\text{satisfaisant})$$

Ainsi, avec une prévision de l'ordre du millimètre, la profondeur $y = 0{,}73$ m.

10.19 On pose un tuyau d'égout vitrifié ordinaire avec une pente de 0,000 20 pour transporter 2,30 m^3/s quand il est rempli à 90 % du diamètre. Quelle devra être le diamètre du tuyau?

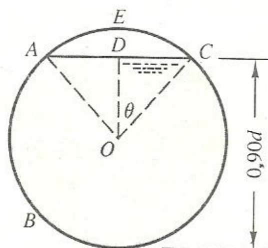


Fig. 10-7

Solution

D'après la table 9, $n = 0{,}015$.
On calcule le rayon hydraulique R (se reporter à la figure 10-7).

$$R = \frac{A}{p} = \frac{\text{cercle} - (\text{secteur } AOCE - \text{triangle } AOCD)}{\text{arc } ABC}$$

angle $\theta = \arccos(0{,}40d/0{,}50d) = \arccos 0{,}800$, $\theta = 36°52'$.

Aire du secteur $AOCE = [2(36°52')/360°]\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) = 0{,}161\,2\, d^2$.

Longueur de l'arc $ABC = \pi d - [2(36°52')/360°](\pi d) = 2{,}498\, d$.

Aire du triangle $AOCD = 2\left(\frac{1}{2}\right)(0{,}40d)(0{,}40d \operatorname{tg} 36°52') = 0{,}120\,0\, d^2$

$$R = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2 - (0{,}161\,2\, d^2 - 0{,}120\,0\, d^2)}{2{,}498\, d} = \frac{0{,}744\,2\, d^2}{2{,}398\, d} = 0{,}298\, d.$$

(*a*) Utilisons le coefficient C de Kutter (pris égal à 55 pour le premier calcul)

$$Q = CA\sqrt{RS}, \quad 2{,}30 = 55(0{,}744\,2\, d^2)\sqrt{0{,}298\, d(0{,}000\,20)}, \quad d^{5/2} = 7{,}278, \quad d = 2{,}212 \text{ m}$$

Pour modifier C, $R = 0{,}298 \times 2{,}212 = 0{,}659$ m et la table 10 donne $C = 62$?
Recalculant, $d^{5/2} = 7{,}278(55/62) = 6{,}456$ ou $d = 2{,}11$ m (la valeur modifiée de C est satisfaisante).

(*b*) Utilisant le coefficient C de Manning (et les données précédentes)

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S^{1/2}$$

$$2{,}30 = \frac{1}{0{,}015}(0{,}744\,2 d^2)(0{,}298 d)^{2/3}(0{,}000\,20)^{1/2}, \qquad d^{8/3} = 7{,}347$$

d'où

$$d = 2{,}11 \text{ m.}$$

10.20 Résoudre le problème 10.19 à l'aide de la formule de Manning et de la figure 10-1.

Solution

$$d/d_{\text{plein}} = 0{,}90$$

D'après la figure 10-1, $Q/Q_{\text{plein}} = 106\ \%$.

$$Q_{\text{plein}} = 2{,}30/1{,}06 = 2{,}17\ \text{m}^3/\text{s}$$
$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2}$$
$$2{,}17 = \left(\frac{1}{0{,}015}\right)(\pi d^2/4)(d/4)^{2/3}(0{,}000\,20)^{1/2}$$
$$d^{8/3} = 7{,}38 \quad \text{d'où} \quad d = 2{,}12\ \text{m}$$

10.21 Un tuyau en ciment ($d = 600$ mm) transporte de l'eau sur une pente de 1/400. La profondeur est de 240 mm. Trouver le débit.

Solution

$$Q = \frac{1{,}0}{n}AR^{2/3}S^{1/2}$$
$$Q_{\text{plein}} = (1{,}0/0{,}013)[(\pi)(0{,}600)^2/4](0{,}600/4)^{2/3}(1/400)^{1/2} = 0{,}307\ \text{m}^3/\text{s}$$
$$d/d_{\text{plein}} = 240/600 = 0{,}40 = 40\ \%$$

d'après la figure 10-1, $Q/Q_{\text{plein}} = 32\ \%$; d'où :

$$Q = (0{,}32)(0{,}307) = 0{,}098\ \text{m}^3/\text{s}.$$

10.22 Quelle est la profondeur de l'eau dans un canal de 6,10 m de large établi sur une pente de 0,000 10 débitant 6,80 m³/s? Utiliser $n = 0{,}014\,9$.

Solution

En utilisant la formule de Manning :

$$Q = \frac{1{,}0}{n}AR^{2/3}S^{1/2}, \quad 6{,}80 = \frac{1{,}0}{0{,}014\,9}(6{,}10y)\left(\frac{6{,}10y}{6{,}10+2y}\right)^{2/3}(0{,}01), \quad 1{,}661 = y\left(\frac{6{,}10y}{6{,}10+2y}\right)^{2/3}$$

En résolvant par approximations successives, on trouve que la valeur $y = 1{,}60$ m est satisfaisante. L'eau circulera avec une profondeur de 1,60 m, dite profondeur normale.

10.23 Comment doit-on construire un canal rectangulaire pour qu'il transporte 14 m³/s sur une profondeur de 1,8 m si la pente est de 0,000 40? Utiliser $n = 0{,}010$.

Solution

En employant la formule de Manning, avec $A = 1{,}8b$ et $R = 1{,}8b/(b+3{,}6)$, et en résolvant par approximations successives, on trouve la largeur cherchée $b = 4{,}02$ m.

10.24 Après une inondation dans une station d'observation de rivière, un ingénieur visite le site. Ayant localisé les traces de la crue, réalisé un arpentage approprié et fait les calculs nécessaires, il détermine que l'aire de la section droite, le périmètre mouillé et la pente de la surface de l'eau, au moment du maximum de

la crue, valent respectivement 2 960 m^2, 341 m et 76×10^{-5}. L'ingénieur a également noté que le fond du canal contenait «de la terre mélangée à de l'herbe et des algues» pour lequel un manuel donnait un coefficient de Manning $n = 0{,}030$. Estimer le courant de crête de l'inondation.

Solution

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \quad \text{d'où} \quad Q = \left(\frac{1}{0{,}030}\right)(2\,960)\left(\frac{2\,960}{341}\right)^{2/3}(0{,}000\,76)^{1/2} = 11{,}50 \text{ m}^3/\text{s}.$$

10.25 Établir les coefficients de débit K et K' de l'équation de Manning indiqués dans les tables 11 et 12 de l'annexe.

Solution

On peut établir comme suit les coefficients de débit à employer dans la formule de Manning. On peut exprimer toute surface sous la forme $A = F_1 y^2$ où F_1 est un coefficient sans dimension et y^2 le carré de la profondeur. De manière analogue, on peut écrire pour le rayon hydraulique R, $R = F_2 y$. Alors la formule de Manning s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n}(F_1 y^2)(F_2 y)^{2/3} S^{1/2} \quad \text{ou} \quad \frac{Qn}{y^{8/3} S^{1/2}} = F_1 F_2^{2/3} = K \qquad (1)$$

De façon analogue, en fonction de la largeur b, $A = F_3 b^2$, $R = F_4 b$ et

$$\frac{Qn}{b^{8/3} S^{1/2}} = F_3 F_4^{2/3} = K' \qquad (2)$$

Les tables 11 et 12 donnent les valeurs de K et K' pour les formes en trapèze courantes. On peut bien entendu calculer les valeurs de K et K' pour une section transverse de forme quelconque.

10.26 Quels sont les coefficients de débit K et K' pour un canal rectangulaire de 6 m de large et de 1,2 m de profondeur. Comparer les résultats obtenus avec les valeurs données dans les tables 11 et 12.

Solution

(*a*) $A = F_1 y^2$, $7{,}2 = F_1(1{,}2)$, $F_2 = 5{,}0$, $R = F_2 y$, $7{,}2/8{,}4 = F_2(1{,}2)$, $F_2 = 0{,}714$, $K = F_1 F_2^{2/3} = 4{,}00$. La table 11 donne pour $y/b = 1{,}2/6 = 0{,}20$, d'où $K = 4{,}00$ (accord).

(*b*) $A = F_3 b^2$, $7{,}2 = F_3(36)$, $F_3 = 0{,}20$. $R = F_4 b$, $7{,}2/8{,}4 = F_4(6)$, $F_4 = 0{,}143$. $K' = F_3 F^{2/3} = 0{,}054\,6$. La table 12 donne pour $y/b = 1{,}2/6 = 0{,}20$ d'où $K = 0{,}054\,6$ (accord).

10.27 Résoudre le problème 10.22, en utilisant les coefficients de débit de la table 12.

Solution

D'après le problème 10.25, équation (2),

$$\frac{Qn}{b^{8/3} S^{1/2}} = K' \qquad \frac{(6{,}80)(0{,}014\,9)}{(6{,}1)^{8/3}(0{,}000\,1)^{1/2}} = 0{,}081\,5 = K'$$

La table 12 indique que pour des canaux en forme de trapèze à côtés verticaux, une valeur de K' de 0,081 4 représente un rapport de profondeur à largeur (y/b) situé entre 0,26 et 0,28. En interpolant, $y/b = 0{,}262$. Alors $y = 0{,}262(6{,}1) = 1{,}60$ m, même valeur que celle qu'on a calculée dans le problème 10.22.

10.28 Résoudre le problème 10.23 en utilisant les facteurs de débit de la table 11.

Solution

D'après le problème 10.25, équation (*1*),

$$\frac{Qn}{y^{8/3}S^{1/2}} = K \qquad \frac{(14)(0{,}010)}{(1{,}8)^{8/3}(0{,}000\,4)^{1/2}} = 1{,}46 = K$$

$K = 1{,}46$ ce qui correspond exactement à un rapport y/b égal à 0,45. Alors $b = 1{,}8/0{,}45 \approx 4{,}0$ m comme dans le calcul du problème 10.23.

10.29 Un canal de section transverse trapézoïdale doit transporter 24,3 m³/s. Si la pente $S = 0{,}000\,144$, $n = 0{,}015$, la largeur de la base $b = 6$ m et la pente des côtés est 2/3, calculer la profondeur normale du canal y_N par la formule et à l'aide des tables.

Solution

(*a*) Par la formule

$$24{,}3 = \frac{1}{0{,}015}(6y_N + 1{,}5y_N^2)\left(\frac{6y_N + 1{,}5y_N^2}{6 + 2y_N\sqrt{3{,}25}}\right)^{2/3}(0{,}000\,144)^{1/2}$$

ou

$$30{,}4 = \frac{(6y_N + 1{,}5y_N^2)^{5/3}}{(6 + 2y_N\sqrt{3{,}25})^{2/3}}$$

Essayons $y_N = 2{,}4$: $30{,}4 \stackrel{?}{=} \dfrac{(14{,}4 + 8{,}64)^{5/3}}{(6 + 4{,}8\sqrt{3{,}25})^{2/3}}$ ou $30{,}4 \neq 31{,}2$ (assez proche).

On peut calculer la profondeur du canal par approximations successives jusqu'à ce que l'on obtienne la précision voulue. La profondeur normale est un peu inférieure à 2,4 m.

(*b*) Avant d'employer la table 12 de l'annexe,

$$\frac{Qn}{b^{8/3}S^{1/2}} = \frac{24{,}3(0{,}015)}{(6)^{8/3}(0{,}000\,144)^{1/2}} = 0{,}256 = K'$$

Dans la table 12, pour une pente de 2/3,

$$y/b = 0{,}38, \quad K' = 0{,}238 \quad \text{et} \quad y/b = 0{,}40, \quad K' = 0{,}262$$

Interpolant pour $K' = 0{,}256$, nous obtenons $y/b = 0{,}395$. Alors $y_N = 0{,}395(6) = 2{,}37$ m.

10.30 Pour une surface donnée de la section transverse, calculer les dimensions optimales d'un canal trapézoïdal.

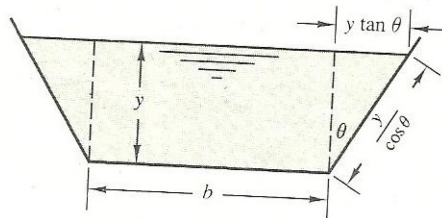


Fig. 10-8

Solution

L'examen de la formule de Chezy indique que, pour une surface de la section transverse et une pente donnée, le débit d'un canal de rugosité donnée sera maximal quand le rayon hydraulique est maximal. Il s'ensuit que le rayon hydraulique va être maximum quand le périmètre mouillé est minimum. En se reportant à la figure 10-8, on a :

$$A = by + 2\left(\frac{1}{2}y\right)(y \tan\theta) \quad \text{ou} \quad b = A/y - y \tan\theta$$

ou

$$p = b + 2y\cos\theta \quad \text{ou} \quad p = A/y - y\tan\theta + 2y\cos\theta.$$

En dérivant p par rapport à y et en égalant à zéro, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -A/y^2 - \tan\theta + \frac{2}{\cos\theta} = 0 \quad \text{soit} \quad A = \left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right)y^2$$

D'où :

$$R \text{ maximal} = \frac{A}{p} = \frac{\left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right)y^2}{\left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right)y^2/y - y\tan\theta + \frac{2y}{\cos\theta}} = \frac{y}{2}$$

Notes

(1) Pour tous les canaux en forme de trapèze, on obtient une meilleure section hydraulique pour $R = y/2$. La section symétrique est un demi-hexagone.

(2) Pour un canal rectangulaire (quand $\theta = 0°$) $A = 2y^2$ et aussi $A = by$, ce qui donne $y = b/2$; en plus $R = y/2$. Ainsi la meilleure profondeur est égale à la moitié de la largeur, avec le rayon hydraulique égal à la moitié de la profondeur.

(3) Le cercle a le plus petit périmètre pour une surface donnée. Un canal ouvert en demi-cercle aura un débit d'eau supérieur à n'importe quel autre (pour la même surface, même pente et même facteur n).

10.31 Déterminer (a) quelle doit être la section optimale d'un canal en forme de trapèze, $n = 0{,}025$, devant transporter 12,7 m^3/s. Pour éviter l'érosion, la vitesse ne doit pas dépasser 0,91 m/s et les côtés doivent avoir une pente de 1/2. (b) Quelle doit être la pente S du canal? Se reporter à la figure du problème 10.30.

Solution

(a)

$$R = \frac{y}{2} = \frac{A}{p} = \frac{by + 2(\frac{1}{2}y)(2y)}{b + 2y\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad b = 2y\sqrt{5} - 4y \qquad (1)$$

$$A = Q/V = 12{,}70/0{,}91 = by + 2y^2 \quad \text{ou} \quad b = (13{,}85 - 2y^2)/y \qquad (2)$$

En égalant (*1*) et (*2*), nous obtenons $y = 2{,}37$ m. Reportant dans (*2*), on obtient $b = 1{,}2$ m. Pour ce trapèze, $b = 1{,}12$ m et $y = 2{,}37$ m.

(b)

$$V = (1/n)R^{2/3}S^{1/2}, \quad 0{,}91 = (1/0{,}025)(2{,}37/2)^{2/3}S^{1/2}, \quad S = 0{,}000\,42$$

10.32 Un canal ouvert ($n = 0{,}011$) a un débit de 1,0 m^3/s sur une pente de 0,006 5. Trouver la section droite la plus efficace (a) semi-circulaire, (b) rectangulaire, (c) triangulaire et (d) trapézoïdale.

Solution

$$V = (1/n)R^{2/3}S^{1/2} \quad \text{ou} \quad Q/A = (1/n)(A/p)^{2/3}S^{1/2}$$

$$A^{5/3}/p^{2/3} = Qn/S^{1/2} = (1)(0{,}011)/0{,}006\,5^{1/2} = 0{,}136\,4$$

(a) Pour une section semi-circulaire (voir la figure 10-2(a)), $A = \pi D^2/8$ et $p = \pi D/2$. Donc :

$$\frac{(\pi D^2/8)^{5/3}}{(\pi D/2)^{2/3}} = 0{,}136\,4 \qquad D = 0{,}951\,3 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 951{,}3 \text{ mm} \quad \text{ou} \quad d = 951{,}3/2 = 476 \text{ mm}.$$

Remarquons sur la figure 10-2(a) que d représente la profondeur d'écoulement; dans ce cas, c'est le rayon de la section semi-circulaire cherchée.

(b) Pour une section rectangulaire (voir la figure 10-2(b), $A = (2d)\,d = 2d^2$; $p = d + 2d + d = 4d$. Donc :

$$(2d^2)^{5/3}/(4d)^{2/3} = 0{,}136\,4$$

D'où $d = 0{,}434$ m et largeur $= 2 \times 0{,}434 = 0{,}868$ m.

(c) Pour une section triangulaire (voir la figure 10-12(c)), $A = (1/2)(d\sqrt{2})(d\sqrt{2}) = d^2$; $p = (2)(d\sqrt{2}) = 2{,}828\,d$. Donc :

$$(d^2)^{5/3}/(2{,}828\,d)^{2/3} = 0{,}136\,4$$

D'où $d = 0{,}614$ m et chaque côté $= 0{,}614\sqrt{2} = 0{,}868$ m.

(d) Pour une section trapézoïdale (voir la figure 10-2(d)),

$$A = (1{,}155d)(d) + 2[(d)(d\ \tan 30°)/2] = 1{,}732d^2$$

et

$$p = (3)(1{,}155d) = 3{,}465d.$$

Donc :

$$(1{,}732\,d^2)^{5/3}/(3{,}465\,d)^{2/3} = 0{,}136\,4$$

D'où $d = 0{,}459$ m et côtés = fond $= 1{,}155 \times 0{,}459 = 0{,}530$ m.

10.33 Établir l'expression de la profondeur critique, de l'énergie spécifique critique et de la vitesse critique (a) pour les canaux rectangulaires et (b) pour un canal quelconque.

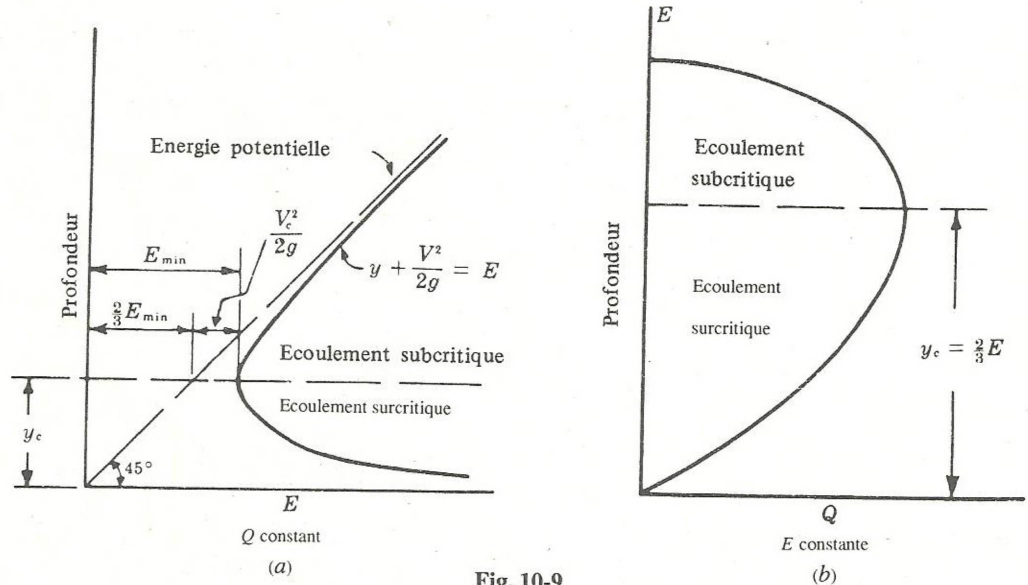


Fig. 10-9

Solution

(a) **Canaux rectangulaires.** Par définition :

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q/b}{y}\right)^2 = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{y}\right)^2 \qquad (1)$$

La profondeur critique pour un débit donné Q est atteinte quand E est minimale. Suivant la procédure normale

$$\frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left[y + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{y}\right)^2\right] = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0, \quad q^2 = gy_c^3, \quad y_c = \sqrt[3]{q^2/g} \qquad (2)$$

Éliminant q dans (*1*), à l'aide des valeurs de (*2*),

$$E_c = y_c + \frac{g y_c^3}{2 g y_c^2} = \frac{3}{2} y_c \tag{3}$$

Puisque $q = yV$ (b = unité), l'expression (*2*) donne

$$y_c^3 = \frac{q^2}{g} = \frac{y_c^2 V_c^2}{g}, \qquad V_c = \sqrt{g y_c}, \qquad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \tag{4}$$

(*b*) **Canal quelconque** $$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2$$

Pour une valeur de Q constante, et puisque la surface varie avec la profondeur y,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2}{A^3} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}\right) = 1 - \frac{Q^2\,\mathrm{d}A}{A^3 g\,\mathrm{d}y} = 0$$

L'aire $\mathrm{d}A$ est définie comme étant le produit de la largeur de la surface d'eau b' par $\mathrm{d}y$. En reportant dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{Q^2 b'}{g A_c^3} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \tag{5}$$

Cette équation doit être vérifiée pour les conditions de l'écoulement critique. Le membre de droite est fonction de la profondeur y, et, en général il faut faire des approximations successives pour déterminer la valeur de y, qui vérifie l'équation (*5*).

En divisant Q^2 par A_c^2, ou en fonction de la vitesse moyenne, (*5*) peut s'écrire

$$V_c^2/g = A_c/b' \quad \text{ou} \quad V_c = \sqrt{g A_c/b'} \tag{6}$$

En utilisant la profondeur moyenne y_m égale au quotient de A par la largeur de la surface b', on peut écrire l'équation (*5*) :

$$Q = A\sqrt{gA/b'} = A\sqrt{g y_m} \tag{7}$$

De plus, $$V_c = \sqrt{g A_c/b'} = \sqrt{g y_m} \quad \text{ou} \quad V_c^2/g y_m = 1 \tag{8}$$

L'énergie spécifique minimale est, en utilisant (*8*),

$$E_{\min} = y_c + V_c^2/2g = y_c + \frac{1}{2} y_m \tag{9}$$

Pour un canal rectangulaire $A_c = b' y_c$, et (*6*) se ramène à l'équation (*4*) ci-dessus.

Voir la figure 10-9 pour avoir deux fois la courbe du débit, une fois avec Q constant, et l'autre avec E constant. Quand le débit est voisin du débit critique, la surface devient instable et il s'y forme des vagues. Il n'est pas souhaitable de concevoir des canaux avec des pentes voisines de la pente critique.

10.34 Établir l'expression du débit maximal unitaire q circulant dans un canal rectangulaire pour une énergie spécifique donnée E.

Solution

En résolvant (*1*) du problème 10.33 pour q, on obtient $q = y\sqrt{2g}(E - y)^{1/2}$. En décrivant par rapport à y et en égalant à zéro, nous obtenons $y_0 = \frac{2}{3}E$. L'équation (*2*) du problème 10.33 devient à présent

$$q_{\max}^2 = g\left(\frac{2}{3}E_c\right)^3 = g y_c^3 \quad \text{ou} \quad q_{\max} = \sqrt{g y_c^3}$$

Pour résumer, dans les canaux rectangulaires, les caractéristiques de l'écoulement critique sont :

(*a*) $E_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{q^2/g}$.

(*b*) $q_{\max} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g\left(\frac{2}{3}E_c\right)^3}$.

(*c*) $y_c = \frac{2}{3}E_c = V_c^2/g = \sqrt[3]{q^2/g}$.

(*d*) $V_c/\sqrt{gy_c} = N_F = 1$.

(*e*) L'écoulement tranquille ou subcritique a lieu quand $N_F < 1$ et $y/y_c > 1$.

(*f*) L'écoulement rapide ou surcritique quand $N_F > 1$ et $y/y_c < 1$.

10.35 Un canal rectangulaire transporte 6,0 m³/s. Calculer la profondeur critique y_c et la vitesse critique V_c lorsque (*a*) la largeur vaut 4 m (*b*) lorsqu'elle vaut 3 m. (*c*) Pour quelle pente obtient-on la vitesse critique dans la question (*a*) si $n = 0{,}020$?

Solution

(*a*) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(6{,}0/4)^2/9{,}81} = 0{,}612$ m, $\quad V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}81 \times 0{,}612} = 2{,}45$ m/s.

(*b*) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(6{,}0/3)^2/9{,}81} = 0{,}742$ m, $\quad V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}81 \times 0{,}742} = 2{,}70$ m/s.

(*c*) $V_c = \frac{1{,}0}{n}R^{2/3}S^{1/2}, \quad 2{,}45 = \frac{1{,}0}{0{,}020}\left(\frac{4 \times 0{,}612}{5{,}224}\right)^{2/3}S^{1/2}, \; S = 0{,}006\,60.$

10.36 Un canal trapézoïdal dont la pente des côtés est de 1/2 doit avoir un débit de 16,7 m³/s. Pour une largeur de fond de 3,6 m, calculer (*a*) la profondeur critique et (*b*) la vitesse critique.

Solution

(*a*) L'aire $A_c = 3{,}6y_c + 2\left(\frac{1}{2}y_c \times 2y_c\right) = 3{,}6y_c + 2y_c^2$, et la largeur de la surface $b' = 3{,}6 + 4y_c$.

L'expression (5) du problème 10.33 donne $\frac{(16{,}7)^2}{9{,}81} = \frac{(3{,}6y_c + 2y_c^2)^3}{3{,}6 + 4y_c}$.

En résolvant cette équation par approximations successives, on obtient $y_c = 1{,}06$ m.

(*b*) On détermine la vitesse critique V_c à l'aide de l'équation (6) du problème 10.33.

$$V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(3{,}82 + 2{,}25)}{3{,}6 + 4{,}24}} = 2{,}76 \text{ m/s}$$

À titre de vérification, pour $y = y_c = 1{,}06$, $V_c = Q/A_c = 16{,}7/[(3{,}6)(1{,}06) + (2)(1{,}06)^2] = 2{,}75$ m/s.

10.37 Un canal en forme de trapèze a une largeur de fond de 6,096 m, des côtés de pente 1, et l'eau y a une profondeur de 914 mm. Pour $n = 0{,}015$ et un débit de 10,19 m³/s, calculer (*a*) la pente normale, (*b*) la pente critique et la profondeur critique pour 10,19 m³/s et (*c*) la pente critique pour la profondeur normale de 914 mm.

Solution

(*a*) $$Q = \frac{A}{n}R^{2/3}S_N^{1/2}, \quad 10{,}19 = \frac{6{,}407}{0{,}015}\left(\frac{6{,}407}{6{,}096 + 1{,}828\sqrt{2}}\right)^{2/3}S_N^{1/2}, \quad S_N = 0{,}000\,852$$

(*b*) $$V = \frac{Q}{A} = \frac{10{,}19}{6{,}096 + y^2} \quad \text{et} \quad V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{9{,}81(6{,}096y_c + y_c^2)}{6{,}096 + 2y_c}}$$

En égalant les termes relatifs à la vitesse, en élevant au carré et en simplifiant, nous obtenons

$$\frac{[y_c(6{,}096 + y_c)]^3}{6{,}096 + 2y_c} = 10{,}58$$

qui une fois résolue par approximations successives donne une profondeur critique $y_c = 0{,}64$ m.

On calcule la pente critique S_c en utilisant l'équation de Manning :

$$10{,}19 = \frac{[6{,}096(0{,}64) + (0{,}64)^2]}{0{,}015}\left(\frac{6{,}096(0{,}64) + (0{,}64)^2}{6{,}096 + 2(0{,}64\sqrt{2}}\right)^{2/3} S_c^{1/2}, \ S_c = 0{,}002\,8$$

Cette pente donnera un débit critique uniforme, avec une profondeur de 0,64 m et avec $Q = 10{,}19$ m^3/s.

(*c*) D'après (*a*), pour $y_N = 0{,}914$ m, $R = 0{,}738$ m et $A = 6{,}41$ m^2. De plus, en utilisant (*6*) du problème 10.33,

$$V_c = \sqrt{gA/b'} = \sqrt{9{,}81(6{,}41)/[6{,}096 + 2(0{,}914)]} = 2{,}82 \text{ m/s}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation de Manning (de la vitesse), on obtient,

$$2{,}82 = \frac{(0{,}738)^{2/3} S_c^{1/2}}{0{,}015}, \qquad S_c = 0{,}002\,25$$

Cette pente est celle qui produira un écoulement uniforme, critique dans le canal en forme de trapèze avec une profondeur de 914 mm. Notons que dans ce cas le débit $Q = AV = 6{,}41 \times 2{,}82 = 18{,}07$ m^3/s.

10.38 Un canal rectangulaire de 9 m de large, de 1,00 m de profondeur a un débit de 7,6 m^3/s.

(*a*) Quelle est l'énergie spécifique? (*b*) L'écoulement est-il subcritique ou supercritique?

Solution

(*a*) $$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \left(\frac{1}{2g}\right)\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = 1{,}00 + \left(\frac{1}{19{,}62}\right)\left(\frac{7{,}6}{9 \times 1}\right)^2 = 1{,}04 \text{ m}$$

(*b*) $$y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(7{,}6/9)^2/9{,}81} = 0{,}417 \text{ m}$$

L'écoulement est subcritique puisque la profondeur de l'eau dépasse la profondeur critique (voir le problème 10.34).

10.39 Un canal triangulaire ($n = 0{,}012$) est décrit sur la figure 10-10; il doit transporter de l'eau à la cadence de 10 m^3 par seconde. Trouver la profondeur, la vitesse et pente critiques du canal.

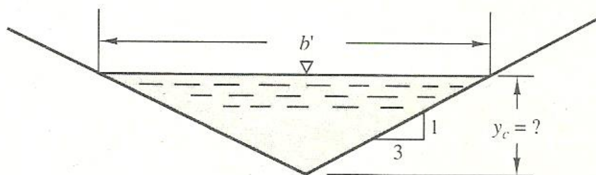


Fig. 10-10

Solution

À partir de l'équation (5) du problème 10.33, $Q^2/g = A_c^3/b'$, d'où :

$$A_c = (2)[(y_c)(3y_c)/2] = 3y_c^2; \qquad b' = 6y_c$$
$$10^2/9{,}81 = (3y_c^2)^3/6y_c, \qquad y_c = 1{,}178 \text{ m}$$
$$V_c = Q/A = 10/[(3)(1{,}178)^2] = 2{,}402 \text{ m/s}$$
$$S_c = [(nV_c)/1{,}0R_c^{2/3}]^2$$
$$R_c = A/p = \frac{(3)(1{,}178)^2}{(2)\sqrt{10}(1{,}178)} = 0{,}558\,8 \text{ m}, \qquad S_c = \left[\frac{(0{,}012)(2{,}402)}{(1{,}0)(0{,}558\,8)^{2/3}}\right]^2 = 0{,}001\,81$$

10.40 Un canal trapézoïdal a pour largeur de fond 6 m et pour pente des côtés 1/2. Quand l'eau a 1,00 m de profondeur, le débit est de 10 m³/s. (*a*) Quelle est l'énergie spécifique ? (*b*) L'écoulement est-il subcritique ou surcritique ?

Solution

(*a*) Aire $A = 6(1{,}00) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(1{,}00)(2{,}00) = 8{,}00 \text{ m}^2$.

$$E = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = 1{,}00 + \frac{1}{19{,}62}\left(\frac{10}{8}\right)^2 = 1{,}08 \text{ m}$$

(*b*) En utilisant $\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'}, \frac{(10)^2}{9{,}81} = \frac{(6y_c + 2y_c^2)^3}{6 + 4y_c}$.

En résolvant par approximation successives, $y_c = 0{,}611$ m.
La profondeur réelle dépasse la profondeur critique et l'écoulement est donc subcritique.

10.41 Le débit d'un canal rectangulaire ($n = 0{,}012$) de 4,6 m de large est de 11,3 m³/s quand la pente est de 1 m sur 100 m. L'écoulement est-il surcritique ou subcritique ?

Solution

(1) Recherchons quelles sont les conditions critiques pour le canal

$$q_{\text{max}} = 11{,}3/4{,}6 = \sqrt{gy_c^3} \quad \text{d'où} \quad y_c = 0{,}850 \text{ m}$$

(2) On peut trouver quelle est la pente critique pour la profondeur critique ci-dessus à l'aide de la formule de Chezy-Manning.

$$Q = A\frac{1}{n}R^{2/3}S_c^{1/2}$$
$$11{,}3 = (4{,}6 \times 0{,}850)\left(\frac{1{,}0}{0{,}012}\right)\left(\frac{4{,}6 \times 0{,}850}{4{,}6 + (2)(0{,}850)}\right)^{2/3} S_c^{1/2}$$

d'où $$S_c = 0{,}002\,3.$$
Puisque la pente donnée *dépasse* la pente critique, l'écoulement est surcritique.

10.42 Un canal rectangulaire de 3 m de large, transporte 11,3 m³/s. (*a*) Dresser le tableau (comme préparatif à l'exécution d'un diagramme) de la profondeur d'eau en fonction de l'énergie spécifique pour des profondeurs allant de 0,3 m à 2,4 m. (*b*) Déterminer l'énergie spécifique minimale. (*c*) Quel est le type de l'écoulement quand la profondeur est de 0,6 m et de 2,4 m ? (*d*) Pour $C = 55$, quelles sont les pentes nécessaires pour avoir des profondeurs considérées en (*c*) ?

Solution

(*a*) D'après $E = y + \dfrac{V^2}{2g} = y + \dfrac{(Q/A)^2}{2g}$ nous obtenons :

Pour $y = 0{,}30$ m,	$E = 0{,}30 + \dfrac{(11{,}3/0{,}90)^2}{2g}$	$= 8{,}33$ N · m/N
$= 0{,}60$	$= 0{,}60 + 2{,}01$	$= 2{,}61$
$= 0{,}90$	$= 0{,}90 + 0{,}89$	$= 1{,}79$
$= 1{,}20$	$= 1{,}20 + 0{,}50$	$= 1{,}70$
$= 1{,}50$	$= 1{,}50 + 0{,}32$	$= 1{,}82$
$= 1{,}80$	$= 1{,}80 + 0{,}22$	$= 2{,}02$
$= 2{,}10$	$= 2{,}10 + 0{,}16$	$= 2{,}26$
$= 2{,}40$	$= 2{,}40 + 0{,}13$	$= 2{,}53$ m

(*b*) La valeur minimale de E se trouve entre 1,79 et 1,70 m.
En se servant de l'équation (2) du problème 10.33, $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(11{,}3/3)^2/9{,}81} = 1{,}12$ m

Alors, $E_{\text{min}} = E_c = \dfrac{3}{2} y_c = \dfrac{3}{2}(1{,}12) = 1{,}68$ m.

Notons que $E = 2{,}61$ pour $y = 0{,}60$ m et 2,53 m pour 2,4 m de profondeur. La figure 10-9(*a*) du problème 10.33 indique qu'il existe deux profondeurs pour une énergie spécifique donnée quand le débit Q est constant.

(*c*) Pour une profondeur de 0,6 m (en dessous de la profondeur critique), l'écoulement est surcritique et pour la profondeur de 2,4 m l'écoulement est subcritique.

(*d*)
$$Q = CA\sqrt{RS}$$

Pour $y = 0{,}6$ m, $A = 1{,}8$ m^2 et $R = 1{,}8/4{,}2 = 0{,}429$ m, $11{,}3 = 55(1{,}8)\sqrt{0{,}429S}$ et $S = 0{,}030\,4$

Pour $y = 2{,}4$ m, $A = 7{,}2$ m^2 et $R = 7{,}2/7{,}8 = 0{,}923$ m, $11{,}3 = 55(7{,}2)\sqrt{0{,}923S}$ et $S = 0{,}000\,88$.

10.43 Un canal rectangulaire ($n = 0{,}012$) est établi avec une pente de 0,003 6 et transporte 16,4 m^3/s. Pour avoir les conditions de l'écoulement critique quelle doit être la largeur?

Solution

D'après le problème 10.34, $q_{\text{max}} = \sqrt{g y_c^3}$. Ainsi $16{,}4/b = \sqrt{9{,}81 y_c^3}$.
En utilisant des approximations successives, comparer le débit calculé au débit donné.

Essai 1. Soit $b = 2{,}4$ m, $y_c = \sqrt[3]{(16{,}4/2{,}4)^2/9{,}81} = 1{,}682$ m

Alors, $R = A/p = (2{,}4 \times 1{,}682)/5{,}764 = 0{,}7$ m

$$Q = AV = (2{,}4 \times 1{,}682)\left[\frac{(0{,}7)^{2/3}(0{,}003\,6)^{1/2}}{0{,}012}\right] = 15{,}91 \text{ m}^3/\text{s}$$

Essai 2. Puisqu'on doit augmenter le débit, prenons $b = 2{,}60$ m.

Alors, $y_c = \sqrt[3]{(16{,}4/2{,}6)^2/9{,}81} = 1{,}59$ m $\qquad R = (2{,}6 \times 1{,}59)/5{,}78 = 0{,}715$ m

$$Q = AV = (2{,}6 \times 1{,}59)\left[\frac{(0{,}175)^{2/3}(0{,}003\,6)^{1/2}}{0{,}012}\right] = 16{,}53 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ce résultat est sans doute suffisamment précis.

10.44 Pour une énergie spécifique constante de 2,00 N·m/N, quel sera le débit maximal d'un canal rectangulaire de 3,00 m de large?

Solution

Profondeur critique $y_c = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3}(2{,}00) = 1{,}33$ m (voir l'équation (*1*) du problème 10.34.)

Vitesse critique $V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9{,}81 \times 1{,}33} = 3{,}61$ m/s et,

Débit maximal $Q = AV = (3{,}00 \times 1{,}33)(3{,}61) = 14{,}4\ \text{m}^3/\text{s}$.

En appliquant $q_{\max} = \sqrt{gy_c^3}$ [équation (*b*) du problème 10-34], on a :

Débit maximum $Q = bq_{\max} = 3{,}00\sqrt{9{,}81(1{,}33)^3} = 14{,}4\ \text{m}^3/\text{s}$.

10.45 Le canal triangulaire ($n = 0{,}13$) de la figure 10-11 débite 38,5 m^3/s d'eau. Trouver la profondeur, les vitesse et pente critiques du canal.

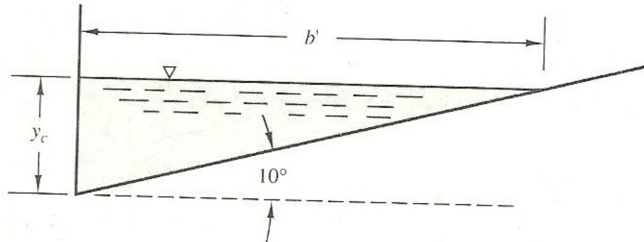


Fig. 10-11

Solution

À partir de l'équation (*5*) du problème 10.33, $Q^2/g = A_c^3/b'$, d'où :

$$b' = y_c \tan 80° = 5{,}671y_c$$
$$A_c = y_c b'/2 = (y_c)(5{,}671y_c)/2 = 2{,}836y_c^2$$
$$(38{,}5)^2/9{,}81 = (2{,}836y_c^2)^3/(5{,}671y_c) \qquad y_c = 2{,}065\ \text{m}$$
$$V_c = Q/A = 38{,}5/[(2{,}836)(2{,}065)^2] = 3{,}184\ \text{m/s}$$
$$R_c = A/p = \frac{(2{,}836)(2{,}065)^2}{(2{,}065) + (2{,}065/\cos 80°)} = 0{,}866\,5\ \text{m} \quad \text{et} \quad S_c = \left[\frac{(0{,}013)(3{,}184)}{(1{,}0)(0{,}866\,5)^{2/3}}\right]^2 = 0{,}002\,07$$

10.46 Établir une formule donnant une relation entre la longueur, l'énergie et la pente dans les problèmes d'écoulement non uniforme semblables au cas précédent.

Solution

En appliquant l'équation de l'énergie, entre les sections 1 et 2 dans la direction du courant, avec un niveau de référence inférieur au fond du canal, nous obtenons :

$$\text{énergie en 1} - \text{perte de charge} = \text{énergie en 2}$$
$$(z_1 + y_1 + V_1^2/2g) - h_L = (z_2 + y_2 + V_2^2/2g)$$

La pente de la ligne de charge S est h_L/L : alors $h_L = SL$. La pente du fond du canal S_0 est $(z_1 - z_2)/L$; en réarrangeant et en reportant :

$$S_0L + (y_1 - y_2) + (V_1^2/2g - V_2^2/2g) = SL$$

On résoud en général cette expression en L pour des études de canaux ouverts. Ainsi,

$$L \text{ en m} = \frac{(y_1 + V_1^2/2g) - (y_2 + V_2^2/2g)}{S - S_0} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_0} \qquad (A)$$

Les quelques problèmes qui suivent utiliseront l'expression (*A*).

10.47 Un canal rectangulaire ($n = 0{,}013$) a 1,83 m de large et transporte 1,87 m³/s d'eau. En une certaine section F, la profondeur est de 0,975 m. Si la pente du lit du canal est constante et égale à 0,000 400, calculer à quelle distance de F la profondeur est de 0,823 m (employer un tronçon).

Solution

Supposons que la profondeur en question se trouve en *amont* de F. Utilisons les indices 1 et 2 comme d'habitude.

$$A_1 = 1{,}83(0{,}823) = 1{,}506\ \text{m}^2, \quad V_1 = 1{,}87/1{,}506 = 1{,}24\ \text{m/s}, \quad R_1 = 1{,}506/3{,}476 = 0{,}433\ \text{m}$$
$$A_2 = 1{,}83(0{,}975) = 1{,}784\ \text{m}^2, \quad V_2 = 1{,}87/1{,}784 = 1{,}05\ \text{m/s}, \quad R_2 = 1{,}784/3{,}78 = 0{,}472\ \text{m}$$

Ainsi, $V_m = 1{,}145$ m/s et $R_m = 0{,}452\,5$ m. Alors pour un écoulement non uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - S} = \frac{(0{,}056 + 0{,}975) - (0{,}078 + 0{,}823)}{0{,}000\,4 - \left(\dfrac{0{,}013 \times 1{,}145}{(0{,}452\,5)^{2/3}}\right)^2} = -547\ \text{m}$$

Le signe moins indique que la section de profondeur 0,823 m se trouve en aval de F et non en amont comme on l'a supposé.

Ce problème est un exemple de la méthode à employer. On aurait pu obtenir une réponse plus précise en prenant des profondeurs intermédaires de 0,915 m et de 0,870 m (ou des profondeurs exactes en faisant des interpolations), en calculant des valeurs ΔL et en les ajoutant. De cette manière on peut établir la *courbe de profil* des eaux arrières. La courbe du profil des eaux arrières n'est pas une droite.

10.48 Un canal rectangulaire, de 12,2 m de large transporte 25,47 m³/s d'eau. La pente du canal est de 0,002 83. À la section 1, la profondeur est de 1,37 m et à la section 2, 92 m plus bas, la profondeur est de 1,52 m. Quel est le facteur de rugosité n?

Solution

$$A_2 = 12{,}2(1{,}52) = 18{,}54\ \text{m}^2, \quad V_2 = 25{,}47/18{,}54 = 1{,}37\ \text{m/s}, \quad R_2 = 18{,}54/15{,}24 = 1{,}217\ \text{m}$$
$$A_1 = 12{,}2(1{,}37) = 16{,}71\ \text{m}^2, \quad V_1 = 25{,}47/16{,}71 = 1{,}52\ \text{m/s}, \quad R_1 = 16{,}71/14{,}94 = 1{,}118\ \text{m}$$

Ainsi $V_m = 1{,}445$ m/s et $R_m = 1{,}168$ m. Pour un écoulement non uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - \left(\dfrac{nV}{R^{2/3}}\right)^2} \qquad 92 = \frac{(0{,}096 + 1{,}52) - (0{,}118 + 1{,}37)}{0{,}002\,83 - \left(\dfrac{n \times 1{,}445}{(1{,}168)^{2/3}}\right)^2}$$

et $n = 0{,}029\,1$.

10.49 Un canal rectangulaire de 6,1 m de large a une pente de 1 m par 1 000 m. La profondeur à la section 1 est de 2,59 m et à la section 2, 610 m plus bas, elle est de 3,13 m. Si $n = 0{,}011$, calculer le débit probable.

Solution

Utilisant le lit du courant à la section 2 comme niveau de référence,

$$\text{énergie en } 1 = y_1 + V_1^2/2g + z_1 = 2{,}59 + V_1^2/2g + 0{,}61$$
$$\text{énergie en } 2 = y_2 + V_2^2/2g + z_2 = 3{,}13 + V_2^2/2g + 0$$

La chute de la courbe de l'énergie = énergie en 1 − énergie en 2. Puisque cette valeur est inconnue, on va faire une hypothèse sur la pente de la courbe de l'énergie :

$$\text{La pente } S = \frac{\text{perte de charge}}{L} = \frac{(3{,}20 - 3{,}13) + (V_1^2/2g - V_2^2/2g)}{610} \qquad (1)$$

Prenons $S = 0{,}000\,144$. D'autre part, on a besoin des valeurs A_{moyen} et R_{moyen}

$$A_1 = 6{,}1(2{,}59) = 15{,}8\ \text{m}^2, \qquad R_1 = 15{,}8/11{,}28 = 1{,}4\ \text{m}$$
$$A_2 = 6{,}1(3{,}13) = 19{,}09\ \text{m}, \qquad R_2 = 19{,}09/12{,}36 = 1{,}54\ \text{m}$$

Ainsi, $A_{\text{m}} = 17{,}445\ \text{m}^2$ et $R_{\text{m}} = 1{,}47$ m.

(1) Première approximation.

$$Q = A_m \frac{R_m^{2/3} S^{1/2}}{n} = (17{,}445/0{,}011)(1{,}47)^{2/3}(0{,}000\,144)^{1/2} = 24{,}6\ \text{m}^3/\text{s}$$

Vérifier la pente S de l'équation (*1*) ci-dessous, comme suit :

$$V_1 = 24{,}6/15{,}8 = 1{,}557, \quad V_1^2/2g = 0{,}124$$
$$V_2 = 24{,}6/19{,}09 = 1{,}289, \quad V_2^2/2g = 0{,}085$$
$$S = \frac{(3{,}20 - 3{,}13) + 0{,}039}{610} = 0{,}000\,179$$

Le gradient d'énergie tombe de 0,358 m en 2 000 m, valeur supérieure à la valeur supposée.

(2) Deuxième approximation. Essayons $S = 0{,}000\,210$. Alors,

$$Q = 24{,}6 \times \left(\frac{0{,}000\,210}{0{,}000\,144}\right)^{1/2} = 29{,}7\ \text{m}^3/\text{s}$$

Vérifiant à nouveau

$$V_1 = 29{,}7/15{,}8 = 1{,}88\ \text{m/s}, \quad V_1^2/2g = 0{,}180\ \text{m}$$
$$V_2 = 29{,}7/19{,}09 = 1{,}56\ \text{m/s} \quad V_2^2/2g = 0{,}124\ \text{m}$$
$$S = \frac{(3{,}20 - 3{,}13) + 0{,}056}{610} = 0{,}000\,206$$

Cette pente coïncide (raisonnablement) avec l'hypothèse faite. Ainsi, le débit approximatif est $Q = 29{,}7\ \text{m}^3/\text{s}$.

10.50 De l'eau coule à une profondeur normale dans un canal rectangulaire en ciment ayant une largeur de 12,0 m. Cette eau rencontre un obstacle (comme le montre la figure 10-12) obligeant le niveau d'eau à s'élever au-dessus de la profondeur normale, à l'endroit de l'obstruction et à une certaine distance en amont. Le débit est de 126 m³/s et la pente de $0{,}86 \times 10^{-3}$. Si la profondeur, juste au niveau de l'obstacle, (y_0), est égale à 4,55 m, à quelle distance L de l'obstacle la profondeur de l'eau en amont est-elle redevenue normale ?

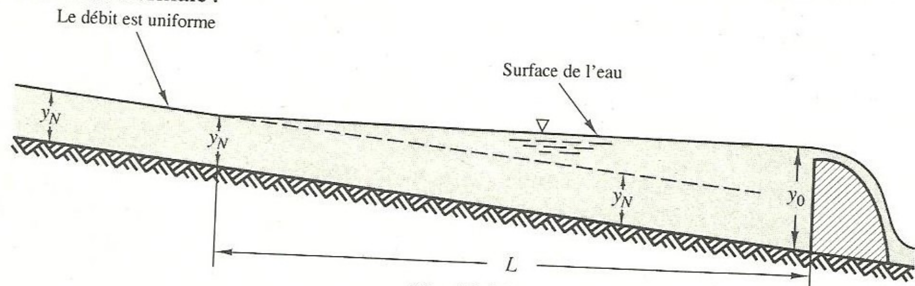


Fig. 10-12

Solution

$$y_c = \sqrt[3]{(Q/b')^2/g} = \sqrt[3]{(126/12{,}0)^2/9{,}81} = 2{,}24\ \text{m}$$
$$V = Q/A = (1{,}0/n)R^{2/3}S^{1/2}$$

$$126/(12{,}0y) = (1{,}0/0{,}013)\left[\frac{12{,}0y}{(12{,}0+2y)}\right]^{2/3}(0{,}000\,86)^{1/2}$$

$$(2{,}256)\left[\frac{12{,}0y}{(12{,}0+2y)}\right]^{2/3} - \frac{10{,}5}{y} = 0$$

Une méthode d'approximations successives de cette équation fournit une valeur de y, la profondeur normale $(y_N) = 2{,}95$ m. Puisque $y_N > y_c$, l'écoulement est sous-critique et les calculs doivent progresser en allant vers l'amont. Maintenant le problème consiste à déterminer la distance en aval de l'obstacle (profondeur : 4,55 m) au point où la profondeur atteint 2,95 m. Ceci est fait arbitrairement à l'aide de 10 incréments d'égale profondeur de 0,16 m. Le calcul figure dans le tableau ci-dessous; on utilise l'expression (*A*) du problème 10.46. La sommation des valeurs de la colonne 8 du tableau (4 568 m) donne la solution du problème (c'est-à-dire la valeur de L).

(1) y (m)	(2) V (m/s) $\frac{126}{12{,}0\times(1)}$	(3) V_m (m/s)	(4) $V^2/2g$ (m) $\frac{(2)^2}{2\times 9{,}807}$	(5) R (m) $\frac{12{,}0\times(1)}{12{,}0+2\times(1)}$	(6) R_m (m)	(7) S $\left[\frac{0{,}013\times(3)}{(6)^{2/3}}\right]^2$	(8) L (m) $\frac{[(4)+(1)]_2-[(4)+(1)]_1}{0{,}000\,86-(7)}$
4,55	2,308		0,271 6	2,588			
		2,350			2,562	0,000 266 2	−236
4,39	2,392		0,291 7	2,535			
		2,437			2,508	0,000 294 6	−243
4,23	2,482		0,314 1	2,481			
		2,531			2,453	0,000 327 2	−253
4,07	2,580		0,339 4	2,425			
		2,633			2,396	0,000 365 4	−266
3,91	2,685		0,367 6	2,367			
		2,743			2,338	0,000 409 8	−284
3,75	2,800		0,399 7	2,308			
		2,863			2,277	0,000 462 6	−311
3,59	2,925		0,436 2	2,246			
		2,993			2,214	0,000 524 6	−353
3,43	3,061		0,477 7	2,182			
		3,136			2,150	0,000 598 9	−429
3,27	3,211		0,525 7	2,117			
		3,294			2,083	0,000 689 3	−613
3,11	3,376		0,581 1	2,048			
		3,468			2,013	0,007 799 7	−1 580
2,95	3,559		0,645 8	1,978			
							−4 568 m

10.51 Un réservoir alimente un canal rectangulaire de 4 572 mm de large, $n = 0{,}015$. À l'entrée, la profondeur de l'eau dans le réservoir est de 1 896 mm au-dessus du fond du canal. (Se reporter à la figure 10-13). Le canal a 244 m de long et descend de 0,22 m sur cette longueur. La profondeur de l'eau à l'arrière du déversoir à bord mince, situé à *l'extrémité* du canal est de 1 256 mm. Calculer, en faisant *une seule mesure*, la capacité du canal, en admettant que la pente à l'entrée est de $0{,}25\ V_1^2/2g$.

Solution

L'équation de Bernoulli, entre A et 1, avec pour niveau de référence 1, donne

$$(0 + \text{négl.} + 1{,}896) - 0{,}25\ V_1^2/2g = (0 + V_1^2/2g + y_1) \qquad (1)$$

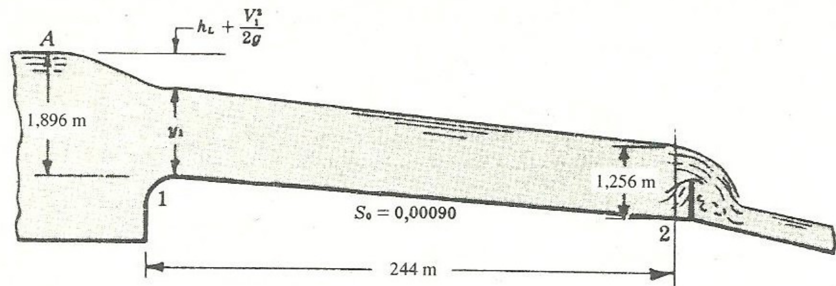


Fig. 10-13

et
$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - \left(\dfrac{nV_m}{R_m^{2/3}}\right)^2} \tag{2}$$

Résolvons ces équations par approximations successives jusqu'à ce que L soit approximativement égale à 244 m.

Essayons $y_1 = 1,50$ m, alors d'après (*1*) $V_1^2/2g = (1,896 - 1,50)/1,25 = 0,317$ m, $V_1 = 2,49$ m/s et $q = y_1 V_1 = 1,50(2,49) = 3,735$ m^3/s $V_2 = 3,735/1,256 = 2,97$ m^3/s.

$$V_m = \frac{1}{2}(2,49 + 2,97) = 2,73 \text{ m/s}$$

et
$$R_{\text{moyen}} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}[(4,572 \times 1,5)/7,572 + (4,572 \times 1,256)/7,084] = 0,858 \text{ m}$$

Reportant dans l'équation (*2*) ci-dessus, nous trouvons $L = 96,3$ m.

Augmentons la valeur de y pour atteindre 1,68 m et répétons le calcul. Les résultats, disposés dans un tableau donnent :

y_1	V_1	q_1	V_2	V_m	R_m	L	*Notes*
1,68	1,86	3,11	2,48	2,17	0,89	854 m	diminuer y_1
1,59	2,21	3,51	2,80	2,51	0,875	231 m	résultat satisfaisant

La capacité du canal = $3,51 \times 4,572 = 16,05$ m^3/s.

Si on avait eu besoin d'une grande précision, on aurait en commençant par le côté le plus bas, et pour un débit unitaire $q = 3,51$ m^3/s, cherché la longueur du tronçon qu'il aurait fallu prendre pour avoir une profondeur environ 10 % supérieure à 1,256 m soit environ 1,38 m, ensuite on aurait cherché la longueur qu'il aurait fallu prendre pour avoir une profondeur de 1,50 m, et ainsi de suite. Si la somme des longueurs avait dépassé 244 m, il aurait fallu diminuer la valeur de y_1, en obtenant par conséquent une augmentation de q.

10.52 Établir l'expression donnant la perte de la surface du liquide dans des canaux rectangulaires larges pour des écoulements progressivement variés.

Solution

L'énergie totale par N de fluide, par rapport à un plan de référence arbitraire est

$$H = y + V^2/2g + z$$

où on prend l'unité pour coefficient de correction de l'énergie cinétique α. En dérivant cette expression par rapport à L, distance parcourue le long du canal, nous obtenons

$$\frac{dH}{dL} = \frac{dy}{dL} + \frac{d(V^2/2g)}{dL} + \frac{dz}{dL} \tag{A}$$

Pour des canaux rectangulaires (ou des canaux larges de profondeur moyenne y_m) $V^2 = (q/y)^2$ et

$$\frac{d(q^2/2gy^2)}{dL} = -\frac{2q^2}{2gy^3}\left(\frac{dy}{dL}\right) = -\frac{V^2}{gy}\left(\frac{dy}{dL}\right)$$

En reportant dans (A) et en utilisant $\mathrm{d}H/\mathrm{d}L = -S$ (ou la pente de la ligne de charge) ainsi que $\mathrm{d}z/\mathrm{d}L = -S_0$ (ou la pente du fond du canal), nous obtenons

$$-S = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L} - \frac{V^2}{gy}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L}\right) - S_0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L} = \frac{S_0 - S}{(1 - V^2/gy)} = \frac{S_0 - S}{1 - N_F^2} \tag{B}$$

Le terme $\mathrm{d}y/\mathrm{d}L$ représente la pente de la surface de l'eau par rapport au fond du canal. Quand le canal est incliné dans le sens du courant, S_0 est positif. De manière analogue, S est positif (toujours). Pour un écoulement uniforme, $S = S_0$ et $\mathrm{d}y/\mathrm{d}L = 0$.

On peut établir comme suit l'équation (B) sous une autre forme. La formule de Manning est

$$Q = (1/n)AR^{2/3}S^{1/2}$$

En résolvant cette équation par rapport à la pente de la ligne de charge, et en utilisant $q = Q/b$ et $A = by$ et $R = y$ pour des canaux rectangulaires larges, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}L} = S = \frac{n^2(q^2b^2/b^2y^2)}{y^{4/3}}$$

De la même façon, la pente du lit du canal, en fonction de la profondeur normale y_N et du coefficient n_N peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}L} = S_0 = \frac{n_N^2(q^2b^2/b^2y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

alors la première partie de l'équation (B) devient

$$-\frac{n^2(q^2b^2/b^2y^2)}{y^{4/3}} = (1 - V^2/gy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L} - \frac{n_N^2(q^2b^2/b^2y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

Mais $V^2 = q^2/y^2$, $n \cong n_N$ et $q^2/g = y_c^3$, alors,

$$\frac{-n^2q^2}{y^{10/3}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L}(1 - y_c^3/y^3) - \frac{n^2q^2}{y_N^{10/3}} \tag{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L} = \frac{(nq)^2[1/y_N^{10/3} - 1/y^{10/3}]}{1 - (y_c/y)^3} \tag{D}$$

En utilisant $Q/b = q = y_N[(1/n)y_N^{2/3}S_0^{1/2}] \circ (nq)^2 = y_N^{10/3}S_0$, l'équation (D) s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}L} = S_0\left[\frac{1 - (y_N/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3}\right]. \tag{E}$$

Les profils des surfaces doivent vérifier des conditions limites. Par exemple, quand y tend vers zéro, le dénominateur de (E) tend vers zéro. Ainsi $\mathrm{d}y/\mathrm{d}L$ devient infinie et les courbes coupent la droite de la profondeur critique perpendiculairement. Ainsi les profils des surfaces au voisinage de $y - y_c$ ne sont qu'approximatifs.

De façon analogue, quand y tend vers y_N, le numérateur tend vers zéro. Ainsi les courbes s'approchent de la profondeur normale.

Enfin, quand y tend vers zéro, le profil de la surface s'approche du lit du canal perpendiculairement, ce qui est impossible dans l'hypothèse d'un écoulement progressivement varié.

10.53 Faire un résumé du système de classification du profil de surfaces pour l'écoulement progressivement varié dans un canal large.

Solution

Il y a un certain nombre de conditions différentes existant dans un canal qui donnent naissance à quelque douze types différents d'écoulement non uniforme (varié). Dans l'expression (E) du problème 10.52 pour des valeurs positives de la profondeur, y augmente en aval le long du canal, et pour des valeurs négatives de dy/dL, la profondeur y diminue en aval le long du canal.

Dans le tableau ci-après, on a présenté un résumé des douze différents types d'écoulements variés. On en étudiera quelques-uns en détail et le lecteur peut analyser ceux qui restent d'une façon analogue.

La pente du canal S est dite «douce» quand elle est telle que la profondeur normale $y_N > y_c$. Si la profondeur y est supérieure à y_N et y_c, la courbe est dite de «type 1»; si la profondeur y est comprise entre y_N et y_c, elle est dite de type 2 et si elle est plus petite que y_N et y_c, de type 3.

On remarquera que, pour les courbes de type 1, puisque la vitesse diminue à cause de l'augmentation de la profondeur, la surface de l'eau doit s'approcher d'une asymptote horizontale (voir M_1, C_1 et S_1). De façon analogue, les courbes qui s'approchent de la droite de profondeur normale, le font asymptotiquement. Ainsi qu'on l'a remarqué précédemment, les courbes qui s'approchent de la droite de profondeur critique la traversent verticalement, puisque le dénominateur de l'équation (E) du problème 10.52 devient nul dans de tels cas. Par conséquent, les courbes obtenues pour des pentes critiques font exception à ce qui a été dit précédemment puisqu'il est impossible que la surface de l'eau soit à la fois tangente et perpendiculaire à la droite de profondeur critique.

Sur chacun des profils du tableau qui suit, l'échelle verticale a été très agrandie par rapport à l'échelle horizontale. Comme on l'a indiqué dans les problèmes numériques pour les courbes M_1, de tels profils peuvent avoir des milliers de mètres de long.

Le tableau 10.1 donne les relations entre les pentes et les profondeurs, le signe de dy/dL, le type de profil, le symbole du profil, le type de l'écoulement, et un diagramme représentant la forme du profil. On remarquera en étudiant chaque diagramme, que les valeurs de y pour chaque profil sont supérieures ou inférieures à y_N et (ou) à y_c.

10.54 Pour un canal rectangulaire, établir l'expression de la relation entre les profondeurs avant et après le ressaut, se reporter à la figure 10-14.

Solution

Pour le système en équilibre compris entre les sections 1 et 2, considérant une largeur unité de canal et un débit unitaire q,

$$P_1 = w\bar{h}A = w\left(\frac{1}{2}y_1\right)y_1 = \frac{1}{2}wy_1^2 \quad \text{et d'une façon analogue} \quad P_2 = \frac{1}{2}wy\frac{2}{2}$$

D'après le principe de conservation de la quantité de mouvement,

$$\Delta P_x \, dt = \Delta \text{ (quantité de mouvement linéaire)} = \frac{W}{g}(\Delta V_x) = M\,\Delta V_x$$

$$\frac{1}{2}w(y_2^2 - y_1^2)\,dt = \frac{wq\,dt}{g}(V_1 - V_2)$$

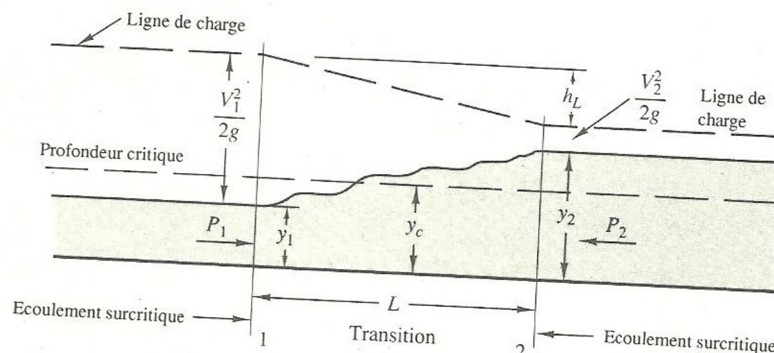


Fig. 10-14

Tableau 10.1 Types d'écoulements variés

Pente du canal	Profondeur	$\left(\frac{dy}{dL}\right)$	Prof. dans le sens du courant	Symbole	Type de l'écoulement	Forme du profil
Douce $0 < S < S_c$	$y > y_N > y_c$	+	Augmente	M_1	Subcritique	
	$y_N > y > y_c$	−	Diminue	M_2	Subcritique	
	$y_N > y_c > y$	+	Augmente	M_3	Surcritique	
Horizontale $S = 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	−	Diminue	H_2	Subcritique	
	$y_c > y$	+	Augmente	H_3	Surcritique	
Critique $S_N = S_c$ $y_N = y_c$	$y > y_c = y_N$	+	Augmente	C_1	Subcritique	
	$y_c = y = y_N$		Constante	C_2	Uniforme, critique	
	$y_c = y_N > y$	+	Augmente	C_3	Surcritique	
Prononcée $S > S_c > 0$	$y > y_c > y_N$	+	Augmente	S_1	Subcritique	
	$y_c > y > y_N$	−	Diminue	S_2	Surcritique	
	$y_c > y_N > y$	+	Augmente	S_3	Surcritique	
Contraire $S < 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	−	Diminue	A_2	Subcritique	
	$y_c > y$	+	Augmente	A_3	Surcritique	

Puisque $V_2 y_2 = V_1 y_1$, et que $V_1 = q/y_1$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$q^2/g = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2) \qquad (1)$$

puisque $q^2/g = y_c^3$

$$y_c^3 = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2) \qquad (2)$$

On a constaté que la longueur du ressaut variait entre $4{,}3 y_2$ et $5{,}2 y_2$.

Le ressaut est un dissipateur d'énergie. Lorsqu'on effectue la conception de bassins de stabilisation du ressaut, la connaissance de la longueur du ressaut et la profondeur y_2 est importante. Il y a bonne dissipation d'énergie quand $V_1^2/g y_1 = 20$ à 80.

10.55 Un canal rectangulaire, de 6,1 m de large, transporte 11,3 m³/s d'eau et les déverse sur un tablier de 6,1 m de large sans pente avec une vitesse moyenne de 6,1 m/s. Quelle est la hauteur du ressaut? Quelle est l'énergie absorbée (perdue) par le ressaut?

Solution

(*a*) $V_1 = 6{,}1$ m/s, $q = 11{,}3/6{,}1 = 1{,}85$ (m³/s)/m de large et $y = q/V_1 = 0{,}303$ m. Alors,

$$q^2/g = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2), \quad (1{,}85)^2/9{,}81 = \frac{1}{2}(0{,}303) y_2 (0{,}303 + y_2), \quad 0{,}349 = 0{,}045\,9 y_2 + 0{,}152 y_2^2$$

d'où $y_2 = -1{,}67$ m $+ 1{,}37$ m. La matrice négative étant superflue, $y_2 = 1{,}37$ m et la hauteur du ressaut est $(1{,}37 - 0{,}303) = 1{,}07$ m.

Notons que $y_c = \sqrt[3]{(1{,}85)^2/9{,}81}$ ou $\sqrt[3]{\frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2)} = 0{,}70$ m.

Ainsi l'écoulement à la profondeur de 0,303 m est surcritique, et à 1,37 m, subcritique.

(*b*) Avant le ressaut, $E_1 = V_1^2/2g + y_1 = (6{,}1)^2/2g + 0{,}303 = 2{,}20$ N · m/N.
Après le ressaut, $E_2 = V_2^2/2g + y_2 = [11{,}3/(6{,}1 \times 1{,}37)]^2/2g + 1{,}37 = 1{,}46$ N · m/N.
Énergie perdue par seconde $= wQH = (9{,}79)(11{,}3)(2{,}20 - 1{,}46) = 81{,}9$ kW.

10.56 Un canal rectangulaire de 4,88 m de large a un débit de 5,43 m³/s. La profondeur de l'eau en aval du ressaut est de 1,28 m. (*a*) Quelle est la profondeur en amont? (*b*) Quelle est la perte de charge?

Solution

(*a*) $q^2/g = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2)$, $(5{,}43/4{,}88)^2/9{,}81 = 0{,}64 y_1 (y_1 + 1{,}28)$, d'où $y_1 = 0{,}138\,7$ m.

(*b*)

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4{,}88(0{,}138\,7) = 0{,}677 \text{ m}^2, & V_1 &= 5{,}43/0{,}677 = 8{,}02 \text{ m/s} \\
A_2 &= 4{,}88(1{,}28) = 6{,}250 \text{ m}^2, & V_2 &= 5{,}43/6{,}250 = 0{,}87 \text{ m/s} \\
E_1 &= V_1^2/2g + y_1 = (8{,}02)^2/2g + 0{,}138\,7 = 3{,}417 \text{ m} \\
E_2 &= V_2^2/2g + y_2 = (0{,}87)^2/2g + 1{,}280 = 1{,}319 \text{ m}
\end{aligned}$$

Énergie perdue $= 3{,}417 - 1{,}319 = 2{,}098$ J/N ou m.

10.57 De l'eau s'écoule d'un déversoir en ciment dans un canal rectangulaire de 9,0 m de largeur à travers un ressaut. Les profondeurs, avant et après le ressaut, sont respectivement de 1,55 m et 3,08 m. Trouver le débit du canal.

Solution

$$q^2/g = \frac{1}{2}y_1 y_2(y_1 + y_2), \qquad q^2/9{,}81 = \frac{1}{2}(1{,}55)(3{,}08)(1{,}55 + 3{,}08)$$

$$q = 10{,}41\ \text{m}^3/(\text{s}\cdot\text{m}), \quad Q = (10{,}41)(9{,}0) = 93{,}7\ \text{m}^3/\text{s}$$

10.58 Après être passé par le déversoir de béton d'un barrage, 254,7 m^3/s se déversent sur un tablier de béton ($n = 0{,}013$). La vitesse de l'eau à la base du déversoir est de 12,8 m/s et la largeur du tablier est de 54,86 m. Les conditions d'écoulement vont produire un ressaut, la profondeur du canal en aval du tablier étant de 3,05 m. Pour que le ressaut s'effectue sur le tablier, (*a*) Quelle doit être sa longueur? (*b*) Quelle est l'énergie perdue du pied du déversoir au côté aval du ressaut?

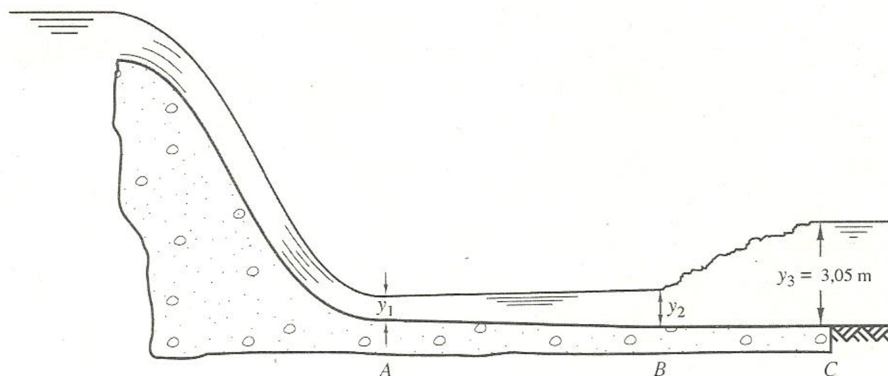


Fig. 10-15

Solution

(*a*) Se reportant à la figure 10-15, calculons d'abord la profondeur y_2 à l'extrémité amont du ressaut.

$$q^2/g = \frac{1}{2}y_2 y_3(y_2 + y_3), \quad (254{,}7/54{,}86)^2/9{,}81 = \frac{1}{2}(3{,}05y_2)(y_2 + 3{,}05), \quad y_2 = 0{,}418\ \text{m}$$

De plus, $y_1 = q/V_1 = (254{,}7/54{,}86)/12{,}8 = 0{,}363$ m

À présent, calculons la longueur L_{AB} sur laquelle s'effectue *l'écoulement retardé*.

$$V_1 = 12{,}8\ \text{m/s}, \quad V_1^2/2g = 8{,}35\ \text{m}, \quad R_1 = (54{,}86 \times 0{,}363)/55{,}59 = 0{,}357\,8\ \text{m}$$

$$V_2 = q/y_2 = 4{,}64/0{,}418 = 11{,}10\ \text{m/s}, \quad V_2^2/2g = 6{,}28\ \text{m}, \quad R_2 = (54{,}86 \times 0{,}418)/57{,}6 = 0{,}398\ \text{m}$$

Alors, $V_m = 11{,}95$ m/s, $R_m = 0{,}377\,9$ m et

$$L_{AB} = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - S} = \frac{(6{,}28 + 0{,}418) - (8{,}35 + 0{,}363)}{0 - \left(\dfrac{0{,}013 \times 11{,}95}{(0{,}377\,9)^{2/3}}\right)^2} = 22{,}82\ \text{m}$$

La longueur du ressaut L_R de B à C est comprise entre $4{,}3y_3$, et $5{,}2y_3$ m. Prenant la valeur habituelle de $5{,}0y_3$,

$$L_R = 5{,}0 \times 3{,}05 = 15{,}25\ \text{m}$$

D'où la longueur totale $ABC = 23 + 15 = 38$ m (approximativement)

(*b*) Énergie en $A = y_1 + V_1^2/2g = 0{,}363 + 8{,}35 = 8{,}713$ m
Énergie en $C = y_3 + V_3^2/2g = 3{,}05 + (1{,}52)^2/2g = 3{,}167$ m
Énergie totale perdue $= \rho g Q H = \dfrac{9\,810}{1\,000}(254{,}7)(8{,}713 - 3{,}167) = 13\,857$ kW

10.59 Pour que le ressaut au bas d'un déversoir ne se propage pas en aval, établir la relation qui doit exister entre les variables indiquées sur la figure 10-16. (Le professeur E.A. Elevatorski a proposé les paramètres sans dimensions indiqués plus loin.

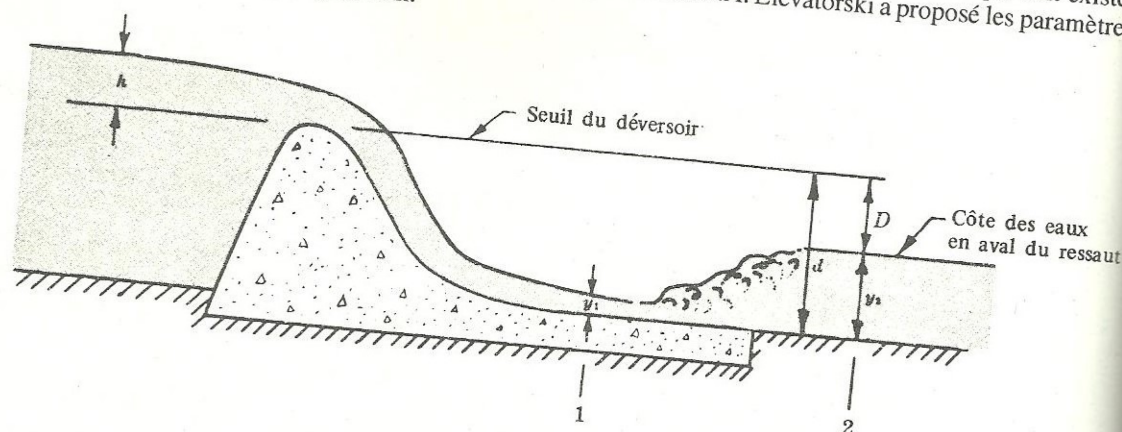


Fig. 10-16

Solution

On applique l'équation de l'énergie entre une section en amont du barrage où on a mesuré h et la section 1, en néligeant la hauteur due à la vitesse d'approche, soit

$$(h + d) + 0 + \text{négl.} - \text{pertes (négl.)} = 0 + 0 + V_1^2/2g$$

ou

$$V_1 = \sqrt{2g(h + d)}.$$

Puisque $q = y_1 V_1$ (m^3/s par m de largeur)

$$y_1 = \frac{q}{V_1} = \frac{q}{\sqrt{2g(d + h)}}$$

ou

$$y_1 = \frac{q}{\sqrt{2g}(d/h + 1)^{1/2}h^{1/2}} \qquad (A)$$

D'après le problème 10.54 l'équation relative au ressaut est

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{qV_1}{g}\left(\frac{y_2 - y_1}{y_2}\right) \quad \text{ou} \quad gy_2^2 + gy_1y_2 = 2qV_1$$

En résolvant

$$y_2 = \frac{-y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + 8qV_1/g}}{2}$$

La division par y_1 donne une forme sans dimension

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8qV_1/y_1^2 g} = \frac{1}{2}[\sqrt{1 + 8q^2/gy_1^3} - 1] \qquad (B)$$

Puisque $y_2 = (d - D)$, on reporte $y_2/y_1 = (d - D)y_1$ dans (B) ainsi que la valeur de y_1 tirée de (A) et on obtient

$$\frac{d - D}{y_1} = \frac{1}{2}[\sqrt{1 + 8q^2/gy_1^3} - 1]$$

$$\frac{2(d - D)\sqrt{2g}(d/h + 1)^{1/2}h^{1/2}}{q} + 1 = \sqrt{1 + \frac{8(2^{3/2})(g^{3/2})(d/h + 1)^{3/2}h^{3/2}}{qg}}$$

On met cette équation sous une forme sans dimensions en multipliant le membre de gauche par h/h en divisant par $\sqrt{8}$ et en rassemblant les termes :

$$\left(\frac{h^{3/2}g^{1/2}}{q}\right)\left(\frac{d - D}{h}\right)\left(\frac{d}{h} + 1\right)^{1/2} + 0{,}354 = \sqrt{\frac{1}{8} + 2{,}828\left(\frac{g^{1/2}h^{3/2}}{q}\right)\left(\frac{d}{h} + 1\right)^{3/2}} \qquad (C)$$

On peut écrire les termes sans dimensions de (C) sous la forme

$$\pi_1 = \frac{h^{3/2}g^{1/2}}{q}, \quad \pi_2 = \frac{D}{h}, \quad \pi_3 = \frac{d}{h}$$

L'équation (C) devient alors

$$\pi_1(\pi_3 - \pi_2)(\pi_3 + 1)^{1/2} + 0{,}354 = \sqrt{\frac{1}{8} + 2{,}828\pi_1(\pi_3 + 1)^{3/2}} \qquad (D)$$

Le professeur Elevatorski a préparé un graphique de l'équation (D) pour permettre une solution aisée. Pour des valeurs calculées de π_1, et π_2, le graphique donne la valeur de π_3.

Le professeur Elevatorski, dans le commentaire relatif à la perte d'énergie sur la face du déversoir, déclare que : «En ne tenant pas compte des pertes dues au frottement, on obtiendra un léger excès d'eau *morte* dans le bassin de stabilisation. Un ressaut légèrement *noyé* est un meilleur dissipateur d'énergie dans l'ensemble que n'importe quel autre qui soit conçu pour la profondeur y_2.»

10.60 Déterminer la cote du tablier du déversoir si $q = 4{,}645\ \text{m}^2/\text{s}$, $h = 2{,}74$ m, $D = 19{,}2$ m et si la cote de la crête du déversoir est de 60,96 m.

Solution

En employant les rapports sans dimensions établis dans le probème précédent,

$$\pi_1 = g^{1/2}h^{3/2}/q = 3{,}13(2{,}74)^{3/2}/4{,}645 = 3{,}06, \quad \pi_2 = D/h = 19{,}2/2{,}74 = 7{,}00, \quad \pi_3 = d/h = d/2{,}74$$

L'équation (D) du problème 10.59 peut alors s'écrire

$$3{,}06(d/2{,}74 - 7{,}00)(d/2{,}74 + 1)^{1/2} + 0{,}353 = \sqrt{0{,}125 + 2{,}828(3{,}06)(d/2{,}74 + 1)^{3/2}}$$

Résolvant par approximations successives pour $\pi_3 = d/2{,}74$ nous trouvons $\pi_3 = 8{,}65$ ou $d = 23{,}70$ m. La cote du tablier du déversoir est $(60{,}96 - 23{,}70) = 37{,}26$ m par rapport au plan de référence.

Problèmes supplémentaires

10.61 En utilisant y_N comme profondeur dans la figure 10-3, établir une expression de l'écoulement laminaire le long d'une plaque plane de largeur infinie, en considérant que le système en équilibre de la figure 10-3 a pour largeur l'unité.
Rép. $y_N^2 = 3\nu V/gS$.

10.62 Le coefficient de frottement de Darcy f est en général associé aux tuyaux. Cependant, pour le problème précédent, évaluer le coefficient de Darcy f en utilisant la réponse donnée pour ce problème. *Rép.* $96/R_E$.

10.63 Montrer que la vitesse moyenne V peut s'exprimer par l'expression : $0{,}263 v_* R^{1/6}/n$.

10.64 Montrer que le coefficient n de Manning et que le coefficient f de Darcy sont reliés l'un à l'autre par $n = 0{,}113 f^{1/2} R^{1/6}$.

10.65 Calculer la vitesse moyenne du canal rectangulaire du problème 10.7 en sommant l'aire soustendue par la courbe donnant la vitesse en fonction de la profondeur. *Rép.* 2,12 m/s.

10.66 Un canal ouvert doit supporter un débit de 2,1 m³/s à la vitesse de 1,3 m/s. Déterminer les dimensions de la section droite du canal ainsi que la pente sachant que la section droite est (a) rectangulaire (profondeur égale à la moitié de

la largeur), (*b*) semi-circulaire et (*c*) trapézoïdale (profondeur égale à la largeur de fond et pente latérale = 1/1). On utilisera $n = 0{,}020$. *Rép.* 0,90 m; 1,80 m; 0,001 96; 1,014 m (rayon); 0,001 67; 0,90 m; 0,001 85.

10.67 Avec quelle pente doit-on établir le canal représenté dans la figure 10-17 pour qu'il débite 14,80 m^3/s ($C = 55$)? *Rép.* 0,003 73.

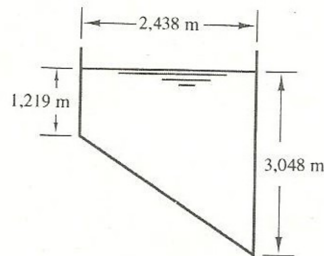


Fig. 10.17

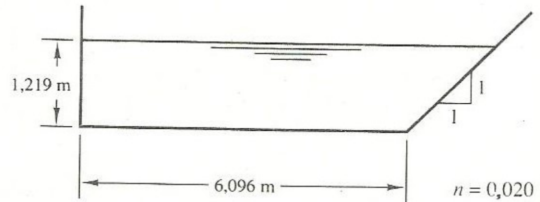


Fig. 10.18

10.68 Le canal représenté dans la figure 10-18 est réalisé avec une pente de 0,000 16. À l'approche du talus d'un chemin de fer, le débit doit s'effectuer par deux tuyaux de béton ($n = 0{,}012$) posés sur une pente de 2,5 m sur 1 000 m. Quelle doit être la taille des tuyaux? *Rép.* 1,27 m.

10.69 Un canal en demi-carré a un débit de 2,22 m^3/s. Le canal a 1 220 m de long et descend de 0,610 m sur cette longueur. En utilisant la formule de Manning et $n = 0{,}012$, calculer ses dimensions. *Rép.* 1,95 m × 0,975 m.

10.70 De l'eau coule sur une profondeur de 1,90 m dans un canal rectangulaire de 2,44 m de large. La vitesse moyenne est de 0,579 m/s. Quelle est la pente probable du canal si $C = 55$? *Rép.* 0,000 148.

10.71 Un canal découpé dans le roc ($n = 0{,}030$) a une section trapézoïdale ayant une largeur de fond de 6,10 m et une pente de cotés de 1. La vitesse moyenne permise est de 0,76 m/s. Quelle pente donnera un débit de 5,66 m^3/s? *Rép.* 0,000 675.

10.72 Quel est le débit d'eau d'un tuyau d'égout vitrifié neuf de 610 mm rempli à moitié et ayant une pente de 0,002 5? *Rép.* 0,160 m^3/s.

10.73 Un canal ($n = 0{,}017$) a une pente de 0,000 40 et a 3 048 m de long. En admettant que le rayon hydraulique est de 1,463 m, quelle correction de la pente doit-on effectuer pour avoir le même débit si le facteur de rugosité passe à 0,020? *Rép.* Nouvelle pente $S = 0{,}000\ 552$.

10.74 Quelle sera la profondeur de l'eau dans un canal en V de 90°, $n = 0{,}013$, réalisé avec une pente de 0,000 40 si le débit doit être de 2,55 m^3/s? *Rép.* 1,57 m.

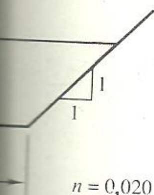
10.75 De l'eau coule dans un caniveau, en acier, en forme de V à 60°, à la vitesse de 1,2 m/s. Si la pente vaut 0,002 0, déterminer la profondeur de l'écoulement. *Rép.* 0,921 m.

10.76 Un quantité donnée de bois doit être utilisée pour constuire une rigole échancrée en *V*. Quel doit être l'angle au sommet pour avoir le débit maximal pour une pente donnée? *Rép.* 90°.

10.77 De l'eau coule sur 0,914 m de profondeur dans un canal de 6,10 m de large, $n = 0{,}013$, $S = 0{,}014\ 4$. Quelle serait la profondeur de l'eau pour un même débit avec une pente de 0,001 44? *Rép.* 2,01 m.

10.78 Un canal débite 1,19 m^3/s avec une pente de 0,50 m pour 1 000 m. La section est rectangulaire et le facteur de rugosité $n = 0{,}012$. Calculer quelles doivent être les meilleures dimensions, c'est-à-dire les dimensions correspondant à un périmètre mouillé minimal. *Rép.* 0,774 m × 1,548 m.

10.79 Un canal ouvert, en ciment, est destiné à transporter 1,5 m^3/s d'eau sur une pente égale à 0,000 85. Déterminer la ou les dimension(s) de la section droite la plus efficace dans le cas (*a*) d'une section demi-circulaire, (*b*) d'une section



rectangulaire, (*c*) d'une section triangulaire et (*d*) d'une section trapézoïdale.
Rép. (*a*) 1,73 m (diamètre); (*b*) 0,789 m; 1,578 m; (*c*) 1,577 m (côté du canal); (*d*) 0,961 m (chaque côté et le fond).

10.80 Un canal avec revêtement, de 4,88 m de large, a un débit de 11,55 m^3/s et une profondeur de 0,863 m. Trouver n si le pente du canal est de 1 m sur 500 m. (Utiliser la formule de Manning.) *Rép.* 0,012 1.

10.81 Trouver la contrainte tangentielle visqueuse moyenne s'exerçant sur le périmètre mouillé du problème 10.80. *Rép.* 12,6 Pa.

10.82 En utilisant la formule de Manning, montrer que la profondeur théorique donnant la vitesse maximale dans un conduit circulaire vaut 0,81 fois le diamètre.

10.83 De l'eau doit couler dans un caniveau rectangulaire à la cadence de 1,42 m^3/s sur une pente égale à 0,002 8. Déterminer les dimensions de la section droite du canal si la largeur vaut deux fois la profondeur. On prendra $n = 0{,}017$. *Rép.* 0,685 m × 1,370 m.

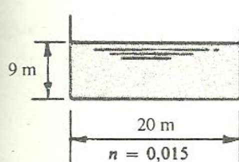
10.84 Refaire le problème 10.83 en supposant que la largeur est égale à la profondeur. Préciser la solution donnant la plus petite section (donc la plus efficace). *Rép.* 0,98 m.

10.85 Un canal rectangulaire ($n = 0{,}011$) de 18 m de large a un débit de 35 m^3/s d'eau. La pente du canal mesure 0,000 78. Déterminer la profondeur du courant. *Rép.* 0,885 m.

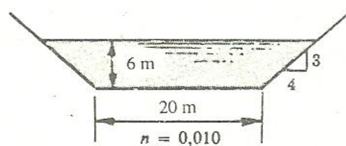
10.86 Concevoir le canal de section trapézoïdale le plus efficace pour supporter un débit de 16,98 m^3/s à une vitesse maximale de 0,914 m/s. Prendre $n = 0{,}025$ et des côtés de pente 1/2. *Rép.* $b = 1{,}286$ m, $y = 2{,}743$ m.

10.87 Calculer la pente du canal du problème précédent. *Rép.* 0,000 345.

10.88 Quelle est la structure du canal qui transporte le plus grand débit, parmi celles qui sont représentées dans la figure 10-19, s'ils sont tous les deux réalisés avec la même pente? *Rép.* (*b*) la section trapézoïdale.



(*a*)



(*b*)

Fig. 10-19

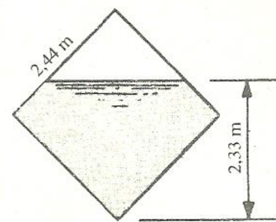


Fig. 10-20

10.89 Un caniveau en forme de boîte carrée de 2,44 m de côté, est disposé ainsi qu'on la représenté dans la figure 10-20. Quel est le rayon hydraulique pour une profondeur de 2,33 m? *Rép.* 0,710 m.

10.90 Quel est le rayon du canal en demi-cercle B représenté dans la figure 10-21, si la pente $S = 0{,}020\,0$ et $C = 49{,}7$? *Rép.* $r = 0{,}549$ m.

10.91 Un tuyau en ciment ($d = 1{,}0$ m) débite à mi-charge, sur une pente valant 0,001 2. Déterminer le débit d'eau. *Rép.* 0,415 m^3/s.

10.92 Un tuyau d'égout ($n = 0{,}014$) est posé sur une pente (0,000 18) et débite 2,76 m^3/s, lorsque l'écoulement se fait à 80 % de la profondeur. Déterminer le diamètre du tuyau nécessaire. On n'utilisera pas la figure 10-1. *Rép.* 2,32 m.

10.93 Refaire le problème 10.92 à l'aide de la figure 10-1. *Rép.* 2,34 m.

10.94 Un tuyau ($d = 1{,}0$ m) doit assurer un débit d'eau de 0,40 m^3/s, à la vitesse de 0,80 m/s. Déterminer la pente et la profondeur de l'écoulement. *Rép.* 0,000 59; 0,63 m.

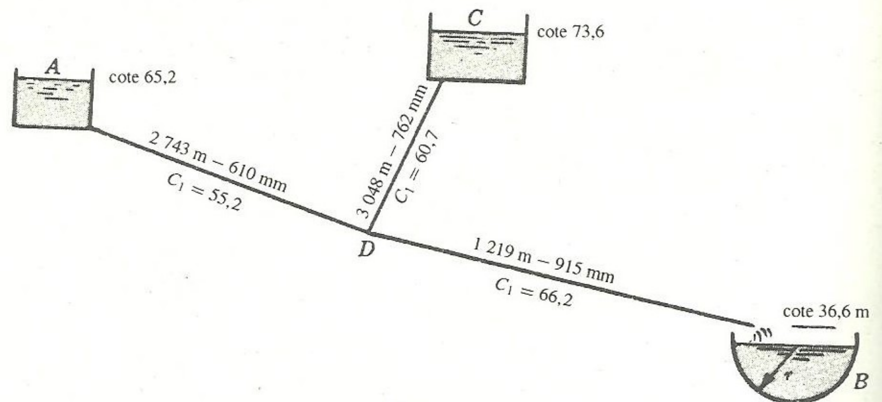


Fig. 10-21

10.95 Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal rectangulaire de 3,05 m de large qui s'écoule sur 0,914 de profondeur avec un débit de 6,23 m^3/s. *Rép.* 1,170 m.

10.96 Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal trapézoïdal de largeur de base 2,44 m et de pente côtés égales à 1, si elle s'écoule sur 1,19 m de profondeur au rythme de 8,78 m^3/s. *Rép.* 1,40 m.

10.97 Un tuyau d'égout de 1,83 m de diamètre transporte 2,28 m^3/s quand l'eau y a une profondeur de 1,22 m. Quelle l'énergie spécifique? *Rép.* 1,30 m.

10.98 Sur quelles profondeurs peut s'écouler l'eau pour un débit de 6,23 m^3/*s* dans le problème 10.95 pour une énerg spécifique de 1,52 m × N/N? Quelle est la profondeur critique? *Rép.* 0,445 m et 1,42 m, 0,753 m.

10.99 Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s. L'écoulement est-il sous-critique sur-critique, pour les profondeurs de 610 mm, 914 mm et 1 219 mm? *Rép.* surcritique, sous-critique, sous-critiq

10.100 Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s quand la vitesse est de 2,44 m/s. Indiqu la nature de l'écoulement. *Rép.* sous-critique.

10.101 Pour les conditions définies dans le problème 10.83, on précisera la nature de l'écoulement : sous-critique, critiq ou surcritique. *Rép.* sous-critique.

10.102 Pour une profondeur critique de 0,981 m dans un canal rectangulaire de 3,048 m de large, calculer le débit. *Rép.* 9,29 m^3/s.

10.103 Déterminer la pente critique d'un canal rectangulaire de 6,096 m de large, (n = 0,012) quand le débit est 28,0 m^3/s.
Rép. 0,002 07.

10.104 Un canal trapézoïdal avec côtés de pente 1 a un débit de 20,4 m^3/s. Pour une largeur de fond de 4,88 m, calculer vitesse critique. *Rép.* 3,04 m/s.

10.105 Un canal rectangulaire de 1 829 m de long, de 18,3 m de large et profond de 3,05 m transporte 51,0 m^3/s d'ea (C = 41,4). Le nettoyage du canal porte C à 55,2 si la profondeur à l'extrémité amont est toujours de 3,05 m trouver la profondeur à l'autre extrémité pour le même débit (utilisant 1 seul tronçon). *Rép.* y_2 = 3,24 m.

10.106 Un canal rectangulaire, n = 0,016, est construit sur une pente de 0,006 4 et transporte 17 m^3/s d'eau. Pour que les conditions soient celles de l'écoulement critique, quelle doit être la largeur? *Rép.* 2,59 m.

10.107 Un canal rectangulaire (n = 0,014) de 3,0 m de largeur transporte de l'eau à la cadence de 13,4 m^3/s. Déterminer la profondeur critique, la vitesse et la pente du canal. *Rép.* 1,27 m; 3,52 m/s; 0,004 0.

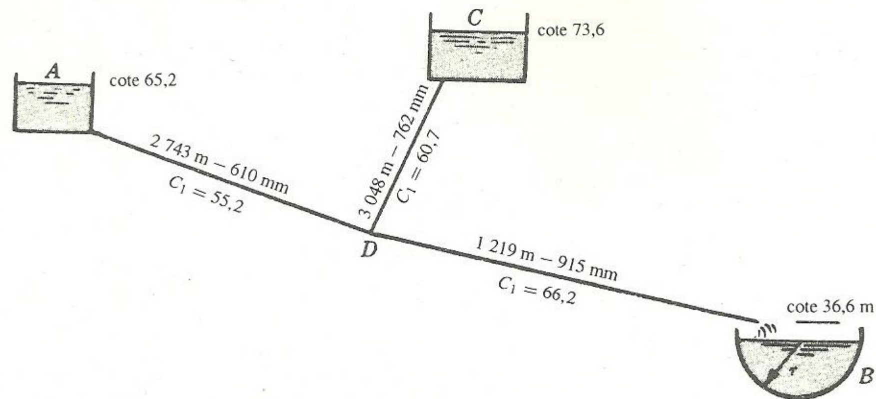


Fig. 10-21

10.95 Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal rectangulaire de 3,05 m de large qui s'écoule sur 0,914 m de profondeur avec un débit de 6,23 m^3/s. *Rép.* 1,170 m.

10.96 Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal trapézoïdal de largeur de base 2,44 m et de pente des côtés égales à 1, si elle s'écoule sur 1,19 m de profondeur au rythme de 8,78 m^3/s. *Rép.* 1,40 m.

10.97 Un tuyau d'égout de 1,83 m de diamètre transporte 2,28 m^3/s quand l'eau y a une profondeur de 1,22 m. Quelle est l'énergie spécifique? *Rép.* 1,30 m.

10.98 Sur quelles profondeurs peut s'écouler l'eau pour un débit de 6,23 m$^3/s$ dans le problème 10.95 pour une énergie spécifique de 1,52 m × N/N? Quelle est la profondeur critique? *Rép.* 0,445 m et 1,42 m, 0,753 m.

10.99 Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s. L'écoulement est-il sous-critique ou sur-critique, pour les profondeurs de 610 mm, 914 mm et 1 219 mm? *Rép.* surcritique, sous-critique, sous-critique.

10.100 Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s quand la vitesse est de 2,44 m/s. Indiquer la nature de l'écoulement. *Rép.* sous-critique.

10.101 Pour les conditions définies dans le problème 10.83, on précisera la nature de l'écoulement : sous-critique, critique ou surcritique. *Rép.* sous-critique.

10.102 Pour une profondeur critique de 0,981 m dans un canal rectangulaire de 3,048 m de large, calculer le débit. *Rép.* 9,29 m^3/s.

10.103 Déterminer la pente critique d'un canal rectangulaire de 6,096 m de large, (n = 0,012) quand le débit est de 28,0 m^3/s.
Rép. 0,002 07.

10.104 Un canal trapézoïdal avec côtés de pente 1 a un débit de 20,4 m^3/s. Pour une largeur de fond de 4,88 m, calculer la vitesse critique. *Rép.* 3,04 m/s.

10.105 Un canal rectangulaire de 1 829 m de long, de 18,3 m de large et profond de 3,05 m transporte 51,0 m^3/s d'eau (C = 41,4). Le nettoyage du canal porte C à 55,2 si la profondeur à l'extrémité amont est toujours de 3,05 m, trouver la profondeur à l'autre extrémité pour le même débit (utilisant 1 seul tronçon). *Rép.* y_2 = 3,24 m.

10.106 Un canal rectangulaire, n = 0,016, est construit sur une pente de 0,006 4 et transporte 17 m^3/s d'eau. Pour que les conditions soient celles de l'écoulement critique, quelle doit être la largeur? *Rép.* 2,59 m.

10.107 Un canal rectangulaire (n = 0,014) de 3,0 m de largeur transporte de l'eau à la cadence de 13,4 m^3/s. Déterminer la profondeur critique, la vitesse et la pente du canal. *Rép.* 1,27 m; 3,52 m/s; 0,004 0.

10.108 Un canal rectangulaire ($n = 0{,}012$) de 3,05 m de large réalisé sur une pente de 0,004 9, débite 13,6 m^3/s. Le canal doit être rétréci pour avoir un écoulement critique. Quelle est la largeur de la partie rétrécie, en négligeant les pertes dues à la réduction progressive de la largeur? *Rép.* 1,37 m.

10.109 Dans un canal rectangulaire de 3,66 m de large, $C = 55{,}2$; $S = 0{,}022\,5$, le débit est de 14,15 m^3/s. La pente du canal passe à 0,002 50. À quel distance du point de changement de pente la profondeur est-elle de 0,838 m, (utiliser un seul tronçon)? *Rép.* 31,7 m.

10.110 Un canal rectangulaire de 10,0 m de largeur est construit sur une pente de 0,002 8. La profondeur de l'écoulement dans une section est de 1,5 m, tandis que dans une autre à 500 m en aval elle est de 1,80 m. Déterminer le débit probable si $n = 0{,}026$. *Rép.* 44,1 m^3/s.

10.111 Utilisant les données du problème 10.109, (*a*) calculer la profondeur critique dans le canal le moins incliné, (*b*) calculer la profondeur nécessaire pour que l'écoulement soit uniforme dans le canal le moins incliné, (*c*) calculer la profondeur atteinte juste avant le ressaut, en utilisant les équations du problème 10.54. (Notons que cette profondeur se situe à 31,70 m du point de changement de pente, d'après la problème 10.109.) *Rép.* 1,15 m, 1,54 m, 0,838 m.

10.112 Montrer que la profondeur critique d'un canal triangulaire est $2\,V_c^2/g$.

10.113 Montrer que la profondeur critique d'un canal triangulaire peut s'exprimer comme étant les 4/5 de l'énergie spécifique minimale.

10.114 Montrer que la profondeur critique d'un canal parabolique est les 3/4 de l'énergie spécifique minimale si les dimensions du canal sont y_c pour la profondeur et b' pour la largeur de la surface d'eau.

10.115 Pour un canal rectangulaire, montrer que le débit q par mètre de large vaut $1{,}704\,E_{\text{min}}^{3/2}$.

10.116 Pour un canal triangulaire, montrer que le débit $Q = 0{,}633\,5(b'/y_c)E_{\text{min}}^{5/2}$.

10.117 Pour un canal parabolique, montrer que le débit $Q = 1{,}106\,8b'E_{\text{min}}^{3/2}$.

10.118 De l'eau coule ($Q = 20{,}0$ m^3/s) dans un canal rectangulaire ayant une largeur de 4,0 m; l'eau descend d'une pente abrupte vers une pente douce créant un ressaut. La profondeur en amont est de 1,20 m. Déterminer (*a*) la profondeur du courant en aval, (*b*) la perte d'énergie (en hauteur de charge) dans le ressaut et (*c*) les vitesses en amont et en aval. *Rép.* (*a*) 1,55 m; (*b*) 0,006 m d'eau; (*c*) 4,17 et 3,23 m/s.

Chapitre 11

Écoulement des fluides compressibles

INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, la plupart des problèmes d'écoulement traitaient de fluides virtuellement incompressibles et principalement de l'eau. Cependant de nombreux problèmes d'écoulement font intervenir des fluides compressibles tels que l'air. En règle générale, les gaz sont compressibles alors que les liquides sont plus ou moins incompressibles. L'analyse d'écoulement (de fluide) compressible est souvent plus compliquée que celle de fluide incompressible car la masse volumique varie avec la pression dans le premier cas.

ÉCOULEMENT ISOTHERMIQUE

Isotherme signifie à température constante. Un écoulement isotherme de fluide compressible se produit dans un conduit lorsque la chaleur transférée en dehors du fluide (à travers les parois) et l'énergie convertie en chaleur par frottement s'équilibrent l'une et l'autre de sorte que la température du fluide demeure constante. Cette condition peut être réalisée dans un conduit non isolé lorsque les températures interne et externe sont les mêmes dans le conduit et que les vitesses du fluide qui s'écoule sont faibles. On peut souvent analyser l'écoulement d'un fluide compressible dans de longs conduits, comme s'il était isotherme. L'écoulement isotherme dans un tuyau s'étudie à l'aide de la formule suivante :

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 rT}{g^2 A^2}\left[f\frac{L}{D} + 2\ \ln\frac{p_1}{p_2}\right] \qquad (1)$$

avec : p_1 = pression au point 1,
p_2 = pression au point 2,
G = débit pondéral,
r = constante du gaz,
T = température absolue,
g = accélération de la pesanteur,
A = aire de la section droite du conduit,
f = coefficient de frottement,
L = longueur du segment allant du point 1 au point 2,
D = diamètre du conduit.

L'équation (*1*) a quelques limitations qu'il faut souligner. Premièrement, on ne doit pas l'utiliser pour de grands écarts de pression. Ensuite, le diamètre du conduit doit rester constant et les variations de pression, dues aux différences de cotes, doivent (pouvoir) être considérées comme négligeables. Enfin, la formule est limitée aux domaines des pressions ordinaires.

ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE

L'écoulement, qui est à la fois adiabatique et sans frottement est dit *écoulement isentropique.* (Adiabatique signifie qu'aucune quantité de chaleur n'est transférée au système à partir de l'extérieur ou vice et versa.)

L'écoulement isentropique se fait sans variation d'entropie; c'est une approximation habituelle si l'écoulement s'effectue très rapidement (il a donc peu de chance d'échanger de la chaleur) et sans frottements notables. L'analyse isentropique s'applique donc aux écoulements gazeux à grande vitesse sur des petites distances pour lesquelles les frottements et les transferts de chaleur sont nécessairement faibles.

L'écoulement isentropique s'analyse à l'aide des équations suivantes :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{w_1}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] \tag{2}$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{w_2}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \tag{3}$$

avec : v_1 = vitesse au point 1,
v_2 = vitesse au point 2,
g = accélération de la pesanteur,
p_1 = pression au point 1,
p_2 = pression au point 2,
k = rapport des chaleurs massiques,
$w_1 = \rho_1 g$ = poids volumique au point 1,
$w_2 = \rho_2 g$ = poids volumique au point 2.

L'AJUTAGE CONVERGENT

Dans ce paragraphe, on traite de l'écoulement isentropique d'un fluide compressible qui se détend à partir d'un grand réservoir dans un ajutage convergent comme le montre la figure 11-1. On y indique la pression, la masse volumique et la température (p_1, ρ_1 et T_1) en un point situé à l'intérieur du réservoir. Le réservoir étant grand, la vitesse y est supposée quasiment nulle. On note également sur la figure 11-1, les paramètres précédents ainsi que la vitesse d'écoulement et l'aire de l'ajutage (p_2, ρ_2, T_2, v_2 et A_2) à la sortie de l'ajutage. Une pression supplémentaire y figure également : la pression extérieure p_2'.

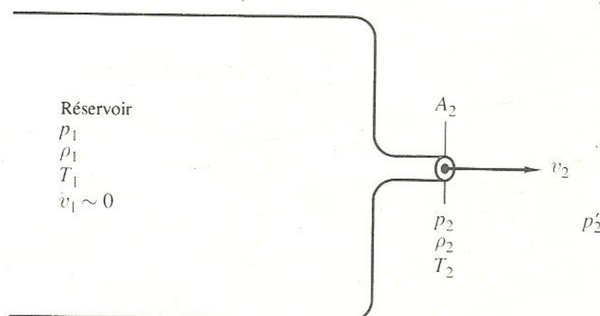


Fig. 11-1 Ajutage convergent

Dans un ajutage convergent, l'écoulement à travers le col est soit sonique soit subsonique. Si l'écoulement est sonique, le nombre de Mach est égal à l'unité et le rapport p_2/p_1 doit être égal au «rapport des pressions critique» défini par

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{4}$$

avec : $(p_2/p_1)_c$ = rapport des pressions critique,
k = rapport des chaleurs massiques.

Si l'écoulement à travers le col est subsonique, le rapport p_2/p_1 sera supérieur à $(p_2/p_1)_c$.

Manifestement, pour avoir un débit appréciable dans l'ajutage, entre le réservoir et l'extérieur, la pression à l'intérieur du réservoir doit être supérieure à celle de l'extérieur ($p_1 > p_2'$). Si la chute de pression est faible $[(p_2'/p_1) > (p_2/p_1)_c]$, l'écoulement à travers l'ajutage sera subsonique et la pression à la sortie de l'ajutage sera la même que la pression extérieure ($p_2 = p_2'$). Dans ce cas, le débit pondéral est déterminé par l'équation (5).

$$G = A_2 \sqrt{\frac{2gk}{k-1}\, p_1 w_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k}\right]} \qquad (5)$$

avec : G = débit pondéral,
A_2 = aire du col,
g = accélération de la pesanteur,
k = rapport de chaleur massique,
p_1 = pression dans le réservoir,
p_2 = pression du jet à la sortie de l'ajutage,
w_1 = poids volumique du fluide dans le résevoir.

Si l'écart entre les pressions augmente (p_1 augmente ou/et p_2' diminue ou les deux), l'écoulement à travers l'ajutage demeure subsonique jusqu'à ce que le rapport p_2'/p_1 soit égal au rapport critique $(p_2/p_1)_c$. À ce moment là, l'écoulement deviendra sonique et la pression, à la sortie de l'ajutage, sera la même qu'à l'extérieur ($p_2 = p_2'$). Dans ce cas, le débit pondéral est déterminé à partir de l'équation suivante :

$$G = \frac{A_2 p_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{g^2 k}{r}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} \qquad (6)$$

T_1 est la température absolue du fluide du réservoir, r la constante du gaz; les autres termes ont été définis plus haut à propos de l'équation (5).

Si l'écart des pressions augmente encore (au-delà de la valeur pour laquelle le rapport p_2'/p_1 est égal à $(p_2/p_1)_c$), le débit à travers l'ajutage reste sonique et la pression à la sortie de l'ajutage est supérieure à la pression à l'extérieur ($p_2 > p_2'$). Toutefois le débit pondéral n'augmente pas. Ainsi, quelle que soit la façon dont p_1 augmente (ou p_2' diminue), si le rapport p_2'/p_1 reste inférieur au rapport des pressions critiques $(p_2/p_1)_c$, le débit pondéral est identique à celui que l'on observe quand p_2'/p_2 est égal au rapport critique. Dans ce cas, le débit pondéral est obtenu à partir de l'équation (6), pourvu que la valeur substituée à p_1 rende le rapport p_2'/p_1 égal au rapport des pressions critique $(p_2/p_1)_c$.

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE À TRAVERS UN RÉTRÉCISSEMENT

La figure 11-2 montre l'écoulement d'un fluide compressible à travers un rétrécissement de conduit. Les paramètres sont définis au point 1 de la section la plus large et au point 2 de la section la plus étroite. La configuration ressemble à celle de l'ajutage convergent (figure 11-1); elle n'en diffère que par le fait que la section droite 1 n'est pas assez conséquente, pour que l'on puisse négliger la vitesse v_1.

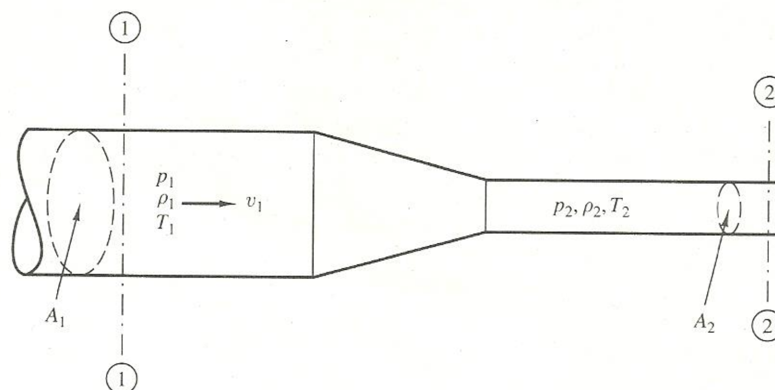


Fig. 11-2 Écoulement compressible à travers un rétrécissement

Le débit pondéral du fluide compressible dans le rétrécissement est donné par l'équation ci-dessous :

$$G = \frac{A_2}{\sqrt{1-(p_2/p_1)^{2/k}(A_2/A_1)^2}}\sqrt{\frac{2gk}{k-1}\,p_1 w_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k}\right]} \qquad (7)$$

où les termes sont semblables à ceux de l'équation (5)(voir aussi la figure 11-2). L'équation ressemble à celle des ajutages convergents (équation (5)); en effet, si A_1 devient bien plus grand que A_2, l'équation (7) tend vers l'équation (5).

Problèmes résolus

11.1 De l'air, à 18 °C, s'écoule de façon isotherme dans un conduit de diamètre 152 mm. La pression en un point d'une section est de 565,4 kPa et de 448,2 kPa en un autre point situé à 167,5 m du précédent. La surface du conduit est lisse. Trouver le débit pondéral d'air.

Solution

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 rT}{g^2 A^2}\left[f\frac{L}{D} + 2\ \ln\frac{p_1}{p_2}\right]$$

À partir de la table 1 de l'annexe, $r = 287{,}1\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$

$$A = \pi(0{,}076)^2 = 0{,}018\,2\ \mathrm{m}^2.$$

Pour déterminer la valeur de f, il faut d'abord connaître le nombre de Reynolds. Mais, pour l'évaluer, la vitesse doit être connue. Celle-ci ne l'étant pas et ne pouvant l'être sans connaître le débit, il faut supposer au départ que $f = 0{,}009\,5$. Alors :

$$[(5{,}654)^2 - (4{,}482)^2]10^{10} = \frac{(G^2)287{,}1\times 291}{(9{,}807)^2(0{,}018\,2)^2}\left[(0{,}009\,5)\left(\frac{167{,}5}{0{,}152}\right) + (2)\ \ln\frac{5{,}654}{4{,}482}\right]$$

$$G = 64{,}5\ \mathrm{N/s}$$

C'est le débit pondéral d'air, à condition que la valeur de f supposée (0,009 5) soit correcte. On peut le vérifier comme suit :

$$R_{\mathrm{E}} = \frac{\rho\, dV}{\mu}$$

$$\rho = p/rT = 565{,}4 \times 10^3/(287{,}1 \times 291) = 6{,}767\ \text{kg/m}^3$$
$$w = \rho g = 6{,}767 \times 9{,}81 = 66{,}36\ \text{N/m}^3$$
$$G = wAV; \quad 64{,}5 = 66{,}36 \times 0{,}018\,2\ V \quad \text{d'où} \quad V = 53{,}3\ \text{m/s}$$
$$R_E = (6{,}767 \times 0{,}152 \times 5{,}33)/1{,}80 \times 10^{-5} = 3{,}04 \times 10^6$$

À partir du diagramme A-1 on trouve $f = 0{,}009\,7$. La valeur supposée de f étant pratiquement la même que la valeur calculée pour 64,5 N/s, le débit pondéral obtenu est correct.

11.2 De l'air, à 18 °C, s'écoule de façon isotherme dans un conduit de 300 mm de diamètre à la cadence de 450 N/s. Le conduit est «lisse». La pression dans une section vaut 550 kPa. Trouver la pression dans la section située à 200 m en aval de la précédente.

Solution

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 rT}{g^2 A^2}\left[f\frac{L}{D} + 2\ \ln\frac{p_1}{p_2}\right]$$

Dans la table 1 de l'annexe, on trouve $r = 287{,}1\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

$$A = \pi(0{,}15)^2 = 0{,}070\,69\ \text{m}^2$$

Pour trouver la valeur de f, il faut évaluer le nombre de Reynolds. Pour cela, on doit calculer la masse volumique et la vitesse comme suit :

$$\rho = p/rT = 550/[0{,}287\,1 \times 291] = 6{,}58\ \text{kg/m}^3$$
$$w = \rho g, \quad \text{ou} \quad w = 6{,}58 \times 9{,}807 = 64{,}53\ \text{N/m}^3$$
$$G = wAV = 64{,}53 \times 0{,}070\,69V = 450; \quad V = 98{,}68\ \text{m/s}$$
$$R_E = \rho DV/\mu = (6{,}58)(0{,}30)(98{,}68)/(1{,}81 \times 10^{-5}) = 1{,}08 \times 10^7$$

À partir du diagramme A-1 (courbe tuyau lisse), on obtient $f = 0{,}008\,0$. En reportant cette valeur dans l'équation (*1*) et en négligeant pour l'instant le second terme entre crochets on a :

$$550^2 - p_2^2 = \frac{(0{,}450)^2(287{,}1)(291)}{(9{,}807)^2(0{,}070\,69)^2}[(0{,}008\,0)(200/0{,}30)] \quad \text{d'où} \quad p_2 = 339\ \text{kPa}.$$

En substituant cette valeur de p_2 dans le terme négligé entre crochets et en résolvant on obtient une nouvelle valeur de p_2 dans la partie gauche de l'équation :

$$550^2 - p_2^2 = \frac{(0{,}450)^2(287{,}1)(291)}{(9{,}807)^2(0{,}070\,69)^2} \times \left[\frac{(0{,}008\,0)(200)}{(0{,}30)} + (2)\left(\ln\frac{550}{339}\right)\right] \quad \text{d'où} \quad p_2 = 284\ \text{kPa}.$$

On recommence une deuxième substitution de la valeur de p_2 dans le terme entre crochets négligé au début, ce qui fournit une valeur de $p_2 = 261$ kPa. Plusieurs itérations successives semblables (non données) conduisent finalement à la valeur de p_2 égale à 233 kPa.

11.3 Un écoulement isentropique d'azote se produit dans un tube ayant un diamètre de 50,8 mm. En un point, la vitesse d'écoulement, la pression et le poids volumique valent respectivement 124,7 m/s, 586 kPa et 102,9 N/m³. Trouver la vitesse en un second point à faible distance du premier où la pression vaut 572 kPa.

Solution

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{w_1}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

Dans la table 1 de l'annexe, on trouve pour l'azote $k = 1,40$.

$$\frac{v_2^2 - 15,55 \times 10^3}{(2)(9,807)} = \frac{586\,000}{102,9}\left(\frac{1,40}{1,40-1}\right)\left[1-\left(\frac{572}{586}\right)^{(1,40-1)/1,40}\right]$$

$$v_2 = 135 \text{ m/s}.$$

11.4 En un point d'une ligne de courant d'un écoulement isentropique, la vitesse, la pression et le poids volumique valent respectivement 30,5 m/s, 350 kPa (absolue) et 28 N/m³. Trouver la pression en un second point de la ligne de courant où la vitesse vaut 150 m/s.

Solution

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{w_1}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right]^{(k-1)/k}\right]$$

La table 1 fournit pour k la valeur 1,40 :

$$\frac{150^2 - 30,5^2}{(2)(9,807)} = \left(\frac{350}{0,028}\right)\left(\frac{1,40}{1,40-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{350}\right)^{(1,40-1)/1,40}\right]$$

$$p_2 = 320 \text{ kPa}.$$

11.5 De l'air, à 28 °C, s'écoule d'un grand réservoir à travers l'ajutage convergent de 10 mm de diamètre. La détente se produit dans l'atmosphère où règne une pression de 96,5 kPa. La pression de l'air dans le réservoir est de 40,0 kPa (manométrique). Que vaut le débit pondéral dans l'ajutage?

Solution

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{1,40+1}\right)^{1,40/(1,40-1)} = 0,528\,3 \quad \text{et} \quad \frac{p_2'}{p_1} = \frac{96,5}{40+96,5} = 0,707\,0$$

La valeur du rapport $p_2'/p_1\,(0,707\,0)$ étant supérieure au rapport des pressions critique (0,528 3), l'écoulement à travers l'ajutage est subsonique et l'équation (5) s'applique :

$$G = A_2\sqrt{\frac{2gk}{k-1}p_1 w_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k}\right]}$$

$$A_2 = (\pi)(0,010)^2/4 = 0,000\,078\,54 \text{ m}^2$$

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{136,5 \times 10^3}{(287,1 \times 301)} = 1,580 \text{ kg/m}^3, \quad w = \rho g = 15,48 \text{ N/m}^3$$

$$G = (0,000\,078\,54) \times \sqrt{\left(\frac{(2)(9,807)(1,40)}{1,40-1}\right)(136,5)(0,015\,48)}\sqrt{\left(\frac{96,5}{136,5}\right)^{2/1,40} - \left(\frac{96,5}{136,5}\right)^{(1,40+1)/1,40}}$$

D'où

$$G = 0,000\,227 \text{ kN/s} = 0,227 \text{ N/s}.$$

11.6 De l'air, à 24 °C, s'écoule d'un grand réservoir dans un ajutage constant de diamètre égal à 38,1 mm. La détente se produit dans l'atmosphère où règne une pression de 96,5 kPa. La pression dans le réservoir vaut 172 kPa. Trouver le débit pondéral d'air dans l'ajutage.

Solution

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{1{,}40+1}\right)^{1{,}40/(1{,}40-1)} = 0{,}528\,3$$

d'où

$$p_2'/p_1 = 14{,}0/(14{,}0+25{,}0) = 0{,}359\,0.$$

La valeur du rapport p_2'/p_1 (0,359 0) étant inférieure à la valeur du rapport des pressions critique (0,528 3), l'écoulement est sonique et l'équation (*6*) est applicable.

$$G = \frac{A_2 p_1}{\sqrt{T_1}}\sqrt{\frac{g^2 k}{r}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}$$

$$A_2 = (\pi)(0{,}038\,1)^2/4 = 1{,}14 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$p_1 = p_2'/(p_2/p_1)_c = 96{,}5/0{,}528\,3 = 182{,}7\ \text{kPa}$$

$$G = \frac{1{,}14 \times 10^{-3} \times 182{,}7 \times 10^3}{\sqrt{535}}\sqrt{(9{,}807)^2\left(\frac{1{,}40}{287{,}1}\right)\left(\frac{2}{1{,}40+1}\right)^{(1{,}40+1)/(1{,}40-1)}} = 4{,}80\ \text{N/s}$$

11.7 De l'air s'écoule dans un tuyau dont le diamètre passe de 76,2 à 50,8 mm. La pression et la température de l'air valent respectivement 744,6 kPa et 40,5 °C; la pression dans le rétrécissement est de 558,5 kPa. La pression atmosphérique est égale à 100 kPa. Quel est le débit pondéral du tuyau?

Solution

$$G = \frac{A_2}{\sqrt{1-(p_2/p_1)^{2/k}(A_2/A_1)^2}}\sqrt{\frac{2gk}{k-1}\,p_1 w_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k}\right]}$$

$$A_2 = (\pi)(0{,}050\,8)^2/4 = 2{,}027 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$A_1 = (\pi)(0{,}076\,2)^2/4 = 4{,}561 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$\rho = p/rT = (100+744{,}6)\times 10^3/(287{,}1 \times 313{,}5) = 9{,}383\ \text{kg/m}^3;\ \ w = \rho g = 92{,}0\ \text{N/m}^3$$

$$G = \frac{2{,}027 \times 10^{-3}}{\sqrt{1-(658{,}5/844{,}6)^{2/1{,}4}(4{,}561/2{,}027)^2}}\sqrt{\left[\frac{(2)(9{,}807)(1{,}40)}{(1{,}40-1)}\right]844\,600 \times 92{,}0 \times 0{,}585\,8}$$

$$\times\sqrt{\left[\left(\frac{658{,}5}{844{,}6}\right)^{2/1{,}40} - \left(\frac{658{,}5}{844{,}6}\right)^{(1{,}40+1)/1{,}40}\right]} = 35{,}0\ \text{N/s}$$

Problèmes supplémentaires

11.8 De l'air, à 37,8 °C, s'écoule isothermiquement dans un conduit de 101,6 mm de diamètre. Les pressions dans les sections 1 et 2 valent respectivement 827 et 552 kPa. La section 2 est à 122 m en aval de la section 1. Déterminer le débit pondéral d'air. On suppose que la surface du tuyau est «lisse». *Rép.* 47,0 N/s.

11.9 De l'air, à 29,5 °C, s'écoule isothermiquement dans un conduit (d = 152 mm) à la cadence de 44,5 N/s. La surface du tuyau est très lisse. La pression absolue dans une section vaut 482,6 kPa. Déterminer la pression dans la section située à 183 m en aval de la première. *Rép.* 406 kPa.

11.10 De l'oxygène s'écoule isentropiquement dans un conduit de 100 mm de diamètre. En un point, la vitesse, la pression et le débit pondéral valent respectivement 125 m/s, 450 kPa et 58 N/m^3. En un autre point, peu éloigné du précédent, la pression vaut 360 kPa. Déterminer la vitesse en ce dernier point. *Rép.* 220 m/s.

11.11 En un point d'une ligne de courant d'un écoulement isentropique d'air, la vitesse, la pression et le débit pondéral valent respectivement 80 m/s, 405 kPa et 46 N/m^3. La vitesse d'écoulement en un second point est de 165 m/s. Déterminer la pression en ce second point. *Rép.* 358 kPa.

11.12 De l'air, à 30 °C, s'écoule d'un grand réservoir à travers un ajutage convergent ayant un diamètre de 20 mm. La détente se fait dans l'atmosphère où règne une pression de 954,0 kPa (absolue). La pression dans le réservoir vaut 50 kPa (manométrique). Déterminer le débit pondéral d'air dans l'ajutage. *Rép.* 1,00 N/s.

11.13 De l'air, à 15,5 °C, s'écoule d'un grand réservoir à travers un ajutage convergent de diamètre égal à 25,4 mm. La détente a lieu dans l'atmopshère où règne une pression de 100 kPa. La pression de l'air à l'intérieur du réservoir est de 207 kPa. Déterminer le débit pondéral d'air dans l'ajutage. *Rép.* 2,24 N/s.

11.14 De l'air s'écoule dans un conduit dont le diamètre varie de 50,8 mm à 25,4 mm. La pression et la température de l'air dans le conduit valent respectivement 689,5 kPa et 40 °C. Le baromètre indique 101,3 kPa. Calculer le débit pondéral d'air dans le conduit, sachant que la pression dans le rétrécissement est égale à 537,8 kPa. *Rép.* 7,43 N/s.

Chapitre 12

Mesure du débit des fluides

INTRODUCTION

Plusieurs dispositifs sont fréquemment employés par l'ingénieur dans l'exercice de sa profession, pour mesurer le débit des fluides. On effectue les mesures de vitesse à l'aide de tubes de Pitot, d'appareils à mesurer le courant, et d'anémomètres tournant ou à fil chaud. Dans les études de modèles, on utilise souvent des méthodes photographiques. Les mesures des grandeurs sont faites à l'aide d'orifices à bords minces, buses, tubes de Venturi, rigoles, appareils à coudes, déversoirs à bords minces, de plusieurs versions modifiées des appareils précédents, et de divers appareils de mesure brevetés. Afin d'employer au mieux les dispositifs hydrauliques, il est impératif d'utiliser l'équation de Bernoulli et les connaissances supplémentaires relatives aux caractéristiques et aux coefficients de chacun des dispositifs. En l'absence de valeurs sûres pour les coefficients, il faut étalonner le dispositif en vue des conditions d'emploi prévues.

Les formules établies pour les fluides incompressibles peuvent être employées pour les fluides compressibles où la variation de la pression est faible par rapport à la pression totale. De telles variations faibles se présentent dans plusieurs cas pratiques. Cependant, lorsqu'on doit prendre en considération la compressibilité, il est nécessaire d'employer des formules appropriées.

LE TUBE DE PITOT

Le tube de Pitot mesure la vitesse en un point par l'intermédiaire de la pression d'arrêt, laquelle dépasse la pression statique locale de $w(V^2/2g)$. Dans un courant de fluide avec surface libre, étant donné que la pression locale est zéro (manomètre), la hauteur à laquelle le liquide s'élève dans le tube représente la hauteur cinétique. Les problèmes 12.1 et 12.5 établissent des expressions du débit des fluides compressibles et incompressibles.

COEFFICIENT DE VITESSE

Le coefficient de vitesse (c_v) est le rapport de la vitesse moyenne réelle à la section droite de la veine liquide (jet) à la vitesse moyenne théorique qu'il y aurait s'il n'y avait pas de frottement. Ainsi,

$$c_v = \frac{\text{vitesse moyenne réelle}}{\text{vitesse moyenne idéale}} \tag{1}$$

COEFFICIENT DE CONTRACTION

Le coefficient de contraction (c_c) est le rapport de la surface de la section contractée d'une veine liquide (jet) à la surface de l'ouverture à travers laquelle le fluide s'écoule. Ainsi,

$$c_c = \frac{\text{aire de la veine (du jet)}}{\text{aire de l'ouverture (du jet)}} = \frac{A_{\text{jet}}}{A_0} \tag{2}$$

COEFFICIENT DE DÉBIT

Le coefficient de débit (c) mesure le rapport du débit réel à travers le dispositif au débit théorique. Ce coefficient peut s'exprimer par :

$$c = \frac{\text{débit réel } Q}{\text{débit idéal } Q} \qquad (3)$$

D'une manière plus pratique, lorsqu'on détermine le coefficient de débit c, expérimentalement :

$$Q = cA\sqrt{2gH} \qquad (4)$$

où A = charge de la section droite du dispositif,
H = charge totale produisant le débit en m de fluide.

Le coefficient de débit peut aussi s'écrire en fonction du coefficient de vitesse et du coefficient de contraction, c'est-à-dire :

$$c = c_v \times c_c \qquad (5)$$

Le coefficient de débit n'est pas constant. Pour un dispositif donné, il varie avec le nombre de Reynolds. On trouvera dans l'annexe, les renseignements suivants :

(1) La table 7 contient les coefficients de débit des orifices circulaires débitant de l'eau à environ 15,6 °C dans l'atmosphère. On dispose de peu de données faisant autorité en ce qui concerne tous les fluides dans des grands intervalles de valeurs du nombre de Reynolds.

(2) Le diagramme C indique le variation de c' en fonction du nombre de Reynolds pour trois valeurs du rapport du diamètre de l'orifice au diamètre du tuyau. On ne dispose d'aucune donnée faisant autorité en ce qui concerne les nombres de Reynolds inférieurs à environ 10 000.

(3) Le diagramme D représente les variations de c en fonction du nombre de Reynolds pour trois buses à débits de long rayon (buses de pipes-lines).

(4) Le diagramme E indique la variation de c en fonction du nombre de Reynolds pour cinq tailles de tubes de Venturi de rapports de diamètre 0,500.

PERTE DE CHARGE

La perte de charge dans les orifices, les tubes, les buses à débit et les tubes de Venturi, s'exprime par :

$$\text{Perte de charge en mètres de fluide} = \left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right)\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} \qquad (6)$$

Lorsqu'on applique cette expression à un tube de Venturi V_{jet} = vitesse au col et $c_v = c$.

DÉVERSOIRS À BORDS MINCES

Les déversoirs à bords minces mesurent l'écoulement des liquides dans les canaux ouverts; il s'agit en général d'eau. On dispose d'un certain nombre de formules dans la littérature technique, chacune avec ses limites. On n'en donnera que quelques-unes ci-dessous. La plupart des déversoirs sont rectangulaires : le déversoir *sans contraction*, sans rétrécissement aux extrémités, utilisé en général pour les plus gros débits, et le déversoir *contracté*, pour de plus petits débits. Il existe d'autres déversoirs qui sont triangulaires, trapézoïdaux, paraboliques, et à débit proportionnel. Pour obtenir des résultats précis, un déversoir devrait être étalonné sur place dans les conditions d'utilisation.

LA FORMULE THÉORIQUE DU DÉVERSOIR

La formule théorique du déversoir, pour des déversoirs rectangulaires, établie dans le problème 12.29 est

$$Q = \frac{2}{3} cb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \qquad (7)$$

où Q = débit en m³/s,
c = un coefficient (à déterminer expérimentalement),
b = la longueur de la crête du déservoir en m,
H = charge au déversoir en m (hauteur de la surface du liquide au-dessus de la crête),
V = vitesse moyenne d'approche en m/s.

FORMULE DE FRANCIS

La formule de Francis, fondée sur des expériences faites sur des déversoirs rectangulaires de 1,1 m à 5,2 m de long et des hauteurs de charge de 0,2 m à 0,5 m est

$$Q = 1{,}84\left(b - \frac{nH}{10}\right)\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \qquad (8)$$

où les notations sont les mêmes que ci-dessus et

- $n = 0$ pour un déversoir sans contraction,
- $n = 1$ pour un déversoir avec une contraction,
- $n = 2$ pour un déversoir avec deux contractions.

FORMULE DE BAZIN

La formule de Bazin (longueurs de 0,5 m à 2 m sous des hauteurs de charge de 0,05 m à 0,60 m) est

$$Q = \left(1{,}794 + \frac{0{,}013\,3}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+Z}\right)^2\right] bH^{3/2} \qquad (9)$$

où Z = hauteur de la crête du déversoir au-dessus du fond du canal.
Le terme entre crochets devient négligeable pour de faibles vitesses d'approche.

FORMULE DE FTELEY ET STEARNS

La formule de Fteley et Stearns (longueurs de 1,52 m à 5,79 m pour des hauteurs de pression de 0,021 m à 0,497 m) pour des déversoirs sans contraction est

$$Q = 1{,}83\,b\left(H + \alpha\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} + 0{,}000\,65b \qquad (10)$$

où α = un coefficient dépendant de la hauteur de la crête Z (il est nécessaire de disposer d'une table de valeurs).

LA FORMULE DU DÉVERSOIR TRIANGULAIRE (établie dans le problème 12.30) est :

$$Q = \frac{8}{15} c \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2} \qquad (11)$$

ou pour un déversoir donné

$$Q = mH^{5/2} \qquad (12)$$

LA FORMULE DU DÉVERSOIR TRAPÉZOÏDAL (de Cipolletti) est :

$$Q = 1{,}861 bH^{3/2} \qquad (13)$$

La pente des côtés (des extrémités) du déversoir a pour valeur 4.

EN CE QUI CONCERNE LES BARRAGES UTILISÉS COMME DÉVERSOIRS, l'expression du débit approximatif est :

$$Q = mbH^{3/2} \qquad (14)$$

où m = un facteur expérimental, généralement déterminé par les études de modèles. L'écoulement non uniforme s'effectuant par-dessus les déversoirs à crête large est étudié dans le problème 12.37.

LE TEMPS NÉCESSAIRE POUR VIDER UN RÉSERVOIR par un orifice à bord mince est (voir problème 12.40).

$$t = \frac{2A_T}{cA_0\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \quad \text{(section constante, pas de débit entrant)} \qquad (15)$$

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T\,dh}{Q_{\text{sortie}} - Q_{\text{entrée}}} \quad \text{(débit entrant < débit sortant, section constante)} \qquad (16)$$

En ce qui concerne les réservoirs dont la section n'est pas constante, voir le problème 12.43.

LE TEMPS MIS POUR VIDER DES RÉSERVOIRS au moyen de vannes se calcule en utilisant (voir le problème 12.45)

$$t = \frac{2A_T}{mL}(H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2}) \qquad (17)$$

LE TEMPS MIS POUR ÉTABLIR LE RÉGIME dans une conduite est (voir problème 12.47) :

$$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln\left(\frac{V_f + V}{V_f - V}\right) \qquad (18)$$

LA FORMULE THÉORIQUE DU DÉVERSOIR

La formule théorique du déversoir, pour des déversoirs rectangulaires, établie dans le problème 12.29 est

$$Q = \frac{2}{3} cb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{7}$$

où Q = débit en m³/s,
c = un coefficient (à déterminer expérimentalement),
b = la longueur de la crête du déservoir en m,
H = charge au déversoir en m (hauteur de la surface du liquide au-dessus de la crête),
V = vitesse moyenne d'approche en m/s.

FORMULE DE FRANCIS

La formule de Francis, fondée sur des expériences faites sur des déversoirs rectangulaires de 1,1 m à 5,2 m de long et des hauteurs de charge de 0,2 m à 0,5 m est

$$Q = 1{,}84\left(b - \frac{nH}{10}\right)\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{8}$$

où les notations sont les mêmes que ci-dessus et

- $n = 0$ pour un déversoir sans contraction,
- $n = 1$ pour un déversoir avec une contraction,
- $n = 2$ pour un déversoir avec deux contractions.

FORMULE DE BAZIN

La formule de Bazin (longueurs de 0,5 m à 2 m sous des hauteurs de charge de 0,05 m à 0,60 m) est

$$Q = \left(1{,}794 + \frac{0{,}013\,3}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+Z}\right)^2\right] bH^{3/2} \tag{9}$$

où Z = hauteur de la crête du déversoir au-dessus du fond du canal.
Le terme entre crochets devient négligeable pour de faibles vitesses d'approche.

FORMULE DE FTELEY ET STEARNS

La formule de Fteley et Stearns (longueurs de 1,52 m à 5,79 m pour des hauteurs de pression de 0,021 m à 0,497 m) pour des déversoirs sans contraction est

$$Q = 1{,}83\, b\left(H + \alpha\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} + 0{,}000\,65b \tag{10}$$

où α = un coefficient dépendant de la hauteur de la crête Z (il est nécessaire de disposer d'une table de valeurs).

LA FORMULE THÉORIQUE DU DÉVERSOIR

La formule théorique du déversoir, pour des déversoirs rectangulaires, établie dans le problème 12.29 est

$$Q = \frac{2}{3} cb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{7}$$

où Q = débit en m^3/s,
c = un coefficient (à déterminer expérimentalement),
b = la longueur de la crête du déservoir en m,
H = charge au déversoir en m (hauteur de la surface du liquide au-dessus de la crête),
V = vitesse moyenne d'approche en m/s.

FORMULE DE FRANCIS

La formule de Francis, fondée sur des expériences faites sur des déversoirs rectangulaires de 1,1 m à 5,2 m de long et des hauteurs de charge de 0,2 m à 0,5 m est

$$Q = 1{,}84\left(b - \frac{nH}{10}\right)\left[\left(H + \frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{8}$$

où les notations sont les mêmes que ci-dessus et

- $n = 0$ pour un déversoir sans contraction,
- $n = 1$ pour un déversoir avec une contraction,
- $n = 2$ pour un déversoir avec deux contractions.

FORMULE DE BAZIN

La formule de Bazin (longueurs de 0,5 m à 2 m sous des hauteurs de charge de 0,05 m à 0,60 m) est

$$Q = \left(1{,}794 + \frac{0{,}013\,3}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+Z}\right)^2\right] bH^{3/2} \tag{9}$$

où Z = hauteur de la crête du déversoir au-dessus du fond du canal.
Le terme entre crochets devient négligeable pour de faibles vitesses d'approche.

FORMULE DE FTELEY ET STEARNS

La formule de Fteley et Stearns (longueurs de 1,52 m à 5,79 m pour des hauteurs de pression de 0,021 m à 0,497 m) pour des déversoirs sans contraction est

$$Q = 1{,}83\,b\left(H + \alpha\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} + 0{,}000\,65b \tag{10}$$

où α = un coefficient dépendant de la hauteur de la crête Z (il est nécessaire de disposer d'une table de valeurs).

LA FORMULE DU DÉVERSOIR TRIANGULAIRE (établie dans le problème 12.30) est :

$$Q = \frac{8}{15} c \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2} \tag{11}$$

ou pour un déversoir donné

$$Q = mH^{5/2} \tag{12}$$

LA FORMULE DU DÉVERSOIR TRAPÉZOÏDAL (de Cipolletti) est :

$$Q = 1{,}861 bH^{3/2} \tag{13}$$

La pente des côtés (des extrémités) du déversoir a pour valeur 4.

EN CE QUI CONCERNE LES BARRAGES UTILISÉS COMME DÉVERSOIRS, l'expression du débit approximatif est :

$$Q = mbH^{3/2} \tag{14}$$

où $m =$ un facteur expérimental, généralement déterminé par les études de modèles. L'écoulement non uniforme s'effectuant par-dessus les déversoirs à crête large est étudié dans le problème 12.37.

LE TEMPS NÉCESSAIRE POUR VIDER UN RÉSERVOIR par un orifice à bord mince est (voir problème 12.40).

$$t = \frac{2A_T}{cA_0\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \quad \text{(section constante, pas de débit entrant)} \tag{15}$$

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T dh}{Q_{\text{sortie}} - Q_{\text{entrée}}} \quad \text{(débit entrant < débit sortant, section constante)} \tag{16}$$

En ce qui concerne les réservoirs dont la section n'est pas constante, voir le problème 12.43.

LE TEMPS MIS POUR VIDER DES RÉSERVOIRS au moyen de vannes se calcule en utilisant (voir le problème 12.45)

$$t = \frac{2A_T}{mL}(H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2}) \tag{17}$$

LE TEMPS MIS POUR ÉTABLIR LE RÉGIME dans une conduite est (voir problème 12.47) :

$$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln\left(\frac{V_f + V}{V_f - V}\right) \tag{18}$$

Problèmes résolus

12.1 On utilise un tube de Pitot ayant un coefficient de 0,98 pour mesurer la vitesse de l'eau au centre d'un tuyau. La hauteur de pression d'arrêt est de 5,67 m et la pression statique en paroi dans le tuyau est de 4,73 m. Quelle est la vitesse?

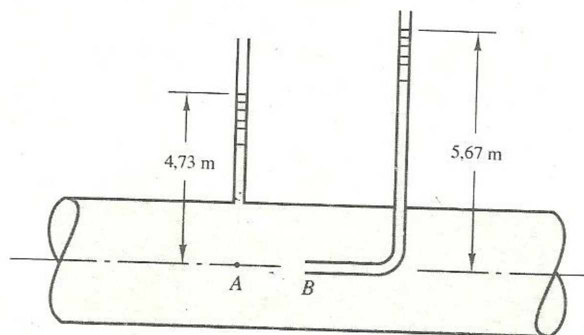


Fig. 12-1

Solution

Si le tube a la forme et la position qu'il faut, un point de vitesse nulle (point d'arrêt) apparaît en B devant l'extrémité ouverte du tube (voir la figure 12-1). En appliquant le théorème de Bernoulli entre A situé dans le liquide au repos et B, on obtient

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right) - \text{sans pertes de charges (supposé)} = \left(\frac{p_B}{w} + 0 + 0\right) \qquad (1)$$

Alors, pour un fluide (sans frottement),

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w} \quad \text{ou} \quad V_A = \sqrt{2g\left(\frac{p_B}{w} - \frac{p_A}{w}\right)} \qquad (2)$$

Pour le tube réel, on doit introduire un coefficient c, qui dépend de la forme. La vitesse réelle pour le problème ci-dessus serait de

$$V_A = c\sqrt{2(p_B/\rho - p_A/\rho)} = 0{,}98\sqrt{2g(5{,}67 - 4{,}73)} = 4{,}21 \text{ m/s}$$

L'équation ci-dessus s'applique à tous les fluides incompressibles. La valeur de c peut être prise égale à un pour la plupart des problèmes techniques. Résolvant (*1*) ci-dessus par rapport à la pression d'arrêt en B, on obtient

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 \quad \text{où} \quad \rho = w/g. \qquad (3)$$

12.2 De l'air circule dans un conduit, et le tube de Pitot est relié à un manomètre différentiel contenant de l'eau. Si la dénivellation dans le manomètre est de 100 mm, calculer la vitesse de l'air, en admettant que le poids spécifique de l'air est constant et vaut 1,22 kg/m³ et que le coefficient du tube est 0,98.

Solution

Pour le manomètre différentiel,

$$(p_B - p_A)/\rho g = (0{,}1)(9810)/1{,}22(9{,}81) = 81{,}96 \text{ m air.}$$

Alors, $V = 0{,}98\sqrt{2 \times 9{,}81(81{,}96)} = 39{,}3$ m/s.
(Voir les problèmes 12.26-12.28 pour les considérations relatives à la vitesse du son.)

12.3 Du tétrachlorure de carbone (densité 1,60) circule dans un tuyau. Le manomètre différentiel fixé au cube de Pitot présente une dénivellation de 76 mm de mercure. En admettant que $c = 1{,}00$, trouver la vitesse.

Solution

$$p_B - p_A = (76/1\,000)(13{,}6 - 1{,}60)9\,810 = 8\,947 \text{ Pa}, \quad \text{et} \quad V = \sqrt{2 \times 8\,947/1\,600} = 3{,}34 \text{ m/s}.$$

12.4 De l'eau circule à la vitesse de 1,42 m/s. Un manomètre différentiel contenant un liquide de densité 1,25 est fixé au système formé par un tube de Pitot et une prise en paroi. Quelle est la dénivellation du fluide dans le manomètre ?

Solution

$$V = c\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)} \quad \text{ou} \quad 1{,}42 = 1{,}00\sqrt{2 \times 9{,}81(\Delta p/\rho g)} \quad \text{et} \quad \Delta p/\rho g = 0{,}103 \text{ m d'eau}$$

En appliquant les principes du manomètre différentiel, on a $0{,}103 = (1{,}25 - 1)h$ et $h = 0{,}412$ m de différence de niveau.

12.5 Établir l'expression permettant de mesurer le débit d'un gaz à l'aide d'un tube de Pitot.

Solution

Le débit de A en B dans la figure du problème 12.1 peut être considéré comme étant adiabatique et s'effectuant avec des pertes négligeables. Utilisant l'équation de Bernoulli D du problème 7.21 du chapitre 7, de A à B, nous obtenons :

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_A}{w_A} + \frac{V_A^2}{2g} + 0\right] - \text{pertes négligeables} = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_A}{w_A}\right)\left[\frac{p_B}{p_A}\right]^{(k-1)/k} + 0 + 0\right]$$

ou
$$\frac{V_A^2}{2g} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_A}{w_A}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \tag{1}$$

Le terme p_B est la pression d'arrêt. On réarrange en général cette expression (*1*), en introduisant le rapport de la vitesse en A à la vitesse du son c du fluide au repos.

D'après le chapitre 1, la vitesse du son $c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kpg/w}$. Associant cela avec l'équation (*1*) ci-dessus,

$$\frac{V_A^2}{2} = \left(\frac{c^2}{k-1}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \quad \text{ou} \quad \frac{p_B}{p_A} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2\right]^{k/(k-1)} \tag{2}$$

En développant au moyen de la formule du binôme, on obtient :

$$\frac{p_B}{p_A} = 1 + \frac{k}{2}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \frac{k-2}{24}\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \dots\right] \tag{3}$$

Pour comparer cette expression avec la formule (*3*) du problème 12.1, multiplier par p_A et remplacer kp_A/c^2 par ρ_A on obtient

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho_A V_A^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \frac{k-2}{24}\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \dots\right] \tag{4}$$

L'expression ci-dessus s'applique à tous les fluides compressibles pour des rapports V/c inférieurs à l'unité. Pour des rapports supérieurs à l'unité, des ondes de choc et d'autres phénomènes apparaissent, l'hypothèse n'est plus assez précise et le raisonnement ne s'applique plus. Le rapport V/c s'appelle le *nombre de Mach*.

Le terme entre crochets dans (*4*) est plus grand que l'unité et les deux premiers termes donnent une précision suffisante. La compressibilité a pour effet d'augmenter la pression du point d'arrêt au-delà de celle d'un fluide incompressible (voir l'expression (*3*) du problème 12.1).

On étudiera les vitesses du son dans les problèmes 12.26 à 12.28.

12.6 Le débit d'air circulant dans des conditions atmosphériques ($\rho = 1{,}223$ kg/m^3 à 15 °C) à la vitesse de 90 m/s est mesuré à l'aide d'un tube de Pitot. Calculer l'erreur commise dans la pression d'arrêt en supposant que l'air est incompressible.

Solution

En utilisant la formule (*3*) du problème 12.1 ci-dessus, on obtient :

$$p_B = p_A = \frac{1}{2}\rho V^2 = 101\,300 + \frac{1}{2}(1{,}223)(90)^2 = 106\,300 \text{ Pa} = 106{,}3 \text{ kPa}$$

En utilisant la formule (*4*) du problème 12.5 ci-dessus et en posant $c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287)(288)} = 340$ m/s, on obtient :

$$p_B = 101\,300 + \frac{1}{2}(1{,}223)(90)^2\left[1 + \frac{1}{4}(90/340)^2\ldots\right]$$
$$= 101\,300 + 4\,953[1 + 0{,}017\,5] = 106\,300 \text{ Pa} = 106{,}3 \text{ KPa}$$

L'erreur dans la pression d'arrêt est inférieure à 0,1 % et l'erreur sur $(p_B - p_A)$ est d'environ 2 %.

12.7 La différence entre la pression d'arrêt et la pression statique mesurée par un tube de Pitot double est de 19,72 kPa. La pression statique est de 1 bar (abs.) et la température du courant d'air est de 15 °C. Quelle est la vitesse de l'air (*a*) en admettant que l'air est compressible et (*b*) en supposant que l'air est incompressible ?

Solution

(*a*) $c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287)(288)} = 340$ m/s.

D'après l'équation (2) du problème 12.5 $\dfrac{p_B}{p_A} = \left[1 + \left(\dfrac{k-1}{2}\right)\left(\dfrac{V_A}{c}\right)^2\right]^{k/(k-1)}$

$$\frac{10^3(100 + 19{,}72)}{10^3 \times 100} = \left[1 + \left(\frac{1{,}4-1}{2}\right)\left(\frac{V_A}{340}\right)^2\right]^{1{,}4/0{,}4} \quad \text{et} \quad V_A = 175 \text{ m/s.}$$

(*b*) $\rho = \dfrac{10^5}{287(288)} = 1{,}21$ kg/m^3 et $V = \sqrt{2(p_B/\rho - p_A/\rho)} = \sqrt{2 \times 19{,}72 \times 10^3/1{,}21} = 181$ m/s.

12.8 De l'air circule à 245 m/s par un conduit. À la pression atmosphérique normale, la pression d'arrêt de $-1{,}74$ m d'eau, au manomètre. La température d'arrêt est de 63 °C. Quelle est la pression statique dans le conduit ?

Solution

Avec deux inconnues dans l'équation (2) du problème 12.5, prenons un rapport V/c (nombre de Mach) de 0,72. Alors

$$(-1{,}74 + 10{,}33)9\,810 = p_A[1 + \frac{1}{2}(1{,}4-1)(0{,}72)^2]^{1{,}4/0{,}4} = 84\,269 \text{ Pa}$$

et

$$p_A = 8{,}59(9\,810)/1{,}402 = 60\,105 \text{ Pa (abs)}$$

En vérifiant l'hypothèse adiabatique, utilisant la relation adiabatique, on a :

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k}, \quad \frac{336}{T_A} = \left(\frac{84\,268}{60\,105}\right)^{0{,}4/1{,}4}, \quad T_A = 305 \text{ K}$$

De même $c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287)(305)} = 350$ m/s.

Alors, $V/c = 245/350 = 0{,}699$ et $p_A = \dfrac{84\,269}{[1 + 0{,}2(0{,}699)^2]^{1{,}4/0{,}4}} = 60\,805$ Pa.

Aucune correction supplémentaire n'est nécessaire.

12.9 Un orifice à bord mince de 100 mm de diamètre permet de vider de l'eau ayant une hauteur de pression de 6,1 m. Quel est le débit en m³/s?

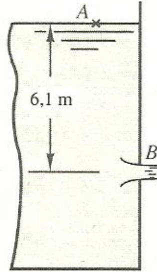


Fig. 12-2

Solution

En appliquant l'équation de Bernoulli entre A et B dans la figure 12-2, avec pour référence B,

$$(0 + 0 + 6{,}1) - \left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right)\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} = \left(\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} + \frac{p_B}{w} + 0\right)$$

Mais la hauteur due à la pression en B est nulle (comme on l'a vu dans le chapitre 5, problème 5.6). Alors,

$$V_{\text{jet}} = c_v\sqrt{2g \times 6{,}1}$$

De plus $Q = A_{\text{jet}}V_{\text{jet}}$ qui, en utilisant la définition des coefficients, s'écrit

$$Q = (c_c A_0)c_v\sqrt{2g \times 6{,}1} = cA_0\sqrt{2g \times 6{,}1}$$

D'après la table 7, $c = 0{,}594$ pour $d = 100$ mm et $h = 6{,}1$ m. Alors $Q = 0{,}594\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2\right]\sqrt{2g \times 6{,}1} =$ $0{,}051$ m³/s.

12.10 La vitesse réelle dans la partie contractée d'un jet de liquide coulant à travers un orifice à bord mince de 50 mm de diamètre est de 8,53 m/s pour une charge de 4,57 m. (*a*) Quelle est la valeur du coefficient de vitesse? (*b*) Si le débit mesuré est de 0,011 4 m³/s, calculer les coefficients de contraction et de débit.

Solution

(*a*) Vitesse réelle $= c_v\sqrt{2gH}$, $\quad 8{,}53 = c_v\sqrt{(2)(9{,}81) \times 4{,}57}$, $\quad c_v = 0{,}901$.

(*b*) Débit réel $Q = cA\sqrt{2gH}$, $\quad 0{,}011\,4 = c\left[\frac{1}{4}\pi(50/1\,000)^2\right]\sqrt{(2)(9{,}81) \times 4{,}57}$, $\quad c = 0{,}613$.
D'après $c = c_v \times c_c$, $\quad c_c = 0{,}613/0{,}901 = 0{,}680$.

12.11 De l'huile s'écoule au travers d'un orifice à bord mince normalisé de 25 mm de diamètre sous une charge de 5,5 m et un débit de 3×10^3 m³/s. Le jet vient frapper un mur situé à 1,5 m de distance en un point situé sur la verticale de l'axe de la partie contractée du jet à 0,12 m en dessous. Calculer les coefficients.

Solution

(*a*) $Q = cA\sqrt{2gH}$, soit $3 \times 10^{-3} = c\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}025)^2\right]\sqrt{2g(5{,}5)}$, d'où $c = 0{,}588$.

(*b*) D'après la dynamique, $x = Vt$ et $y = \frac{1}{2}gt^2$. Ici x et y représentent les coordonnées du jet, ainsi qu'elles ont été mesurées.
Éliminons t, on obtient $x^2 = (2V^2/g)y$.
En reportant : $(1{,}5)^2 = (2V^2/9{,}81)(0{,}12)$ et V réelle $= 9{,}59$ m/s dans le jet.
Alors, $9{,}59 = c_v\sqrt{2g(5{,}5)}$ et $c_v = 0{,}923$. Finalement $c_c = c/c_v = 0{,}588/0{,}923 = 0{,}637$.

12.12 Le réservoir du problème 12.9 est fermé et l'espace d'air situé au-dessus de l'eau est sous pression, provoquant une augmentation du débit qui passe à 0,075 m³/s. Trouver la pression de l'air.

Solution

$$Q = cA_0\sqrt{2gH} \quad \text{ou} \quad 0{,}075 = c\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2\right]\sqrt{2g(6{,}1 + p/w)}$$

La table 7 indique que c ne change pas de manière appréciable dans l'intervalle des hauteurs de charge considérées. En utilisant $c = 0{,}593$ et en résolvant : $p/w = 7{,}1$ m d'eau (la valeur de c prise est vérifiée pour la hauteur de charge totale H). Alors,

$$p' = \rho g h = 9{,}81 \times 1\,000 \times 7{,}1 \approx 69\,700 \text{ Pa.}$$

12.13 De l'huile de densité 0,720 s'écoule par un orifice de 76 mm de diamètre dont les coefficients de vitesse et de contraction sont respectivement de 0,950 et de 0,650. Quelle doit être l'indication portée par le manomètre A de la figure 12-3 pour que la puissance du jet soit de 6,00 kW ?

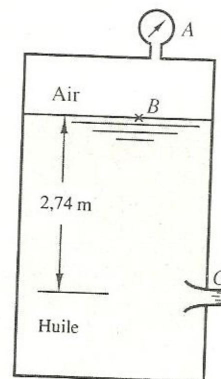


Fig. 12-3

Solution

On peut calculer la vitesse du jet à partir de la valeur de sa puissance :

$$\text{puissance du jet} = wQH_{\text{jet}} = w(c_cA_0V_{\text{jet}})(0 + V_{\text{jet}}^2/2g + 0)$$

$$6\,000 = (0{,}720 \times 9\,810)(0{,}650)\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}076)^2\right]V_{\text{jet}}^3/2g$$

En résolvant : $V_{\text{jet}}^3 = 5\,652$ et $V_{\text{jet}} = 17{,}8$ m/s.

En appliquant l'équation de Bernoulli entre B et C avec pour niveau de référence C,

$$\left(\frac{p_A}{\rho g} + \text{négl.} + 2{,}74\right) - \left[\frac{1}{(0{,}95)^2} - 1\right]\frac{(17{,}8)^2}{2g} = \left(0 + \frac{(17{,}8)^2}{2g} + 0\right)$$

et $p_A/\rho g = 15{,}15$ m d'huile. Alors, $p_A = \rho g h = (0{,}720 \times 9\,810)(15{,}15) = 1{,}07 \times 10^5$ Pa.

Note. Le lecteur ne doit pas confondre la hauteur de charge totale H provoquant le débit avec la valeur H_{jet} dans l'expression de la puissance.

12.14 Pour l'ajutage de 100 mm de diamètre représenté dans la figure 12-4
(*a*) Quel est le débit d'eau à 24 °C sous la charge de 9,2 m? (*b*) Quelle est la hauteur due à la pression à la section B? (*c*) Quelle est la hauteur de charge maximale pour que le tuyau soit plein à la sortie? (Utiliser $c_v = 0{,}82$.)

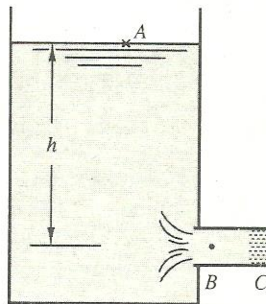


Fig. 12-4

Solution

Pour un ajutage normalisé, le jet se contracte en B pour atteindre environ 0,62 fois la surface du tube. On a mesuré la perte de charge entre A et B et on a trouvé qu'elle valait à peu près 0,042 fois la hauteur de vitesse en B.

(*a*) En appliquant l'équation de Bernoulli, entre A et C, avec pour niveau la référence C, on a :

$$(0 + \text{négl.} + 9{,}2) - \left[\frac{1}{(0{,}82)^2} - 1\right]\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} + 0\right)$$

et $V_{\text{jet}} = 11{,}02$ m/s. Alors $Q = A_{\text{jet}} V_{\text{jet}} = \left[1{,}00 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2\right](11{,}02) = 0{,}086\,6\ \text{m}^3/\text{s}$.

(*b*) À présent l'équation de Bernoulli, appliquée entre A et B, avec B pour référence, donne

$$(0 + \text{négl.} + 9{,}2) - 0{,}042\frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + 0\right) \qquad (A)$$

De plus $Q = A_B V_B = A_C V_C$ ou $c_c A V_B = A V_c$ ou $V_B = V_{\text{jet}}/c_c = 11{,}02/0{,}62 = 17{,}77$ m/s.

En reportant dans l'équation (A), on obtient :

$$9{,}2 = \frac{p_B}{\rho g} + 1{,}042\frac{(17{,}77)^2}{2g} \quad \text{et} \quad \frac{p_B}{\rho g} = -7{,}57 \text{ m d'eau.}$$

(*c*) À mesure que la charge provoquant le débit à travers l'ajutage augmente, la hauteur due à la pression en B décroît. Pour un écoulement permanent (et avec le tuyau plein à la sortie), la hauteur due à la pression en B ne doit pas être inférieure à la hauteur due à la pression de vapeur du liquide à la température considérée. D'après la table 1 de l'annexe, pour l'eau à 24 °C, cette valeur est de 3 kPa soit environ 0,3 m (abs.) au niveau de la mer (−10,0 m au manomètre).

D'après (A) ci-dessus $$h = \frac{p_B}{\rho g} + 1{,}042\frac{V_B^2}{2g} = -10{,}0 + 1{,}042\frac{V_B^2}{2g} \quad (B)$$

De plus $$c_c A V_B = A V_c = A c_v \sqrt{2gh}$$

Ainsi $$V_B = \frac{c_v}{c_c}\sqrt{2gh} \quad \text{ou} \quad \frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{c_v}{c_c}\right)^2 h = \left(\frac{0{,}82}{0{,}62}\right)^2 h = 1{,}75h$$

Reportant dans (B), $h = -10{,}0 + 1{,}042(1{,}754h)$ et $h = 12{,}15$ m d'eau (24 °C).

Toute charge supérieure à 12 m fera jaillir le jet sans qu'il touche les parois du tube. L'ajutage fonctionnera alors comme un orifice à bord mince.

Il risque d'y avoir des phénomènes de cavitation dans des conditions voisines de la pression de vapeur (voir le chapitre 14.)

12.15 De l'eau circule dans un tuyau de 100 mm de diamètre au rythme de 0,027 m^3/s et passe ensuite par une buse fixée à l'extrémité du tuyau. La pointe de la buse a 50 mm de diamètre et les coefficients de vitesse et de contraction de la buse sont respectivement de 0,950 et 0,930. Quelle est la pression qu'on doit avoir à l'entrée de la buse si la pression ambiante est la pression atmosphérique?

Solution

En appliquant l'équation de Bernoulli entre l'entrée de la buse et le jet, on obtient :

$$\left(\frac{p}{w} + \frac{V_{100}^2}{2g} + 0\right) - \left[\frac{1}{(0{,}950)^2} - 1\right]\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{\text{jet}}^2}{2g} + 0\right)$$

on calcule les vitesses à partir de $Q = AV: 0{,}027 = A_{100}V_{100} = A_{\text{jet}}V_{\text{jet}} = (c_c A_{50})V_{\text{jet}}$. Ainsi,

$$V_{100} = \frac{0{,}027}{\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2} = 3{,}44 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad V_{\text{jet}} = \frac{0{,}027}{0{,}930\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2\right]} = 14{,}8 \text{ m/s}$$

En reportant dans l'équation écrite au-dessus et en résolvant, $p/w = 12{,}4 - 0{,}6 = 11{,}8$ m d'eau.

Si on s'était servi de la formule $V_{\text{jet}} = c_v\sqrt{2gh}$ on aurait trouvé pour $H = (p/w + V_{100}^2)/2g)$, soit

$$14{,}8 = 0{,}950\sqrt{2g[p/w + (3{,}44)^2/2g]}$$

d'où $\sqrt{p/w + 0{,}6} = 3{,}51$ et $p/w = 11{,}8$ m d'eau, comme précédemment.

12.16 Une buse mesurant 100 mm de diamètre à l'entrée et 50 mm à la pointe est dirigée vers le bas, et la hauteur due à la pression à l'entrée est de 7,93 m d'eau. L'entrée de la buse est à 914 mm au-dessus de la pointe et son coefficient de vitesse est de 0,962. Calculer la puissance du jet d'eau.

Solution

Pour une buse, à moins qu'on ne le donne, on prend c_c égal à l'unité. Par conséquent : $V_{\text{jet}} = V_{50}$.

Avant de calculer la puissance, on doit chercher V et Q. En appliquant l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la pointe, avec la pointe pour référence, on obtient

$$\left(7{,}93 + \frac{V_{100}^2}{2g} + 0{,}914\right) - \left[\frac{1}{(0{,}962)^2} - 1\right]\frac{V_{50}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{50}^2}{2g} + 0\right)$$

et $A_{100}V_{100} = A_{50}V_{50} \circ V_{100}^2 = (5/10^4)V_{50}^2$. En résolvant, $V_{50} = 12{,}67$ m/s.

$$\text{La puissance du jet} = wQH_{\text{jet}} = 9\,810\frac{\left[\frac{\pi}{4}(0{,}05)^2 12{,}67\right]}{1\,000}(12{,}67)^2/2 \times 9{,}81 = 2{,}1 \text{ kW}$$

12.17 De l'eau circule dans un tube de Venturi de 30 cm × 15 cm au rythme de 0,039 5 m^3/s et le manomètre différentiel indique 1,0 m, comme le montre la figure 12-5. La densité du liquide manométrique est de 1,25. Calculer le coefficient du tube de Venturi.

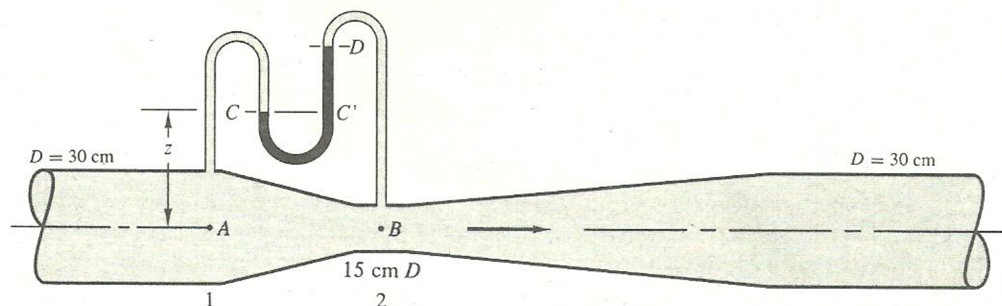


Fig. 12-5

Solution

Le coefficient d'un tube de Venturi est le même que le coefficient de débit ($c_c = 1{,}00$ et ainsi $c = c_v$). On ne doit pas confondre le coefficient d'écoulement K avec le coefficient de l'appareil de mesure c. On donnera des éclaircissements sur cette question à la fin du problème.

En appliquant l'équation de Bernoulli entre A et B, dans le cas idéal, on obtient :

$$\left(\frac{p_A}{w} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0\right) - \text{aucune perte} = \left(\frac{p_B}{w} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0\right)$$

et $V_{30}^2 = (A_{15}/A_{30})^2 V_{15}^2$. En résolvant : $V_{15} = \sqrt{\dfrac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1-(A_{15}/A_{30})^2}}$ (sans pertes).

La vitesse réelle (et ainsi la valeur réelle du débit Q) s'obtient en multipliant la valeur idéale par le coefficient du tube de Venturi. Ainsi,

$$Q = A_{15}V_{15} = A_{15}c\sqrt{\frac{2g(p_A/w - p_B/w)}{1-(A_{15}/A_{30})^2}} \qquad (1)$$

Pour obtenir la hauteur due à la pression différentielle indiquée ci-dessus, on doit appliquer les principes des manomètres différentiels.

$$p_C = p_{C'}$$

$$(p_A/w - z) = p_B/w - (z + 1{,}0) + 1{,}25(1{,}0)$$

ou

$$(p_A/w - p_B/w) = 0{,}25 \text{ m.}$$

En reportant dans (*1*), $0{,}039\,5 = \frac{1}{4}\pi(0{,}25)^2 c\sqrt{2g(0{,}25)/(1-1/16)}$ et $c = 0{,}98$.

Note. L'équation (*1*) est quelquefois écrite $Q = KA_2\sqrt{2g(\Delta p/w)}$ où K s'appelle le coefficient d'écoulement. Il est clair que

$$K = \frac{c}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{\sqrt{1-(D_2/D_1)^4}}$$

Des tables ou abaques donnant K peuvent être facilement employées pour obtenir c si on le désire. Les diagrammes de cet ouvrage donnent les valeurs de c. Les facteurs de conversion à utiliser pour obtenir les valeurs de K pour certains rapports de diamètres de quelques appareils sont indiqués dans les différents diagrammes de l'annexe.

12.18 De l'eau circule vers le haut dans un tube de Venturi de 300 mm × 150 mm dont le coefficient est de 0,980. La dénivellation du liquide de densité 1,25 du manomètre différentiel est de 1,18 m comme le montre la figure 12-6. Calculer le débit en m^3/s.

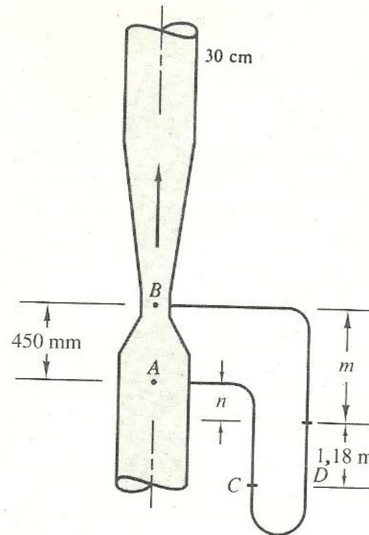


Fig. 12-6

Solution

En se reportant à l'équation de Bernoulli démontrée dans le problème 12.17, on constate que pour ce problème, $z_A = 0$ et $z_B = 0,45$ m. Alors

$$Q = cA_{150}\sqrt{\frac{2g[(p_A/w - p_B/w) - 0,45]}{1-(1/2)^4}}$$

En utilisant le principe du manomètre différentiel pour obtenir $\Delta p/w$, on obtient :

$$p_c/w = p_D/w \text{ (en m d'eau)}$$
$$p_A/w + (n + 1,18) = p_B/w + m + 1,25(1,18)$$

$$[(p_A/w - p_B/w) - (m - n)] = 1,18(1,25 - 1,00)$$
$$[(p_A/w - p_B/w) - 0,45] = 0,295 \text{ m d'eau}$$

En reportant dans l'équation donnant le débit

$$Q = 0,980\left(\frac{1}{4}\pi\right)(0,15)^2\sqrt{2g(0,295)/(1-1/16)} = 0,043 \text{ m}^3/\text{s}.$$

12.19 De l'eau à 38 °C passe à raison de 0,015 m^3/s à travers un orifice à bord mince de 100 mm ménagé dans un tuyau de 200 mm. Quelle est la différence de pression entre la section amont et la section contractée (section de «veine contractée»)?

Solution

Dans le diagramme C de l'annexe, on remarque que c' varie avec le nombre de Reynolds. Notons que le nombre de Reynolds doit être calculé pour la section de l'orifice, et non pour la section contractée du jet ni pour la section du tuyau. Cette valeur est

$$R_E = \frac{V_0 D_0}{\nu} = \frac{(4Q/\pi D_0^2)D_0}{\nu} = \frac{4Q}{\nu\pi D_0} = \frac{4(0,015)}{\pi(687\times10^{-9})(0,1)} = 278\ 000$$

Le diagramme C pour $\beta = 0,500$ donne $c' = 0,604$.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre la section de tuyau (A) et la section du jet (B), on obtient l'équation générale des fluides incompressibles, comme suit :

$$\left(\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+0\right)-\left[\frac{1}{c_v^2}-1\right]\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g}=\left(\frac{p_{\text{jet}}}{\rho g}+\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g}+0\right)$$

et

$$Q=A_A V_A=(c_c A_B)V_{\text{jet}}.$$

En reportant pour avoir V_A en fonction de V_{jet}, et en résolvant

$$\frac{V_{\text{jet}}^2}{2g}=c_v^2\left(\frac{p_A/\rho g-p_{\text{jet}}/\rho g}{1-c^2(A_B/A_A)^2}\right)\quad \text{soit}\quad V_{\text{jet}}=c_v\sqrt{\frac{2g(p_A/\rho g-p_{\text{jet}}/\rho g)}{1-c^2(D_B/D_A)^4}}$$

Alors,

$$Q=A_{\text{jet}}V_{\text{jet}}=(c_c A_B)c_v\sqrt{\frac{2g(p_A/\rho g-p_{\text{jet}}/\rho g)}{1-c^2(D_B/D_A)^4}}=cA_B\sqrt{\frac{2g(p_A/\rho g-p_{\text{jet}}/\rho g)}{1-c^2(D_B/D_A)^4}}.$$

D'une manière plus commode, pour un orifice avec vitesse d'approche et jet contracté, l'équation s'écrit :

$$Q=\frac{c'A_B}{\sqrt{1-(D_B/D_A)^4}}\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)} \tag{1}$$

ou

$$Q=KA_B\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)} \tag{2}$$

où K s'appelle le coefficient d'écoulement. On peut déterminer le coefficient c' de l'appareil de mesure expérimentalement pour un rapport donné du diamètre de l'orifice au diamètre du tuyau, ou alors on peut préférer employer le coefficient d'écoulement K.

Terminons la résolution en reportant l'expression (*1*) dans l'équation ci-dessus :

$$0{,}015=\frac{0{,}604\times\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2}{\sqrt{1-(1/2)^4}}\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)}\quad \text{et}\quad \Delta p/\rho g=(p_A/\rho g-p_{\text{jet}}/\rho g)=0{,}478 \text{ m d'eau.}$$

12.20 Pour l'orifice du tuyau du problème 12.19, quelle différence de pression en Pa provoquerait l'écoulement de la même quantité de térébenthine à 20 °C? (Voir l'annexe pour avoir la densité et ν.)

Solution

$$R_E=\frac{4Q}{\pi\nu D_0}=\frac{4(0{,}015)}{\pi(1{,}37\times10^{-6})(0{,}1)}=110\,400.$$

D'après le diagramme C, pour $\beta=0{,}500$, $c'=0{,}607$.

Alors,

$$0{,}015=\frac{0{,}607\times\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2}{\sqrt{1-(1/2)^4}}\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)}$$

d'où :

$$\Delta\frac{p}{\rho g}=\left(\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_{\text{jet}}}{\rho g}\right)=0{,}473 \text{ m de térébenthine}$$

et

$$\Delta p=\rho g h=0{,}862\times9\,810\times0{,}473=4\,000 \text{ Pa.}$$

12.21 Calculer le débit d'eau à 21 °C à travers un orifice à bord mince de 150 mm ménagé dans un tuyau de 250 mm si la différence de pression entre la veine contractée et la section du tuyau est de 1,10 m d'eau.

Solution

On a rencontré des problèmes de ce type lors de l'étude de l'écoulement des liquides dans les tuyaux. On ne peut trouver c' puisqu'on ne peut calculer le nombre de Reynolds. Se reportant au diagramme C, pour $\beta = 0{,}600$ on admettra que la valeur de c' est de 0,610. En utilisant cette valeur,

$$Q = \frac{0{,}610 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2}{\sqrt{1-(0{,}60)^4}}\sqrt{19{,}6(1{,}10)} = 0{,}053\,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Alors
$$R_E = \frac{4(0{,}053\,6)}{(0{,}000\,000\,985)(0{,}15)} = 462\,000 \quad \text{(valeur d'essai).}$$

D'après le diagramme C, $\beta = 0{,}600$, $c' = 0{,}609$. Le calcul du débit avec cette fois $c' = 0{,}609$ donne $Q = 0{,}053\,2$ m^3/s (le nombre de Reynolds n'est pas modifié).

Note particulière. Le professeur R.C. Binder de l'université de Purdue considère dans les pages 132-3 de son ouvrage *Fluid Mechanics* (deuxième édition) qu'un problème de ce genre ne doit pas nécessairement être envisagé comme une question à résoudre par approximations successives. Il propose de construire des courbes particulières sur l'abaque donnant le coefficient en fonction du nombre de Reynolds. Dans le cas de l'orifice du tuyau, l'équation (*1*) du problème 12.19 peut s'écrire

$$\frac{Q}{A_B} = \frac{c'\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)}}{\sqrt{1-(D_B/D_A)^4}} = V_B \quad \text{car} \quad Q = AV$$

Mais,
$$R_E = \frac{V_B D_B}{\nu} = \frac{c'\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)} \times D_B}{\nu\sqrt{1-(1/2)^4}} \quad \text{soit} \quad \frac{R_E}{c'} = \frac{D_B\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)}}{\nu\sqrt{1-(1/2)^4}}$$

soit en général
$$\frac{R_E}{c'} = \frac{D_0\sqrt{2g(\Delta p/\rho g)}}{\nu\sqrt{1-(D_0/D_p)^4}}.$$

On a tracé deux lignes droites appelées lignes T sur le diagramme C, l'une pour $R_E/c' = 700\,000$ et l'autre pour $R_E/c' = 800\,000$. Pour le problème 12.21, le rapport R_E/c' calculé vaut

$$\frac{R_E}{c'} = \frac{(0{,}15)\sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1{,}1}}{0{,}984 \times 10^{-6}\sqrt{1-(0{,}60)^4}} = 759\,000$$

Avec la précision de lecture, la droite 759 000 coupe la courbe $\beta = 0{,}600$ en $c' = 0{,}609$. On calcule ensuite facilement le débit Q.

12.22 Une buse de 100 mm de diamètre à la pointe est fixée sur un tuyau de 254 mm. Du fuel-oil moyen à 26,7 °C circule dans la buse à raison de 0,099 m^3/s. Admettons que le calibre de la buse soit représenté par la courbe $\beta = 0{,}40$ du diagramme D. Calculer la hauteur de la pression indiquée par un manomètre différentiel, si le liquide du manomètre a pour densité 13,6.

Solution

L'équation de Bernoulli appliquée entre la section du tuyau et le jet, donne la même équation que celle que l'on a obtenue dans le problème 12.17 pour le tube de Venturi, puisque la buse a été conçue avec un coefficient de contraction égal à l'unité.

$$Q = A_{100}V_{100} = A_{100}c\sqrt{\frac{2g(p_A/\rho g - p_B/\rho g)}{1-(0{,}394)^4}} \qquad (1)$$

Le diagramme D indique que c varie avec le nombre de Reynolds.

$$V_{100} = \frac{Q}{A_{100}} = \frac{0{,}099}{\frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2} = 12{,}6 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{12{,}6 \times 0{,}1}{3{,}39 \times 10^{-6}} = 372\,000$$

La courbe $\beta = 0{,}40$ donne $c = 0{,}993$. Ainsi

$$0{,}099 = \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2 \times 0{,}993\sqrt{\frac{2g(p_A/\rho g - p_B/\rho g)}{1-(0{,}394)^4}}$$

et $(p_A/\rho g - p_B/\rho g) = 8{,}015$ m de fuel.

Les principes de fonctionnement du manomètre différentiel sont, en utilisant la densité de fuel égale à 0,851, valeur lue dans l'annexe.

$$8{,}015 = h(13{,}6/0{,}851 - 1) \quad \text{et} \quad h = 0{,}535 \text{ m}.$$

Si la hauteur de pression du manomètre différentiel avait été donnée, on aurait utilisé le procédé décrit au problème précédent, c'est-à-dire qu'on aurait donné une valeur à c, calculé Q, obtenu le nombre de Reynolds et lu c à partir de la courbe approprié du diagramme D. Si c diffère de la valeur donnée, on répète le calcul jusqu'à obtenir le bon coefficient.

12.23 Établir l'expression du débit d'un fluide compressible à travers un appareil à mesurer le débit à buse et un tube de Venturi.

Solution

Puisque la variation de la vitesse s'effectue en très peu de temps, le fluide ne peut qu'échanger peu de chaleur, et on peut admettre que les conditions sont adiabatiques. On a montré dans l'équation (D) du problème 7.21, que le théorème de Bernoulli pour l'écoulement des fluides compressibles donnait

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{w_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right]$$

Pour un appareil de mesure à buse, ou pour un tube de Venturi, horizontal $z_1 = z_2$ et on tient compte de la perte de charge moyennant le coefficient de débit. De plus, puisque $c_c = 1{,}00$,

$$W = w_1 A_1 V_1 = w_2 A_2 V_2 \quad (\text{N/s})$$

Alors, en amont $V_1 = W/w_1A_1$, en aval $V_2 = W/w_2A_2$. En reportant et en résolvant en W, on obtient :

$$\frac{W^2}{w_2^2A_2^2} - \frac{W^2}{w_1^2A_1^2} = 2g\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

soit $W \text{ (idéal)} = \dfrac{w_2A_2}{\sqrt{1-(w_2/w_1)^2(A_2/A_1)^2}}\sqrt{\dfrac{2gk}{k-1}(p_1/w_1)[1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}$.

Il est plus pratique d'éliminer w_2 sous le radical. Écrivant que $w_2/w_1 = (p_2/p_1)^{1/k}$,

$$W \text{ (idéal)} = w_2A_2\sqrt{\frac{\frac{2gk}{k-1}(p_1/w_1)[1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}{1-(A_2/A_1)(p_2/p_1)^{2/k}}} \qquad (1)$$

La valeur de W en N/s s'obtient en multipliant le membre de droite de l'équation par le coefficient c.

Par comparaison, l'équation (1) du problème 12.17 et l'équation (1) du problème 12.22 (pour des fluides incompressibles) peuvent s'écrire

$$W = wQ = \frac{wA_2c}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}}\sqrt{2g(\Delta p/w)}$$

ou

$$W = wKA_2\sqrt{2g(\Delta p/w)}$$

L'équation ci-dessus peut s'écrire sous une forme plus générale pour s'appliquer aussi bien aux fluides compressibles qu'incompressibles. On introduit le facteur de détente (adiabatique) Y et on donne la valeur de w_1 à l'entrée. La relation fondamentale s'écrit alors

$$W = w_1 K A_2 Y \sqrt{2g(\Delta p + w_1)} \qquad (2)$$

Pour les fluides incompressibles, $Y = 1$. Pour les fluides compressibles, égalons les expressions (*1*) et (*2*) et résolvons en Y. Ce faisant, on trouve

$$Y = \sqrt{\frac{1-(A_2/A_1)^2}{1-(A_2/A_1)^2(p_2/p_1)^{2/k}} \times \frac{[k/k-1][1-(p_2/p_1)^{(k-1)/k}](p_2/p_1)^{2/k}}{1-p_2/p_1}}$$

Cette expression du facteur Y est fonction de trois rapports sans dimension. La table 8 donne la liste de quelques valeurs courantes pour les appareils à buse et pour les tubes de Venturi.

Note. On a intérêt à déterminer expérimentalement les valeurs de Y' pour les orifices et les appareils de mesure de débit à buses. Les valeurs sont différentes des valeurs trouvées ci-dessus pour Y puisque le coefficient de contraction n'est pas l'unité et n'est pas non plus constant. Connaissant Y' les solutions sont identiques à celles qui suivent pour les débits mètres à buses et les tubes de Venturi. On renvoie le lecteur aux expériences de H.B. Reynolds et J.A. Perry comme sources bibliographiques.

12.24 De l'air à la température de 26,7 °C circule dans un tuyau de 100 mm et à travers une buse à mesurer le débit de 50 mm. La différence de pression est de 0,159 m d'huile de densité 0,910. La pression en aval de la buse est de 195 kPa. Quel est le débit pondéral si la pression atmosphérique est de 101,38 kPa, (*a*) en admettant que l'air a une densité constante et (*b*) en supposant les conditions adiabatiques?

Solution

(*a*)
$$\rho_1 = \frac{296{,}38 \times 1\,000}{287(299{,}7)} = 3{,}446 \text{ kg/m}^3$$

D'après les principes de fonctionnement d'un manomètre différentiel, en exprimant la pression en mètres d'air,

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 g} = 0{,}159\left(\frac{\rho_{\text{huile}}}{\rho_{\text{air}}} - 1\right) = 0{,}159\left(\frac{0{,}910 \times 1\,000}{3{,}446} - 1\right) = 41{,}8 \text{ m d'air}$$

En prenant $c = 0{,}980$ et en utilisant l'équation (*1*) du problème 12.22 après avoir multiplié par ρ_1 nous avons

$$\dot{m} = \rho_1 Q = 3{,}446 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2(0{,}980)\sqrt{\frac{2g(41{,}83)}{1-(1/2)^4}} = 0{,}196 \text{ kg/s.}$$

Pour vérifier la valeur de c, trouver le nombre de Reynolds et utiliser la courbe appropriée du diagramme D [ici $\rho_1 = \rho_2$ et $\nu = 1{,}57 \times 10^{-6} \text{m}^2/s$ dans les conditions atmosphériques normales, d'après la table 1(*B*)].

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{A_2\rho_2} = \frac{\dot{m}}{(\pi d_2^2/4)\rho_2}$$

Alors, $$R_E = \frac{V_2 d_2}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi d_2 \nu \rho_2} = \frac{4(0{,}196)}{\pi(0{,}05)(15{,}7 \times 101{,}38/296{,}38)10^{-6} \times 3{,}446} = 269\,700 \simeq 270\,000$$

D'après le diagramme D, $c = 0{,}986$. Calculant à nouveau : $\dot{m} = 0{,}197$ kg/s.

On ne garantit pas une précision plus grande dans le calcul puisque le nombre de Reynolds ne va pas changer de manière appréciable, pas plus que la valeur de c lue sur le diagramme D.

(*b*) Calculer la pression et les masses spécifiques d'abord.

$$p_1 = 296{,}38 \text{ kPa} \quad p_2 = (296{,}38 - 41{,}83 \times 3{,}446 \times 9{,}81/1\,000) = 294{,}97 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{294{,}97}{296{,}38} = 0{,}995 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = 0{,}995 \text{ (voir chapitre 1). puis } \rho_2 = 3{,}42 \text{ kg/m}^3$$

La table 8 donne quelques valeurs du facteur de détente Y dont il a été question dans le problème 12.23. On peut effectuer une interpolation, dans le cas présent, entre le rapport de pression 0,95 et 1,00 pour obtenir Y pour $p_2/p_1 = 0{,}995$. Pour $k = 1{,}40$ et $d_2/d_1 = 0{,}50$ nous obtenons $Y = 0{,}997$.

Admettons que $c = 0{,}980$, (après l'examen du diagramme D) et notant que $K = 1{,}032c$, l'équation (2) du problème 12.23 s'écrit

$$\dot{m} = \rho K A_2 Y \sqrt{2(\Delta p/\rho_1)}$$
$$= (3{,}446)(1{,}032 \times 0{,}980) \times \frac{1}{4}\pi(0{,}05)^2 \times 0{,}997\sqrt{2 \times 9{,}81 \times 41{,}83} = 0{,}195 \text{ kg/s}$$

Vérifiant c $\quad R_E = \dfrac{4\dot{m}}{\pi d_2 \nu \rho_2} = \dfrac{4(0{,}195)}{\pi(0{,}05)(15{,}7 \times 101{,}38/296{,}38)10^{-6} \times 3{,}422} = 270\,200$
et $c = 0{,}986$ (Diagramme D, courbe $\beta = 0{,}50$).

En refaisant le calcul, $\dot{m} = 0{,}196$ kg/s. Une précision plus grande n'est pas indispensable. Notons qu'on n'introduit aucune erreur dans la partie (*a*) en supposant la densité de l'air constante.

12.25 On emploie un tube de Venturi de 200 mm × 100 mm pour mesurer le débit de gaz carbonique à 20 °C. La dénivellation de la colonne d'eau du manomètre différentiel est de 1 823 mm et le baromètre indique 762 mm de mercure. Pour une pression d'entrée de 124 174 Pa, calculer le débit massique.

Solution

La pression absolue à l'entrée est $p_1 = 124\,174$ Pa et la masse volumique ρ_1 du gaz carbonique est

$$\rho_1 = \frac{124\,174}{187{,}8(293)} = 2{,}25 \text{ kg/m}^3$$

La différence de pression $= 1{,}823 \times 9{,}81(1\,000 - 2{,}25) = 17\,843$ Pa et par conséquent, la pression absolue au col $= p_2 = 124\,174 - 17\,843 = 106\,331$ Pa absolus.

Pour obtenir la masse volumique ρ_2 nous utilisons $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{106\,331}{124\,174} = 0{,}856$ et $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = (0{,}856)^{1/k}$ (voir le chapitre 1). Ainsi $\rho_2 = 2{,}25(0{,}856)^{1/1{,}3} = 2{,}00$ kg/m^3.

$$\dot{m} = \rho_1 K A_2 Y \sqrt{2(\Delta p/\rho_1)} \text{ kg/s}$$

En utilisant $K = 1{,}30$, $d_2/d_1 = 0{,}50$ et $p_2/p_1 = 0{,}856$, Y (table 8) $= 0{,}909$ par interpolation. En admettant que $c = 0{,}985$, d'après le diagramme E, et en notant que $K = 1{,}032c$, nous avons

$$\dot{m} = (2{,}25)(1{,}032 \times 0{,}985) \times \frac{1}{4}\pi(0{,}1)^2 \times 0{,}909\sqrt{2(17\,843/2{,}25)} = 2{,}056 \text{ kg/s}$$

Pour vérifier la valeur prise pour c, calculons le nombre de Reynolds et utilisons la courbe appropriée du diagramme E. D'après le problème 12.24,

$$R_E = \frac{4\dot{m}}{\pi d_2 \nu \rho_2} = \frac{4(2{,}056)}{\pi(0{,}1)(8{,}45 \times 101\,700/124\,174)10^{-6} \times 1{,}996} = 1{,}9 \times 10^6$$

D'après le diagramme E, $c = 0{,}984$. Faisant le calcul à nouveau $\dot{m} = 2{,}05$ kg/s.

12.26 Établir la relation donnant la limite de la vitesse d'un fluide compressible dans des conduits qui se resserrent (vitesse du son).

Solution

En négligeant la vitesse d'approche dans l'équation de Bernoulli (*D*) du problème 7.21, chapitre 7, pour un fluide idéal, nous obtenons

$$\frac{V_2^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] \qquad (1)$$

De plus, si on avait reporté $(p_2/\rho_2)^{1/k}$ à la place de $(p_1/\rho_1)^{1/k}$ avant de faire l'intégration qui a donné l'équation (D) on aurait trouvé pour la hauteur due à la vitesse

$$\frac{V_2^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \qquad (2)$$

Si le fluide atteint la vitesse du son c_2 à la section 2, alors $V_2 = c_2$ et $V_2^2 = c_2^2 = kp_2/\rho_2$ (voir le chapitre 1). En reportant dans l'équation (2)

$$\frac{kp_2}{2\rho_2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

qui se ramène à

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \qquad (3)$$

Ce rapport p_2/p_1 s'appelle le *rapport de pression critique* et dépend du fluide qui circule. Pour des valeurs p_2/p_1 égales ou inférieures au rapport de pression critique, un gaz s'écoule à la vitesse du son. La pression existant dans un jet libre, jaillissant à la vitesse du son, *égale ou dépasse* la pression qui l'entoure.

12.27 Du gaz carbonique s'écoule par une ouverture de 12,5 mm ménagée dans la paroi d'un réservoir où la pression est de 759 kPa au manomètre et la température de 20 °C. Quelle est la vitesse du jet (la pression atmosphérique étant normale)?

Solution

D'après la table 1(A), $r = 187{,}8$; $r = 1{,}30$.

$$\rho_1 = \frac{p_1}{rT_1} = \frac{860\,000}{187{,}8 \times 293} = 15{,}61 \text{ kg/m}^3$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\text{critique} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k/k-1)} = \left(\frac{2}{2{,}30}\right)^{1{,}30/0{,}30} = 0{,}542$$

$$\text{rapport}\left(\frac{\text{atmosphère}}{\text{pression du réservoir}}\right) = \frac{101{,}3}{860} = 0{,}118$$

Puisque cette dernière est inférieure au rapport de pression critique, la pression du gaz qui s'échappe $= 0{,}542 \times p_1$. Ainsi, $p_2 = 0{,}542 \times 860 = 466$ kPa absolus.

$$V_2 = c_2 = \sqrt{1{,}3 \times 187{,}8 \times T_2} = \sqrt{245 T_2}$$

où $T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (0{,}542)^{0{,}30/1{,}30} = 0{,}868$, $T_2 = 254$ K. Alors $V_2 = \sqrt{245 \times 254} \approx 250$ m/s.

12.28 De l'azote circule dans un conduit de section variable. En une section particulière la vitesse est de 366 m/s, la pression de 83 kPa absolus et la température de 30 °C. En supposant qu'il n'y a pas de pertes dues au frottement et que les conditions sont adiabatiques, (a) quelle est vitesse en une section où la pression est de 124 kPa et (b) quelle est la valeur du nombre de Mach en cette section?

Solution

Pour l'azote, $r \simeq 297$ et $k = 1{,}40$ [d'après la table 1(A) de l'annexe].

(a) D'après le problème 7.21 du chapitre 7, l'équation (D) pour des conditions adiabatiques peut s'écrire

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

où on ne prend pas la perte de charge en considération et $z_1 = z_2$.

Calculer la masse volumique de l'azote à la section 1.

$$\rho_1 = \frac{p_1}{rT_1} = \frac{83\,000}{297(273+30)} = 0{,}916 \text{ kg/m}^3 \text{ (ou utiliser } p_1/w_1 = rT_1/g)$$

Alors, $$\frac{V_2^2}{2} - \frac{(366)^2}{2} = \frac{1,40}{0,40}\left(\frac{83\,000}{0,9163}\right)\left[1 - \left(\frac{124}{83}\right)^{0,4/1,4}\right]$$ d'où $V_2 = 238$ m/s.

(*b*) Le nombre de Mach $= \dfrac{V_2}{c_2} = \dfrac{238}{\sqrt{krT_2}}$, où $\dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}$ ou $\dfrac{T_2}{303} = \left(\dfrac{124}{83}\right)^{2/7} = 1,123$.

Alors, $T_2 = 342$ K et le nombre de Mach $= \dfrac{238}{\sqrt{1,4 \times 297 \times 342}} = 0,632$.

12.29 Établir la formule théorique de l'écoulement par-dessus un déversoir à bords minces rectangulaire.

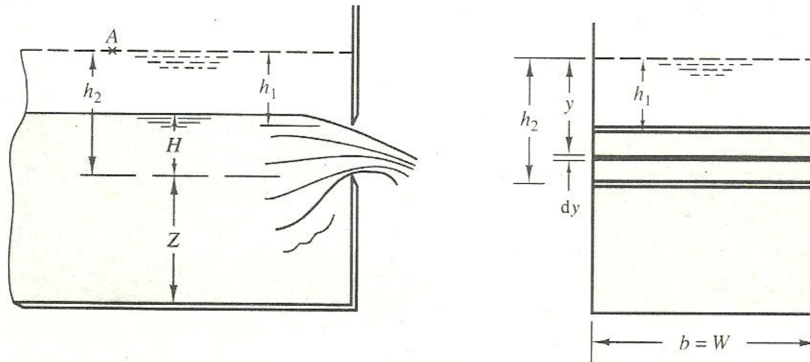


Fig. 12-7

Solution

Considérons que l'ouverture rectangulaire de la figure 12-7 s'étend sur toute la largeur W du canal ($b = W$). Quand la surface du liquide atteint le niveau représenté en pointillé, l'application du théorème de Bernoulli entre A et une bande élémentaire de hauteur dy dans le jet, donne, pour des conditions idéales,

$$(0 + V_A^2/2g + y) - \text{pas de pertes} = (0 + V_{\text{jet}}^2/2g + 0)$$

où V_A représente la vitesse moyenne des particules s'approchant de l'ouverture.

Ainsi la vitesse idéal $V_{\text{jet}} = \sqrt{2g(y + V_A^2/2g)}$

et le débit idéal $$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}AV_{\text{jet}} = (b\,\mathrm{d}y)V_{\text{jet}} = b\sqrt{2g}(y + V_A^2/2g)^{1/2}\,\mathrm{d}y$$

$$Q(\text{idéal}) = b\sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2}(y + V_A^2/2g)^{1/2}\,\mathrm{d}y$$

Un déversoir existe quand $h_1 = 0$. Écrivons H au lieu de h_2 et introduisons le coefficient de débit c pour obtenir le débit réel. Alors

$$\begin{aligned} Q &= cb\sqrt{2g}\int_0^H (y + V_A^2/2g)^{1/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}cb\sqrt{2g}[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \\ &= mb[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \end{aligned} \quad (1)$$

Notes

(*1*) Pour un déversoir rectangulaire entièrement contracté, les contractions des extrémités provoquent une réduction du débit. On corrige la longueur b pour tenir compte de cette condition, et la formule prend la forme :

$$Q = m\left(b - \frac{2}{10}H\right)[(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V^2 A/2g)^{3/2}] \tag{2}$$

(*2*) Pour des déversoirs hauts et pour la plupart des déversoirs contractés, la hauteur de vitesse d'approche est négligeable et

$$Q = m\left(b - \frac{2}{10}H\right)H^{3/2} \quad \text{pour des déversoirs contractés} \tag{3}$$

soit

$$Q = mbH^{3/2} \quad \text{pour des déversoirs non contractés} \tag{4}$$

(*3*) Le coefficient de débit n'est pas constant. Il tient compte de tous les phénomènes complexes dont on n'a pas tenu compte lorsqu'on a établi la formule, tels que la tension superficielle, la viscosité, la densité, la distribution de vitesse non uniforme, les écoulements secondaires, et sans doute d'autres encore.

12.30 Établir la formule théorique donnant le débit traversant un déversoir en forme d'encoche triangulaire. Se reporter à la figure 12-8.

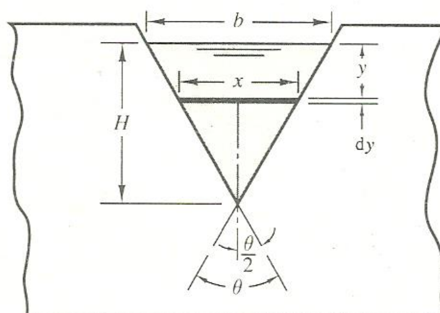


Fig. 12-8

Solution

D'après le problème 12.29 ci-dessus,

$$V'_{\text{jet}} = \sqrt{2g}(y + \text{négligeable } V^2/2g)$$

et

$$dQ \text{ (idéal)} = dA V_{\text{jet}} = x\, dy \sqrt{2gy}$$

Par les triangles semblables,

$$\frac{x}{b} = \frac{H-y}{H} \quad \text{et} \quad b = 2H \tan\frac{\theta}{2}$$

Alors le débit réel $Q = (b/H)c\sqrt{2g}\int_0^H (H-y)y^{1/2}\, dy$.

En intégrant et en reportant

$$Q = \frac{8}{15}c\sqrt{2g}H^{5/2}\tan\frac{1}{2}\theta \tag{1}$$

12.31 Au cours d'un essai effectué sur un *déversoir non contracté* de 914 mm de haut, la hauteur de charge a été maintenue constante à 305 mm. En 38,0 secondes, 28,73 m³ d'eau ont été collectés. Trouver la valeur du coefficient du déversoir dans les équations (*1*) et (*4*) du problème 12.29. On donne $b = 2{,}44$ m.

Solution

(*a*) Le débit en m^3/s : $Q = 28{,}73/38 = 0{,}756\ m^3/s$.

(*b*) Vérifier la vitesse d'approche

$$V = Q/A = 0{,}756/(2{,}44 \times 1{,}219) = 0{,}254\ m/s$$

Alors $$V^2/2g = (0{,}254)^2/2g = 0{,}003\ 28\ m.$$

(*c*) En utilisant (*1*), $Q = mb[(H + V^2/2g)^{3/2} - (V^2/2g)^{3/2}]$

où $$0{,}756 = m \times 2{,}44[(0{,}305 + 0{,}003\ 3)^{3/2} - (0{,}003\ 3)]^{3/2}$$

et $m = 1{,}81$.

En utilisant (*4*), $$Q = 0{,}756 = mbH^{3/2} = m \times 2{,}44 \times (0{,}305)^{3/2}$$

et $m = 1{,}84$ (environ 1,5 % plus fort en négligeant les termes relatifs à la vitesse d'approche).

12.32 Déterminer le débit d'eau s'écoulant par-dessus un déversoir sans contraction de 3,00 m de large et de 1,20 m de haut, sous une hauteur de charge de 0,914 m. La valeur de m est de 1,91.

Solution

Puisqu'on ne peut calculer le terme relatif à la hauteur dynamique, le débit approximatif est

$$Q = mbH^{3/2} = 1{,}91(3)(0{,}914)^{3/2} = 5{,}01\ m^3/s$$

Pour ce débit, $V = 5{,}01/(3 \times 2{,}114) = 0{,}790$ m/s et $V^2/2g = 0{,}032$ m. En appliquant l'équation (*1*) du problème 12.29

$$Q = 1{,}91(3)[(0{,}914 + 0{,}032)^{3/2} - (0{,}032)^{3/2}] = 5{,}24\ m^3/s$$

Ce deuxième calcul montre une augmentation de 0,23 m^3/s soit d'environ 4,6 % par rapport au premier. Des calculs plus poussés donnent en général une précision non garantie, c'est-à-dire allant au-delà de celle de la formule elle-même. Cependant, à titre d'illustration, la vitesse d'approche modifiée serait

$$V = 5{,}24/(3 \times 2{,}114) = 0{,}826\ m/s \quad \text{et} \quad V^2/2g = 0{,}035\ m$$

et $$Q = 1{,}91(3)[(0{,}914 + 0{,}035)^{3/2} - (0{,}035)^{3/2}] = 5{,}26\ m^3/s.$$

12.33 Un déversoir sans contraction, de 7,62 m de long, est destiné à débiter 10,6 m^3/s dans un canal. Le coefficient du déversoir $m = 1{,}85$. Quelle doit être la hauteur Z du déversoir (précision 1 cm), si l'eau qui se trouve derrière a une profondeur qui ne dépasse pas 1,83 m?

Solution

Vitesse d'approche $V = Q/A = 10{,}6/(7{,}62 \times 1{,}83) = 0{,}76$ m/s.

$$10 = 1{,}85 \times 7{,}62 \left[\left(H + \frac{(0{,}76)^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{(0{,}76)^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad \text{et} \quad H = 0{,}801\ m.$$

Hauteur du déversoir $Z = 1{,}830 - 0{,}801 = 1{,}029$ m.

12.34 Un déversoir contracté, de 1,25 m de haut, doit être construit sur un canal de 2,5 m de large. Le débit maximal passant par dessus le déversoir est de 1,70 m^3/s quand la profondeur totale à l'arrière du déversoir est de 2,00 m. Quelle longueur de déversoir doit-on prévoir si $m = 1{,}88$?

Solution

Vitesse d'approche $V = Q/A = 1{,}70(2{,}5 \times 2{,}00) = 0{,}340$ m/s. Il est clair que la hauteur dynamique est négligeable dans ce cas

$$Q = m\left(b - \frac{2}{10}H\right)(H)^{3/2} \quad \text{soit} \quad 1{,}70 = 1{,}88\left(b - \frac{2}{10} \times 0{,}75\right)(0{,}75)^{3/2} \quad \text{d'où} \quad b = 1{,}54 \text{ m.}$$

12.35 Le flot provenant d'un orifice à bord mince de 150 mm de diamètre, sous une charge de 3,05 m s'écoule dans le canal rectangulaire d'un déversoir contracté. Le canal a 1,83 m de large et, pour le déversoir, $Z = 1{,}50$ m et $b = 0{,}31$ m. Calculer la profondeur de l'eau dans le canal si $m = 1{,}82$ ($c = 0{,}600$).

Solution

Le débit traversant l'orifice est

$$Q = cA\sqrt{2gh} = 0{,}600 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2\sqrt{2g(3{,}05)} = 0{,}082 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pour le déversoir $\quad Q = m(b - \frac{2}{10}H)H^{3/2}$ (la hauteur dynamique étant négligée).

ou $\quad 0{,}82 = 1{,}82(0{,}31 - 0{,}20H)H^{3/2}$ et $0{,}31H^{3/2} - 0{,}20H^{5/2} = 0{,}045$.

Par essais successifs $H = 0{,}32$ m; et la profondeur $= Z + H = 1{,}50 + 0{,}32 = 1{,}82$ m.

12.36 Le débit d'eau par-dessus un déversoir triangulaire de 45° est de 0,021 2 m³/s. Pour $c = 0{,}580$, calculer la charge au déversoir.

Solution

$$Q = \frac{8}{15}c\sqrt{2g}(\tan \frac{1}{2}\theta)H^{5/2}, \quad 21{,}2 \times 10^{-3} = \frac{8}{15}(0{,}580)\sqrt{2g}(\tan 22{,}5°)H^{5/2} \quad \text{d'où} \quad H = 0{,}268 \text{ m.}$$

12.37 Établir l'équation de l'écoulement par dessus un déversoir à crête large, en supposant qu'il n'y a pas de perte de charge (fig. 12-9).

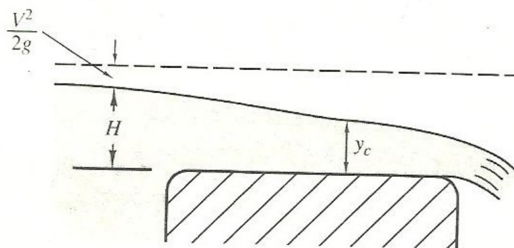


Fig. 12-9

Solution

À la section où l'écoulement est critique, $q = V_c y_c$. Mais $y_c = V_c^2/g = \frac{2}{3}E_c$, et $V_c = \sqrt{g(\frac{2}{3}E_c)}$. Ainsi la valeur théorique du débit q devient

$$q = \sqrt{g(\frac{2}{3}E_c)} \times \frac{2}{3}E_c$$

Cependant, la valeur de E_c est difficile à mesurer avec précision, parce que la profondeur critique est difficile à déterminer. L'équation utilisée dans la pratique s'écrit $q = CH^{3/2}$

On doit étalonner le déversoir sur place pour obtenir des résultats précis.

12.38 Trouver la formule applicable à une mesure du débit critique et l'illustrer par un exemple

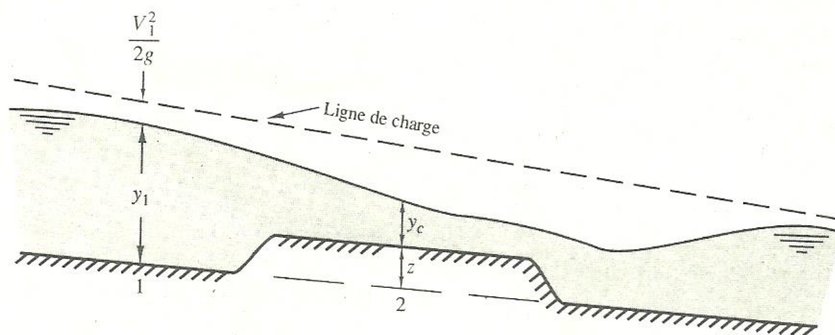


Fig. 12-10

Solution

Une excellente méthode de mesure du débit dans les canaux ouverts consiste à employer un relèvement (fig. 12-10). La mesure de la profondeur critique n'est pas nécessaire. On mesure la distance y_1, à faible distance en amont du relèvement, le plancher surélevé devrait avoir environ $3y_c$ de long et une hauteur telle que la vitesse de l'eau à son niveau soit la vitesse critique.

Pour un canal rectangulaire de largeur constante, on applique l'équation de Bernoulli entre la section 1 et 2, dans laquelle on prend pour la perte de charge due à l'accélération de l'écoulement, le dixième de la différence des hauteurs dynamiques, soit

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{10}\left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) = \left(y_c + \frac{V_c^2}{2g} + z\right)$$

laquelle équation ne prend pas en compte le léger abaissement du lit du canal entre 1 et 2. Se rappelant que $E_c = y_c + V_c^2/2g$, nous réarrangeons l'équation comme suit :

$$(y_1 + 1{,}10V_1^2/2g) = [z + 1{,}0E_c + \frac{1}{10}(\frac{1}{3}E_c)]$$

$$(y_1 - z + 1{,}10V_1^2/2g) = 1{,}033E_c = 1{,}033(\frac{3}{2}\sqrt[3]{q^2/g})$$

ou $$q = 1{,}62(y_1 - z + 1{,}10V_1^2/2g)^{3/2} \qquad (A)$$

Puisque $q = V_1 y_1$, $$q = 1{,}62(y_1 - z + 0{,}056\, q^2/y_1^2)^{3/2} \qquad (B)$$

Pour donner un exemple de l'emploi de l'expression (B), considérons un canal rectangulaire de 3,05 m de large avec un appareil à mesurer la profondeur critique ayant pour hauteur $z = 0{,}335$ m. Si la profondeur mesurée y_1 est de 0,738 m, quel est le débit Q?

Comme première approximation, ne tenons pas compte du dernier terme (B). Alors,

$$q = 1{,}62(0{,}738 - 0{,}335)^{3/2} = 0{,}415 \text{ m}^3/\text{s/m de large.}$$

À présent, utilisant l'équation (B) tout entière, par approximations successives, nous trouvons $q \approx 0{,}435$. Ainsi,

$$Q = 3{,}05q = 3{,}05(0{,}44) = 1{,}342 \text{ m}^3/\text{s}$$

12.39 Quelle doit être la longueur du déversoir trapézoïdal (de Cipolleti) qu'il faut construire pour que la charge soit de 0,47 m pour un débit de 3,45 m^3/s?

Solution

$$Q = 1{,}875bH^{3/2}; \quad 3{,}45 = 1{,}875b(0{,}47)^{3/2}; \quad b = 5{,}71 \text{ m}.$$

12.40 Établir la formule donnant le temps qu'il faut pour faire baisser le niveau du liquide d'un réservoir de section constante au moyen d'un orifice à bord mince. Se reporter à la figure 12-11.

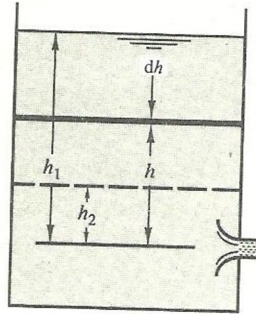


Fig. 12-11

Solution

Du fait que la hauteur de charge varie avec le temps, nous savons que $\partial V/\partial t \neq 0$, c'est-à-dire que le débit n'est pas constant. Cela signifie qu'il faut modifier l'équation de l'énergie pour y inclure un terme d'accélération, ce qui complique la solution matériellement. Aussi longtemps que la hauteur de charge ne varie pas trop rapidement, on ne commettra pas d'erreur appréciable en admettant que l'écoulement est permanent, négligeant ainsi le terme relatif à la hauteur d'accélération. On donnera dans le problème 12.41 une évaluation approximative de l'erreur commise.

Cas A. Dans les cas où *il n'y a pas de débit entrant*, le débit instantané est

$$Q = cA_0\sqrt{2gh} \text{ m}^3/\text{s}$$

Dans l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, le petit volume débité $\mathrm{d}V$ s'écrit $Q\,\mathrm{d}t$. Dans le même intervalle de temps, la hauteur de charge diminue de $\mathrm{d}h$ m et le volume débité est égal à la surface du réservoir A_T multipliée par $\mathrm{d}h$. En égalant ces valeurs, on obtient :

$$(cA_0\sqrt{2gh})\,\mathrm{d}t = -A_T\,\mathrm{d}h$$

où le signe négatif indique que h diminue quand t augmente. Résolvant en t, on obtient

$$t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \frac{-A_T}{cA_0\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2}\mathrm{d}h$$

ou

$$t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_0\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \qquad (1)$$

Quand on utilise cette expression, on peut se servir d'une valeur moyenne du coefficient de débit c sans commettre une erreur appréciable dans le résultat. Quand h_2 tend vers zéro, un tourbillon va se former, et l'orifice ne sera plus plein. Cependant, faire $h_2 = 0$ ne va pas produire d'erreur importante dans la plupart des cas.

L'équation (*1*) peut être réécrite en multipliant et en divisant par $(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})$. Il en résulte

$$t = t_2 - t_1 = \frac{A_T(h_1 - h_2)}{\frac{1}{2}(cA_0\sqrt{2gh_1} + cA_0\sqrt{2gh_2})} \qquad (2)$$

Notant que le volume débité pendant le temps $(t_2 - t_1)$ est $A_T(h_1 - h_2)$, cette équation se ramène à

$$t = t_2 - t_1 = \frac{\text{volume débité}}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)} = \frac{\text{volume débité en m}^3}{\text{débit moyen } Q \text{ en m}^3/\text{s}} \qquad (3)$$

Le problème 12.43 va illustrer un cas où la section du réservoir n'est pas constante mais peut s'exprimer en fonction de h. D'autres cas, tels que les vidanges de réservoir, dépassent les limites de cet ouvrage (consulter les ouvrages relatifs à la technologie des adductions d'eau).

Cas B. Lorsqu'il existe un débit entrant constant, inférieur au débit sortant de l'orifice,

$$-A_T\,\mathrm{d}h = (Q_{\text{sortie}} - Q_{\text{entrée}})\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad t = t_2 - t_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T\,\mathrm{d}h}{Q_{\text{sortie}} - Q_{\text{entrée}}}$$

Si $Q_{\text{entrée}}$ dépasse Q_{sortie}, la hauteur de la charge augmente, comme il fallait s'y attendre.

12.41 Un réservoir de 1 219 mm de diamètre contient de l'huile de densité 0,75. Un ajutage de 76 mm de diamètre est fixé près du fond du réservoir ($c = 0{,}85$). Combien de temps faut-il pour que le niveau passe de 1 829 mm à 1 219 mm au-dessus de l'ajutage?

Solution

$$t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_0\sqrt{2g}}(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) = \frac{2 \times \frac{1}{4}\pi(1{,}219)^2}{0{,}85 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}076)^2\sqrt{2g}}(1{,}829^{1/2} - 1{,}219^{1/2}) = 33{,}8 \text{ s.}$$

Pour calculer l'effet approché de l'hypothèse faite d'un débit régulier, on peut calculer la variation de la vitesse avec le temps t : elle vaut

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2g(1{,}829)} - \sqrt{2g(1{,}219)}}{33{,}8} = 0{,}032 \text{ m/s}^2$$

Ce qui est à peu près $\frac{1}{3}$% de l'accélération g, un accroissement négligeable de l'accélération g. Une telle précision n'est pas garantie dans les exemples d'écoulement irrégulier, d'autant plus que les coefficients de l'orifice ne sont pas connus avec une telle précision.

12.42 La hauteur de charge initiale d'un orifice était de 2,74 m et à la fin de l'écoulement, la hauteur de charge mesurée ne valait plus que 1,22 m. Sous quelle hauteur de charge constante H, le même orifice déverserait le même volume d'eau pendant le même intervalle de temps? On admettra que le coefficient c est constant.

Solution

$$\text{volume sous charge variable} = \text{volume sous charge constante}$$

$$\frac{1}{2}cA_0\sqrt{2g}(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})t = cA_0\sqrt{2gH}\;t$$

En reportant et en résolvant, on obtient

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2{,}74} + \sqrt{1{,}22}) = \sqrt{H} \quad \text{et} \quad H = 1{,}904 \text{ m.}$$

12.43 Un réservoir a la forme d'un tronc de cône, de 2,44 m de diamètre supérieur et de 1,22 m de diamètre inférieur. Au fond est ménagé un orifice à bord mince dont le coefficient de débit moyen peut être pris égal à 0,60. Quelle est la taille d'un orifice permettant de vider le réservoir en 6 minutes si la profondeur quand il est plein est de 3,05 m? Se reporter à la figure 12-12.

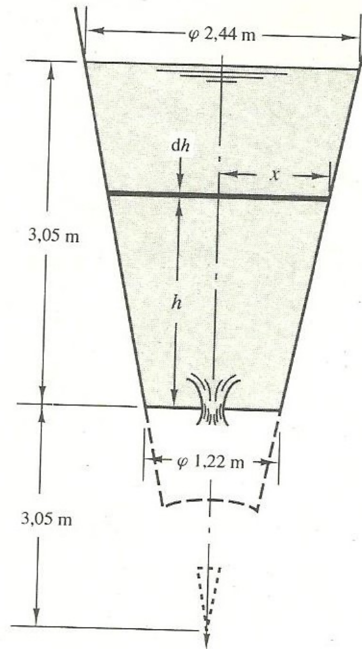


Fig. 12-12

Solution

D'après le problème 12.38,

$$Q\,\mathrm{d}t = -A_t\,\mathrm{d}h$$
$$cA_0\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -\pi x^2\,\mathrm{d}h$$

et, par les triangles semblables, $x/1{,}22 = (3{,}05 + h)/6{,}10$. Alors,

$$\left(0{,}60 \times \frac{1}{4}\pi d_0^2\sqrt{2g}\right)\mathrm{d}t = -\pi\frac{(3{,}05+h)^2}{25}h^{-1/2}\,\mathrm{d}h$$
$$d_0^2\int \mathrm{d}t = \frac{-4\pi}{25\pi \times 0{,}60\sqrt{2g}}\int_{3{,}05}^{0}(3{,}05+h)^2h^{-1/2}\,\mathrm{d}h$$

Puisque $\int \mathrm{d}t = 360$ secondes,

$$d_0^2 = \frac{+4}{360 \times 25 \times 0{,}60\sqrt{2g}}\int_0^{3{,}05}(9{,}302\,h^{-1/2} + 6{,}10\,h^{1/2} + h^{3/2})\mathrm{d}h$$

En intégrant et résolvant, nous obtenons $d^2 = 0{,}010$ et $d = 0{,}10$ m. On utilisera un orifice de $d = 100$ mm.

12.44 Deux réservoirs rectangulaires ont une paroi commune où un orifice de surface 230 cm² et de coefficient 0,80 a été aménagé. Le réservoir A a 2,44 m de côté, et la profondeur initiale au-dessus de l'orifice est 3,05 m. Le réservoir B a 1,22 m de côté et la profondeur initiale au-dessus de l'orifice est de 0,915 m. Combien faudra-t-il de temps pour que l'eau soit au même niveau des deux côtés?

Solution

À tout instant on peut prendre pour hauteur de charge la différence de niveau des deux surfaces h. Alors

$$Q = 0{,}80 \times 0{,}023\sqrt{2gh}$$

et la variation du volume $\mathrm{d}v = Q\,\mathrm{d}t = 0{,}081\,4\sqrt{h}\,\mathrm{d}t$.

Dans cet intervalle de temps $\mathrm{d}t$, la variation de la hauteur de charge est $\mathrm{d}h$. Considérons que le niveau du réservoir A est tombé de $\mathrm{d}y$; alors la montée correspondante du niveau du réservoir B est égale au produit du rapport des surfaces par $\mathrm{d}y$, soit $(2{,}44/1{,}22)^2\,\mathrm{d}y$. La variation de la hauteur de charge est ainsi :

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}y + (4)\mathrm{d}y = 5\mathrm{d}y$$

La variation du volume est $\mathrm{d}v = 2{,}44 \times 2{,}44 \times \mathrm{d}y$ $[= 1{,}22 \times 1{,}22 \times (4)\mathrm{d}y$ aussi$]$

ou, en utilisant $\mathrm{d}h$,
$$\mathrm{d}v = [(2{,}44)^2/5]\mathrm{d}h = 1{,}191\ \mathrm{d}h$$

En égalant les valeurs de $\mathrm{d}v$, $0{,}081\,5\sqrt{h}\,\mathrm{d}t = -1{,}191\ \mathrm{d}h$, $\mathrm{d}t = \dfrac{-1{,}191}{0{,}081\,5}\displaystyle\int_{2{,}135}^{0} h^{-1/2}\,\mathrm{d}h$, d'où $t = 42{,}7$ s.

On peut aussi résoudre le problème en utilisant la vitesse moyenne d'écoulement exprimée dans (3) du problème 12.40

$$Q_\mathrm{m} = \frac{1}{2}[0{,}80 \times 0{,}023\sqrt{2g(2{,}135)}] = 0{,}056\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Le réservoir A baisse de y mètres tandis que le réservoir B monte de $(4)y$ mètres, avec une variation totale du niveau de 2,135 m. Alors $y + 4y = 2{,}135$ et $y = 0{,}427$ m. Ainsi la variation de volume $= 2{,}44 \times 2{,}44 \times 0{,}427 = 2{,}54\ \mathrm{m}^3$ et

$$t = \frac{\text{variation de volume}}{\text{Q moyen}} = \frac{2{,}54}{0{,}056} = 45{,}3\ \text{s.}$$

12.45 Établir l'expression du temps nécessaire à abaisser le niveau du liquide d'un réservoir, d'une écluse ou canal, au moyen d'un déversoir sans contractions.

Solution

$$Q\,\mathrm{d}t = -A_r\,\mathrm{d}H \text{ (comme avant)} \quad \text{ou} \quad (mLH^{3/2})\,\mathrm{d}t = -A_T\,\mathrm{d}H.$$

Alors, $t = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \frac{-A_T}{mL}\int_{H_1}^{H_2} H^{-3/2}\,\mathrm{d}H$ ou $t = t_2 - t_1 = \dfrac{2A_T}{mL}(H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2})$.

12.46 Un canal rectangulaire de 15,25 m de long et de 3,0 m de large, alimente un *déversoir sans contractions* avec une charge de 0,300 m. Si on coupe l'alimentation du canal, au bout de combien de temps la hauteur de charge du déversoir sera-t-elle de 100 mm? Utiliser $m = 1{,}84$.

Solution

D'après le problème 12.45

$$t = \frac{2(15{,}25 \times 3)}{1{,}84 \times 3}\left[\frac{1}{\sqrt{0{,}100}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}300}}\right] = 22{,}2\ \text{s.}$$

12.47 Calculer le temps nécessaire pour établir l'écoulement dans un tuyau de longueur L sous une hauteur de charge constante H, déversant son contenu dans l'atmosphère, en admettant que le tuyau n'est pas élastique, que le fluide est incompressible, et que le coefficient de frottement f est constant.

Solution

La vitesse finale V_f peut se calculer d'après l'équation de Bernoulli comme suit :

$$H - f\,\frac{L}{d}\,\frac{V_f^2}{2g} - k\,\frac{V_f^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_f^2}{2g} + 0\right)$$

Dans cette équation, les pertes mineures sont représentées par le terme $kV_f^2/2g$, et l'énergie du jet à l'extrémité du tuyau est l'énergie cinétique représentée par $V_f^2/2g$. On peut écrire cette équation sous la forme

$$\left[H - f\,\frac{L_E}{d}\,\frac{V_f^2}{2g}\right] = 0 \qquad (1)$$

où L_E est le tuyau de longueur équivalente pour ce système (voir le problème 9.3, chapitre 9).

D'après l'équation du mouvement de Newton, à tout instant,

$$w(AH_c) = M\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (\rho AL)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

où H_e est la hauteur de charge effective à tout instant et V une fonction du temps et non de la longueur. Réarrangeons cette équation :

$$\mathrm{d}t = \left(\frac{wAL}{gwAH_e}\right)\mathrm{d}V \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}t = \frac{L\,\mathrm{d}V}{gH_e}. \qquad (2)$$

Dans l'équation *(1)*, pour toutes les valeurs intermédiaires de V le terme entre parenthèses n'est pas nul, mais est égal à la hauteur de charge disponible pour provoquer l'accélération du liquide. Ainsi l'expression *(2)* peut s'écrire

$$\int \mathrm{d}t = \int \frac{L\,\mathrm{d}V}{g\left(H - f\,\frac{L_E}{d}\,\frac{V^2}{2g}\right)} = \int \frac{L\,\mathrm{d}V}{g\left(f\,\frac{L_E}{d}\,\frac{V_f^2}{2g} - f\,\frac{L_E}{d}\,\frac{V^2}{2g}\right)} \qquad (3A)$$

Puisque d'après *(1)*, $\dfrac{fL_E}{2gd} = \dfrac{H}{V_f^2}$

$$\int \mathrm{d}t = \int \frac{L\,\mathrm{d}V}{g(H - HV^2/V_f^2)} \qquad (3B)$$

ou

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \frac{L}{gH}\int_0^{V_f} \frac{V_f^2}{V_f^2 - V^2}\,\mathrm{d}V$$

En intégrant, on a

$$t = \frac{LV_f}{2gH}\,\ln\left(\frac{V_f + V}{V_f - V}\right). \qquad (4)$$

On notera que quand V tend vers la vitesse finale V_f, $(V_f - V)$ tend vers zéro. Ainsi mathématiquement, le temps t tend vers l'infini.

On peut réarranger l'équation *(3B)*, en utilisant le symbole ϕ pour le rapport V/V_f. Alors

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{gH}{L}(1 - V^2/V_f^2) = \frac{gH}{L}(1 - \phi^2) \qquad (5)$$

En utilisant $V = V_f\phi$ et $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V_f(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)$ nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{1 - \phi^2} = \frac{gH\,\mathrm{d}t}{V_fL}$$

En intégrant

$$\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1 + \phi}{1 - \phi}\right) = \frac{gHt}{V_fL} + C$$

et quand $t = 0$, $C = 0$. Alors

$$\frac{1+\phi}{1-\phi} = e^{2gHt/V_f L}.$$

En utilisant les fonctions hyperboliques, $\phi = \tanh(gHt/V_f L)$, et puisque $\phi = V/V_f$,

$$V = V_f \tanh \frac{gH_t}{V_f L} \qquad (6)$$

L'avantage de l'expression (*6*) est que la valeur de la vitesse V en fonction de la vitesse finale V_f peut être calculée pour n'importe quel temps.

12.48 Simplifier l'équation (*4*) du problème précédent, pour qu'elle donne le temps nécessaire à l'établissement du courant de telle sorte que la vitesse V soit égale (*a*) à 0,75, (*b*) à 0,90 et (*c*) à 0,99 fois la vitesse finale V_f.

Solution

(*a*) $$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln\left[\frac{V_f + 0{,}75V_f}{V_f - 0{,}75V_f}\right] = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right) \ln \frac{1{,}75}{0{,}25} = 0{,}973\frac{LV_f}{gH}$$

(*b*) $$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \frac{1{,}90}{0{,}10} = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right) \ln \frac{1{,}90}{0{,}10} = 1{,}472\, \frac{LV_f}{gH}$$

(*c*) $$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \frac{1{,}99}{0{,}01} = \left(\frac{LV_f}{2gH}\right) \ln \frac{1{,}99}{0{,}01} = 2{,}647\, \frac{LV_f}{gH}$$

12.49 De l'eau est déversée d'un réservoir par 610 m de tuyau de 305 mm ($f = 0{,}020$). La hauteur de charge est constante et vaut 6,1 m. Des vannes et connexions sur la ligne produisent des pertes de $21(V^2/2g)$. Après l'ouverture de la vanne, combien faudra-t-il de temps pour atteindre une vitesse égale à 0,90 fois la vitesse finale?

Solution

L'équation de Bernoulli appliquée entre la surface du réservoir et l'extrémité du tuyau, donne

$$(0 + 0 + H) - [f(L/d) + 21{,}0]V^2/2g = (0 + V^2/2g + 0)$$

soit $H = [0{,}020(610/0{,}305) + 22{,}0]V^2/2g = 62{,}0(V^2/2g)$. Alors en utilisant la solution du problème 9.3 du chapitre 9, on obtient

$$62{,}0(V^2/2g) = 0{,}020(L_E/0{,}305)(V^2/2g) \quad \text{soit} \quad L_E = 945{,}5 \text{ m}.$$

Puisque l'équation (*4*) du problème 12.47 ne contient pas L_E, on doit calculer la vitesse finale comme suit :

$$H = f\,\frac{L_E}{d}\,\frac{V_f^2}{2g} \quad \text{ou} \quad V_f = \sqrt{\frac{2gdH}{fL_E}} = \sqrt{\frac{2(9{,}81)(0{,}305)(6{,}1)}{0{,}020(945{,}5)}} = 1{,}39 \text{ m/s}$$

En reportant dans (*b*) du problème 12.48, on obtient $t = 1{,}472\dfrac{(610)(1{,}39)}{(9{,}81)(6{,}1)} = 20{,}8$ s.

12.50 Dans le problème 12.49, quelle sera la vitesse atteinte au bout de 10 secondes? au bout de 15 secondes?

Solution

Dans l'équation (6) du problème 12.47, calculer gHt/V_fL.

$$\text{Pour 10 s} \quad \frac{9{,}81 \times 6{,}1 \times 10}{1{,}39 \times 610} = 0{,}707. \qquad \text{Pour 15 s} \quad \frac{9{,}81 \times 6{,}1 \times 15}{1{,}39 \times 610} = 1{,}062.$$

En utilisant une table des fonctions hyperboliques et l'équation (6), $V = V_f \tanh gHT/V_fL$, nous obtenons :

– pour 10 s $\quad V = 1{,}39 \tanh 0{,}707 = 1{,}39 \times 0{,}608\,8 = 0{,}846$ m/s

– pour 15 s $\quad V = 1{,}39 \tanh 1{,}062 = 1{,}39 \times 0{,}786\,4 = 1{,}093$ m/s

On notera que la valeur V/V_f est représentée par la valeur de la tangente hyperbolique. Dans la solution ci-dessus, 61 % et 79 % de la vitesse finale sont atteints respectivement en 10 et 15 secondes.

12.51 Un canal rectangulaire, de 6,1 m de large, $n = 0{,}025$, est rempli d'eau sur une profondeur de 1,53 m et a une pente de 14,75 m sur 10 000 m. Un déversoir sans contractions C de 0,75 m de haut ferme le canal ($m = 1{,}92$). Prenant pour cote du fond du canal juste en amont du déversoir 100,00 estimer (en n'utilisant qu'un tronçon) la cote de la surface de l'eau en un point A, 305 m en amont du déversoir.

Solution

Calculer la nouvelle cote de la surface de l'eau en B dans la figure 12-13 (avant le déversement). Notons que l'écoulement n'est pas uniforme puisque les profondeurs, les vitesses et les aires ne sont pas constantes à partir du moment où on a installé le déversoir.

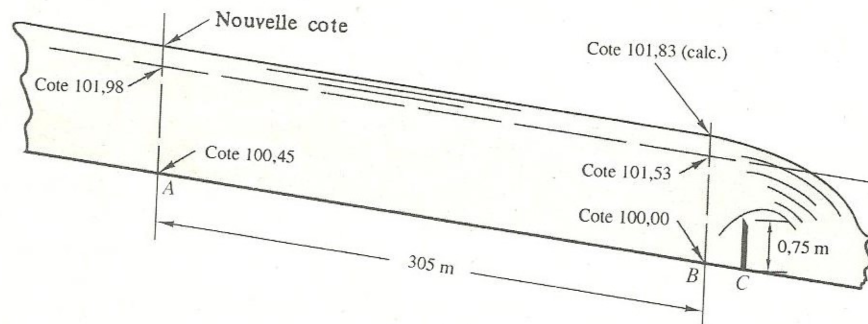


Fig. 12-13

$$Q = (6{,}1 \times 1{,}53)(1/0{,}025)(9{,}33/9{,}16)^{2/3}(0{,}001\,475)^{1/2} = 14{,}51 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pour une profondeur estimée à 1,83 m juste en amont du déversoir.

$$\text{Vitesse d'approche } V = Q/A = 14{,}51/(6{,}1 \times 1{,}83) = 1{,}30 \text{ m/s}$$

La formule du déversoir donne $14{,}51 = 1{,}92 \times 6{,}1 \left[\left(H + \frac{(1{,}30)^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{(1{,}30)^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$. Alors,

$$(H + 0{,}086)^{3/2} = 1{,}239 + 0{,}025 = 1{,}264 \text{ et } H = 1{,}083 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur } Z = 0{,}750 \text{ m}$$

$$\text{Profondeur } y = 1{,}833 \text{ m} \quad \text{(hypothèse vérifiée)}$$

La nouvelle cote en A doit se situer entre 101,98 et 102,28. Essayant la cote de 102,13 (et en la vérifiant à l'aide de l'équation de Bernoulli),

La nouvelle aire $A = 6{,}1(102{,}13 - 100{,}45) = 10{,}248 \text{ m}^2$, et $V = 14{,}51/10{,}248 = 1{,}416$ m/s.

La vitesse moyenne $= \frac{1}{2}(1,30 + 1,416) = 1,358$ m/s

Le rayon hydraulique moyen $R = \frac{1}{2}(11,163 + 10,248)/[\frac{1}{2}(9,76 + 9,46)] = 1,114$ m

$$\text{La perte de charge } h_L = \left(\frac{Vn}{R^{2/3}}\right)^2 L = \left(\frac{1,358 \times 0,025}{(1,114)^{2/3}}\right)^2 305 = 0,304 \text{ m}$$

Appliquant alors l'équation de Bernoulli, entre A et B, avec niveau de référence B,

$$[102,13 + (1,416)^2/2g] - 0,304 = [101,83 + (1,30)^2/2g]$$

qui se ramène à

$$101,92 = 101,91 \text{ (approximativement).}$$

La différence de 0,01 m est à l'intérieur de la marge d'erreur commise sur le facteur de rugosité n seul. Une précision plus grande ne semble donc pas justifiée. Prendre la cote 102,13 m.

Problèmes supplémentaires

12.52 De la térébenthine à 20 °C s'écoule dans un tuyau au centre duquel on a fixé un tube de Pitot avec prise en paroi ayant un coefficient de 0,97. Le manomètre différentiel au mercure indique une dénivellation de 102 mm. Quelle est la vitesse au centre? *Rép.* 5,27 m/s.

12.53 De l'air à 49 °C circule le long d'un tube de Pitot avec prise en paroi à la vitesse de 18,3 m/s. Si le coefficient du tube est 0,95, quelle indication doit-on attendre sur le manomètre à eau, en admettant que le poids spécifique de l'air est constant à la pression atmosphérique? *Rép.* 20,7 mm.

12.54 La perte de charge à travers un orifice à bord mince de 50,8 mm de diamètre sous une certaine hauteur de charge est de 0,165 m et la vitesse de l'eau dans le jet est de 6,86 m/s. Si le coefficient de débit est de 0,61, calculer la hauteur de charge provoquant l'écoulement, le diamètre du jet et le coefficient de vitesse. *Rép.* 2,56 m; 40,4 mm; 0,97.

12.55 Quelle est la taille d'un orifice normalisé permettant de déverser 0,016 m^3/s d'eau sous une hauteur de charge de 8,69 m? *Rép.* 50 mm.

12.56 Un orifice à bords minces a un diamètre de 25,4 mm et des coefficients de vitesse et de contraction respectivement égaux à 0,98 et 0,62. Si le jet tombe de 939 mm sur une distance horizontale de 2,496 mm, calculer le débit en m^3/s et la hauteur de charge à l'orifice. *Rép.* $1,79 \times 10^{-3}$ m^3/s, 1,725 m.

12.57 De l'huile de densité 0,800 s'écoule d'un déversoir fermé par un orifice de 75 mm de diamètre à raison de 0,026 m^3/s. Le diamètre du jet est de 58,5 mm. Le niveau de l'huile est à 7,47 m au-dessus de l'orifice et la pression de l'air équivaut à -152 mm de mercure. Calculer les trois coefficients de l'orifice. *Rép.* 0,580; 0,590; 0,982.

12.58 Se reporter à la figure 12-14. Un orifice de 76,2 mm de diamètre a pour coefficients respectifs de vitesse et de contraction 0,950 et 0,632. Calculer : (*a*) le débit pour la dénivellation du mercure indiquée et (*b*) la puissance du jet. *Rép.* 0,029 4 m^3/s, $-1,54$ kW.

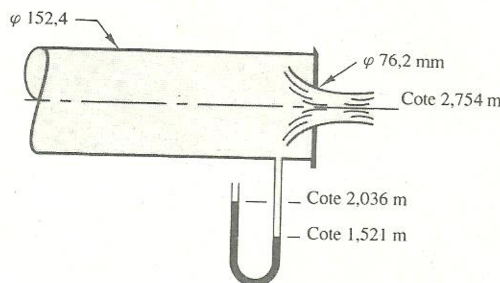


Fig. 12-14

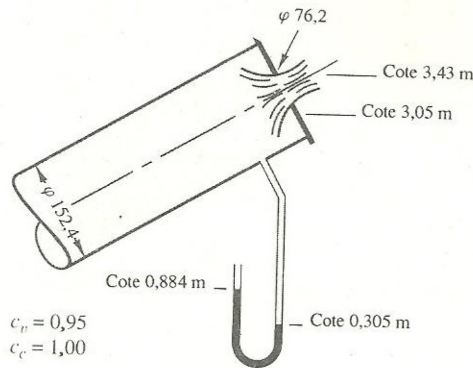


Fig. 12-15

12.59 Se reporter à la figure 12-15. Du fuel-oil lourd à 15,6 °C s'écoule par un orifice de 76,2 mm de diamètre situé au bout du tuyau, provoquant une déviation du mercure dans le manomètre en U. Calculer la puissance du jet. *Rép.* 2,16 kW.

12.60 Les locomotives à vapeur s'alimentent parfois en eau par l'intermédiaire d'une cuillère qui trempe dans un long canal étroit entre les rails. Si la hauteur du réservoir est de 2,74 m, à quelle vitesse doit se déplacer le train en km/h (en négligeant les frottements)? *Rép.* 26,4 km/h.

12.61 De l'air à 15,5 °C circule dans un vaste conduit puis dans une ouverture de 75 mm de diamètre ménagée dans le métal mince ($c = 0,62$). Un manomètre en U contenant de l'eau enregistre 31,7 mm. En considérant que la masse volumique de l'air est constante, quel est le débit traversant l'ouverture en kg/mn? *Rép.* 4,7 kg/mn.

12.62 De l'huile de densité 0,926 et de viscosité 350 secondes Saybolt traverse un orifice de 76,2 mm de diamètre ménagé dans un tuyau de 127 mm de diamètre. Le manomètre différentiel enregistre une chute de pression de 148,24 kPa. Calculer Q. *Rép.* 0,054 6 m^3/s.

12.63 Une buse avec une pointe de 50 mm de diamètre est fixée à l'extrémité d'un tuyau horizontal de 2 000 mm. Les coefficients de vitesse et de contraction sont respectivement de 0,976 et 0,909. Un manomètre à pression fixé à l'entrée de la buse et situé à 2,16 m au-dessus de son axe indique 221 kPa. Calculer le débit d'eau en m^3/s. *Rép.* 0,040 m^3/s.

12.64 Quand le débit d'eau à travers un tube de Venturi horizontal de 300 mm × 150 mm ($c = 0,95$) est de 0,111 m^3/s, calculer la dénivellation du mercure dans le manomètre différentiel qui est fixé au Venturi. *Rép.* 157 mm.

12.65 Quand 0,119 m^3/s d'eau s'écoulent par un tube de Venturi de 306 mm × 153 mm, le manomètre différentiel enregistre une différence de hauteurs de pression de 2,195 m. Quel est le coefficient de débit de l'appareil? *Rép.* 0,964.

12.66 La perte de charge entre l'entrée et le col d'un tube de Venturi de 250 mm × 125 mm est le 1/16 de la hauteur de vitesse au col. Quand le mercure du manomètre différentiel fixé à l'appareil subit une dénivellation de 102 mm, quel est le débit d'eau indiqué? *Rép.* 0,063 m^3/s.

12.67 Un tube de Venturi de 300 mm × 150 mm ($c = 0,985$) transporte 0,056 6 m^3/s d'eau avec une indication du manomètre différentiel de 634 mm. Quelle est la densité du liquide manométrique? *Rép.* 1,75.

12.68 Du méthane s'écoule à raison de 7,48 kg/s par un tube de Venturi de 306 mm × 153 mm à la température de 15,6 °C. La pression à l'entrée dans l'appareil est de 341,4 kPa absolus. Utilisant $k = 1,31$, $r = 519\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, $\nu = 1,8 \times 10^{-5}$ m^2/s à 1 atmosphère et $\rho = 0,666$ kg/m^3 à 20 °C et 1 atmosphère, calculer la dénivellation du mercure dans le manomètre différentiel à laquelle on doit s'attendre. *Rép.* 0,314 m.

12.69 De l'eau s'écoule par un tuyau de 150 mm sur lequel on a fixé une buse à mesurer le débit de long rayon de 75 mm de diamètre. Pour une dénivellation de 152 mm de mercure dans le manomètre différentiel, calculer le débit en m^3/s. (Prendre $c = 0,98$ d'après le diagramme D) *Rép.* 0,028 m^3/s.

12.70 De l'eau à 30 °C circule à raison de 0,046 m^3/s dans la buse du problème 12.69. Quelle est la denivellation du mercure du manomètre différentiel? (Utiliser le diagramme D). *Rép.* 393 mm.

12.71 Si de l'huile qui rend imperméable à la poussière à 30 °C avait circulé avec un débit de 0,046 m^3/s (dans le problème 12.70), quelle aurait été la dénivellation du mercure? *Rép.* 372 mm.

12.72 Si de l'air à 20 °C circule dans les mêmes tuyaux et buse (problème 12.59) quel serait le débit pondéral d'air si les pressions absolues dans le tuyau et le jet étaient respectivement de 207 kPa et 172 kPa? *Rép.* 17 N/s.

12.73 Quelle doit être la profondeur de l'eau à 1,52 m d'un déversoir sans contraction rectangulaire de 1,52 m de long et de 1,22 m de haut si le débit de l'eau qui passe par-dessus est de 0,283 m^3/s? (Utiliser la formule de Francis.) *Rép.* 1,44 m.

12.74 Un débit de 0,85 m^3/s se produit dans un canal de 1,22 m de profondeur et 1,83 m de largeur. Calculer la hauteur à laquelle il faut placer la crête d'un déversoir à crête aiguë, sans contractions, pour que l'eau ne déborde pas sur les côtés du canal, ($m = 1{,}85$). *Rép.* 0,83 m.

12.75 Un débit de 10,9 m^3/s passe dans un déversoir sans contraction de 4,88 m de long. La profondeur totale en amont du déversoir ne doit pas dépasser 2,44 m. Calculer la hauteur à laquelle on doit placer la crête pour permettre ce débit ($m = 1{,}85$). *Rép.* 1,34 m.

12.76 Un déversoir sans contractions ($m = 1{,}85$) sous une charge constante de 91,44 mm alimente un réservoir muni d'un orifice de 76,2 mm de diamètre. Le déversoir qui a 609,6 mm de long et 823 mm de haut, est placé sur un canal rectangulaire. La perte de charge à travers l'orifice est de 609,6 mm et $c_c = 0{,}65$. Calculer la hauteur de charge à laquelle va monter l'eau dans le réservoir et le coefficient de vitesse de l'orifice. *Rép.* $h = 6{,}19$ m; $c_v = 0{,}95$.

12.77 Un déversoir contracté de 1,22 m de long est placé sur un canal rectangulaire de 2,74 m de large. La hauteur de la crête du déversoir est de 1,00 m et la hauteur de charge de 381 mm. Calculer le débit, prendre $m = 1{,}88$ *Rép.* 0,504 m^3/s.

12.78 Un déversoir triangulaire a une encoche de 90°. Quelle est la hauteur de charge donnant un débit de 0,076 m^3/s ($m = 1{,}39$)? *Rép.* 0,313 m.

12.79 Un tuyau de 915 mm contenant un tube de Venturi de 915 mm × 305 mm, alimente en eau un canal rectangulaire. La pression à l'entrée du tube de Venturi est de 207 kPa et au col de 59,8 kPa. Un déversoir sans contraction ($m = 1{,}85$) de 915 mm de haut, placé sur le canal débite sous une charge de 229 mm. Quelle est la largeur probable du canal? *Rép.* 6 096 mm.

12.80 De l'eau s'écoule par dessus un déversoir sans contraction ($m = 1{,}85$) qui a 3,66 m de long et 0,610 m de haut. Pour une hauteur de charge de 0,366, calculer le débit en m^3/s. *Rép.* 1,54 m^3/s.

12.81 Un réservoir de 3 658 mm de long et de 1 220 mm de large, contient 1 220 mm d'eau. Combien de temps faudra-t-il pour que l'eau baisse jusqu'à 305 mm si on ouvre un orifice de 76,2 mm de diamètre ($c = 0{,}60$) dans le fond du réservoir? *Rép.* 406 s.

12.82 Un réservoir rectangulaire de 4,88 m par 1,22 m contient 1,22 m d'huile de densité 0,75. S'il faut 10 minutes et 10 secondes pour vider le réservoir par un orifice de 100 mm de diamètre ménagé dans le fond, calculer la valeur moyenne du coefficient du débit. *Rép.* 0,60.

12.83 Dans le problème 12.82, pour un coefficient de débit de 0,60, quelle sera la profondeur après que le réservoir se soit vidé par l'orifice pendant 5 minutes? *Rép.* 0,314 m.

12.84 Un réservoir de section droite en forme de trapèze a une longueur constante de 1 524 mm. Quand l'eau a une profondeur de 2 438 mm au-dessus de l'orifice de 50,8 mm de diamètre ($c = 0{,}65$), la largeur de la surface de l'eau est de 1 830 mm, et a une profondeur de 915 mm elle est de 1 220 mm. Quel temps faudra-il pour que le niveau s'abaisse de 2 438 mm à 915 mm? *Rép.* 482 s.

12.85 Un déversoir sans contraction est situé à l'extrémité d'un réservoir carré de 3,05 m de côté. Si la hauteur de charge initiale appliquée au déversoir est de 610 mm, combien de temps faudra-t-il pour que les 3,54 m^3 d'eau sortent du réservoir ($m = 1{,}85$)? *Rép.* 2,68 s.

12.86 Un canal rectangulaire de 18,29 m de long par 3,05 m de large se vide par dessus un déversoir sans contraction de 3,05 m de long sous une charge de 305 mm. Si l'alimentation est brusquement coupée, quelle sera la charge appliquée au déversoir au bout de 36 secondes ($m = 1{,}85$)? *Rép.* 76,2 mm.

12.87 Deux orifices, sur le côté d'un réservoir, sont situés l'un sous l'autre verticalement à 1,83 m de distance. La profondeur totale de l'eau dans le réservoir est de 4,27 m et la hauteur de charge appliquée à l'orifice supérieur est de 1,22 m. Pour la même valeur de c_v, démontrer que les jets vont frapper le plan horizontal sur lequel le réservoir repose au même point.

12.88 Un orifice de 1,524 mm de diamètre vide 0,34 m^3/s d'eau sous une hauteur de charge de 43,89 m. Cette eau s'écoule dans un canal rectangulaire de 3,658 mm de largeur et de 915 mm de profondeur, et ensuite elle coule par dessus un déversoir contracté. La hauteur de charge appliquée au déversoir est de 305 mm. Quelle est la longueur du barrage et le coefficient de l'orifice? *Rép.* 1 158 mm; $c = 0{,}635$.

12.89 La hauteur de charge appliquée à un déversoir sans contraction G, qui a 3,66 m de long, est de 337 mm et la vitesse d'approche peut être négligée. Pour le système représenté dans la figure 12-16, quelle est la hauteur de pression en B? Tracer les lignes piézométriques. *Rép.* 58,9 m.

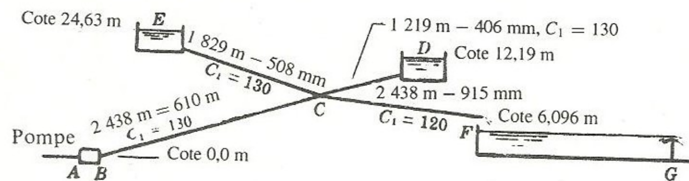


Fig. 12-16

12.90 Dans la figure 12-17, le niveau de la ligne piézométrique en B est de 15,24 et les tuyaux BC et BD sont disposés de manière que le débit de B se partage également. Quel est le niveau de l'extrémité du tuyau en D, et quelle est la hauteur de charge appliquée à l'orifice E de 101,6 mm de diamètre? *Rép.* cote 7,254 m $h = 6{,}86$ m.

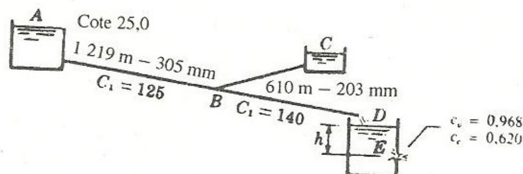


Fig. 12-17

12.91 Pour le réservoir représenté sur la figure 12-18 en utilisant un coefficient de débit moyen de 0,65 pour l'orifice de 50,8 mm de diamètre, combien faudra-t-il de temps pour abaisser le niveau de 1 219 mm? *Rép.* 390 s.

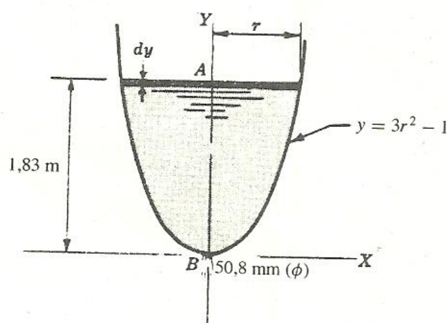


Fig. 12-18

12.92 Un déversoir à large crête se trouve à 381 mm au-dessus du fond d'un canal rectangulaire de 3,05 m de large. La hauteur de charge au-dessus de la crête du déversoir est de 594 mm. Déterminer approximativement l'écoulement dans le canal (utiliser $c = 0{,}92$). *Rép.* 2,36 m^3/s.

Chapitre 13

Forces exercées par les fluides en mouvement

INTRODUCTION

La connaissance des forces exercées par les fluides en mouvement est d'une importance considérable dans l'analyse et la conception d'objets tels que les pompes, les turbines, les avions, les fusées, les hélices, les bateaux, les carrosseries d'automobiles, les édifices et quantité de dispositifs hydrauliques. L'équation de la conservation de l'énergie n'est pas suffisante pour résoudre la plupart de ces problèmes. Cet outil supplémentaire de la mécanique que constitue le principe de la conservation de la quantité de mouvement prend une importance primordiale. La théorie de la couche limite fournit une base supplémentaire à l'analyse. Des expériences très nombreuses, et qui se perpétuent de nos jours, ajoutent de nouvelles données en ce qui concerne les lois de variation des coefficients fondamentaux.

LE PRINCIPE DE L'IMPULSION – QUANTITÉ DE MOUVEMENT de la dynamique, affirme que :

impulsion linéaire = variation de la quantité de mouvement linéaire

soit

$$(\Sigma F)t = M(\Delta V).$$

Les quantités entre parenthèses sont des grandeurs vectorielles et doivent être ajoutées vectoriellement. Les composantes sont généralement plus commodes, et pour éviter des éventuelles erreurs de signe, on conseille de prendre les formes suivantes :

(*a*) Dans la direction X, la quantité de mouvement initiale $\pm$ l'impulsion linéaire = la quantité de mouvement finale, ce qui donne :

$$MV_{x_1} \pm \Sigma F_x \cdot t = MV_{x_2} \qquad (1)$$

(*b*) Dans la direction Y,

$$MV_{y_1} \pm \Sigma F_y \cdot t = MV_{y_2} \qquad (2)^*$$

où M = la masse dont la quantité de mouvement varie pendant le temps t. Ces expressions peuvent s'écrire avec les indices appropriés x, y, ou z dans la forme suivante

$$\Sigma F_x = \rho Q(V_2 - V_1)_x, \quad \text{etc.} \qquad (3)$$

LE COEFFICIENT DE CORRECTION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT, β, calculé dans le problème 13.1, est

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A (v/V)^2 \, dA \qquad (4)$$

Pour l'écoulement laminaire dans les tuyaux, $\beta = 1{,}33$. Pour l'écoulement turbulent dans les tuyaux, β varie de 1,01 à 1,07. Dans la plupart des cas on peut prendre pour β l'unité.

(*) N.d.T. : les relations (1) et (2) exigent que $\sum Fx$ et $\sum Fy$ demeurent constants.

TRAÎNÉE

La traînée est la composante de la force résultante exercée par un fluide sur un corps *parallèlement* au mouvement relatif du fluide. L'équation habituelle en est :

$$\text{traînée (en N)} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \qquad (5)$$

PORTANCE

La portance est la composante de la force résultante exercée par un fluide sur un corps, *perpendiculairement* au mouvement relatif du fluide. L'équation habituelle en est :

$$\text{portance (en N)} = C_L \rho A \frac{V^2}{2} \qquad (6)$$

où : C_D = le coefficient de traînée, qui est un nombre sans dimensions,
C_L = le coefficient de portance, qui est un nombre sans dimensions,
ρ = la masse volumique du fluide, en kg/m^3,
A = une aire caractéristique en m^2, généralement l'aire projetée sur un plan perpendiculaire au mouvement relatif du fluide,
V = vitesse relative du fluide, par rapport au corps, en m/s.

TRAÎNÉE TOTALE

La traînée totale est constituée par la traînée de frottement et la traînée de pression. Cependant, il est rare que ces deux effets soient simultanément de grandeur appréciable. Pour des objets qui ne présentent pas de portance, la traînée de profil est synonyme de traînée totale.

Objet	Traînée de frottement	Traînée de pression	Traînée totale
1. Sphères	négligeable	+ traînée de pression	= traînée totale
2. Cylindre (axe perpendiculaire à la vitesse)	négligeable	+ traînée de pression	= traînée totale
3. Disques et plaques minces (perpendiculaires à la vitesse)	zéro	+ traînée de pression	= traînée totale
4. Feuilles minces (parallèles à la vitesse)	trainée de frottement	+ de négligeable à zéro	= traînée totale
5. Objets aérodynamiques	traînée de frottement	+ petite à négligeable	= traînée totale.

COEFFICIENTS DE TRAÎNÉE

Les coefficients de traînée dépendent du nombre de Reynolds pour des vitesses faibles et moyennes, mais en sont indépendants pour des vitesses élevées. Cependant, à des vitesses élevées, le coefficient de traînée est lié au nombre de Mach, dont les effets sont négligeables pour de faibles vitesses. Les diagrammes F, G et H illustrent les variations pour certaines formes géométriques. Les problèmes 13.24 et 13.40 traitent de ces relations.

Pour des plaques et des profils d'ailes, on dresse généralement un tableau de ces coefficients en fonction de l'aire de la plaque et du produit de la corde par la longueur.

COEFFICIENTS DE PORTANCE

Kuttar a donné en ce qui concerne les valeurs maximales théoriques des coefficients de portance relatifs à des plaques minces non normales à la vitesse relative du fluide

$$C_L = 2\pi \sin\alpha \tag{7}$$

où α = l'angle d'attaque, c'est-à-dire l'angle que fait la plaque avec la vitesse relative du fluide. Dans l'intervalle normal de fonctionnement, les profilés d'ailes actuels ont des valeurs d'environ 90 % de ce maximum théorique. L'angle α ne doit pas normalement dépasser 25°.

NOMBRE DE MACH

Le nombre de Mach est le rapport sans dimension de la vitesse du fluide à la vitesse du son (appelé parfois célérité)

$$\text{nombre de Mach} = N_M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \tag{8}$$

Pour les gaz, $c = \sqrt{krT}$ (voir chapitre 1)

Les valeurs de V/c jusqu'à la valeur critique 1,0 indiquent un écoulement subsonique; en 1,0 un écoulement sonique; et les valeurs supérieures à 1,0 indiquent un écoulement supersonique (voir le diagramme H).

THÉORIE DE LA COUCHE LIMITE

La théorie de la couche limite a d'abord été établie par Prandtl. Il montra que, pour un fluide en mouvement, toutes les pertes dues au frottement ont lieu à l'intérieur d'une couche mince adjacente à la limite du solide (appelé la couche limite) et que l'écoulement en dehors de cette couche peut être considéré comme s'effectuant sans frottement. La vitesse au voisinage de la limite est affectée par la contrainte tangentielle visqueuse à la paroi. En général, la couche limite est très mince aux limites amont d'un objet immergé, mais elle augmente d'épaisseur en raison de l'action continue de la contrainte tangentielle visqueuse.

Pour des nombres de Reynolds faibles, la couche limite toute entière est soumise aux forces de viscosité et l'écoulement y est laminaire. Pour des valeurs moyennes du nombre de Reynolds, la couche limite est laminaire près de la surface de la limite et turbulente au-delà. Pour des nombres de Reynolds élevés, la couche limite tout entière est turbulente.

PLAQUES PLANES

Pour des plaques planes de longueur L mètre, maintenues parallèles au mouvement relatif du fluide, on peut appliquer les équations suivantes :

1. Couche limite laminaire (pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à environ 500 000)

(*a*) Coefficient de traînée moyen $(C_D) = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{R_E}} = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{VL/\nu}}$ (9)

(*b*) L'épaisseur de la couche limite δ (en m) à une distance x quelconque est donnée par

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}20}{\sqrt{R_{E_x}}} = \frac{5{,}20}{\sqrt{Vx/\nu}} \qquad (10)$$

(*c*) La contrainte tangentielle visqueuse τ_0 en Pa est estimée par

$$\tau_0 = 0{,}33\rho V^{3/2}\sqrt{\nu/x} = 0{,}33(\mu V/x)\sqrt{R_{E_x}} = \frac{0{,}33\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (11)$$

où : V = vitesse du fluide approchant la limite (vitesse ambiante),
x = distance du bord d'attaque en m,
L = longueur totale de la plaque en m,
R_{E_x} = nombre de Reynolds local, pour la distance x.

On peut constater que l'épaisseur de la couche limite augmente avec la racine carrée de la longueur x ainsi qu'avec la racine carrée de la viscosité cinématique, tandis qu'elle décroît avec la racine carrée de la vitesse. De même, la contrainte tangentielle visqueuse τ_0 augmente avec la racine carrée de ρ et avec μ, décroît avec la racine carrée de η, et croît avec V à la puissance trois demi.

2. Couche limite turbulente (frontière lisse).

(*a*) Le coefficient moyen de traînée $(C_D) = \dfrac{0{,}074}{R_E^{0,20}}$ pour $2 \times 10^5 < R_E < 10^7$ (12)

$= \dfrac{0{,}455}{(\log_{10} R_E)^{2,58}}$ pour $10^6 < R_E < 10^9$ (13)

Pour une limite rugueuse, le coefficient de traînée varie avec la rugosité relative ε/L et non avec le nombre de Reynolds.

K.E. Schoenherr a proposé la formule $1/\sqrt{C_D} = 4{,}13\ \log(C_D R_{E_x})$, cette équation est considérée comme plus précise que les expressions (*12*) et (*13*), particulièrement quand les nombres de Reynolds sont supérieurs à 2×10^7.

(*b*) L'épaisseur de la couche limite δ se calcule par

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}38}{R_{E_x}^{0,20}} \quad \text{pour } 5 \times 10^4 < R_E < 10^6 \qquad (14)$$

$$= \frac{0{,}22}{R_{E_x}^{0,167}} \quad \text{pour } 10^6 < R_E < 5 \times 10^8 \qquad (15)$$

(*c*) La contrainte tangentielle visqueuse par

$$\tau_0 = \frac{0{,}023\rho V^2}{(\delta V/\nu)^{1/4}} = 0{,}058\,7\,\frac{V^2}{2}\rho\left(\frac{\nu}{xV}\right)^{1/5} \qquad (16)$$

3. Couche limite en transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent sur la surface de la plaque (R_E de 500 000 à 20 000 000).

(*a*) Coefficient de traînée moyen $(C_D) = \dfrac{0{,}455}{(\log_{10} R_E)^{2,58}} - \dfrac{1\,700}{R_E}$ (17)

Le diagramme G représente la variation de C_D avec le nombre de Reynolds pour ces trois conditions de l'écoulement.

COUP DE BÉLIER

Le coup de bélier est le terme utilisé pour désigner le choc résultant de la décroissance soudaine du mouvement (vitesse) d'un fluide. Dans un pipeline, le temps de trajet de l'onde de pression aller et retour (trajet circulaire) est donné par :

$$\text{temps (trajet circulaire) en s} = 2 \times \frac{\text{longueur du tuyau en m}}{\text{vitesse de l'onde de pression en m/s}}$$

soit

$$T = \frac{2L}{c} \tag{18}$$

L'augmentation de pression causée par la fermeture soudaine d'une vanne se calcule par :

$$\text{variation de pression en Pa} = \text{masse volumique} \times \text{vitesse du son} \times \text{variation de vitesse}$$

soit

$$\mathrm{d}p = \rho c\, \mathrm{d}V \quad \text{où} \quad \mathrm{d}h = c\, \mathrm{d}V/g \tag{19}$$

où $\mathrm{d}h$ est la variation de la hauteur de pression.

Pour des tuyaux rigides, la vitesse (célérité) de l'onde de pression est :

$$c = \sqrt{\frac{\text{module cubique du fluide en Pa}}{\text{masse volumique du fluide}}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho}} \tag{20}$$

Pour des tuyaux non rigides, l'expression est

$$c = \sqrt{\frac{E_B}{\rho[1 + (E_B/E)(d/t)]}} \tag{21}$$

où : E = module d'élasticité des parois du tuyau en Pa,
d = le diamètre intérieur du tuyau en m,
t = l'épaisseur des parois en m.

VITESSES SUPERSONIQUES

Les vitesses supersoniques transforment complètement la nature de l'écoulement. Le coefficient de traînée est lié au nombre de Mach N_M (voir le diagramme H) puisque la viscosité n'a qu'un effet faible sur la traînée. La perturbation de pression forme un cône dont le sommet est situé sur la pointe du corps ou du projectile. Le cône représente le front d'onde ou *onde de choc*, qu'on peut photographier. L'angle du cône ou angle de Mach α est donné par

$$\sin \alpha = \frac{\text{célérité}}{\text{vitesse}} = \frac{1}{V/c} = \frac{1}{N_M} \tag{22}$$

Problèmes résolus

13.1 Calculer le coefficient de correction de la quantité de mouvement β qu'on doit appliquer quand on utilise la vitesse moyenne V dans le calcul de la quantité de mouvement (écoulement à deux dimensions).

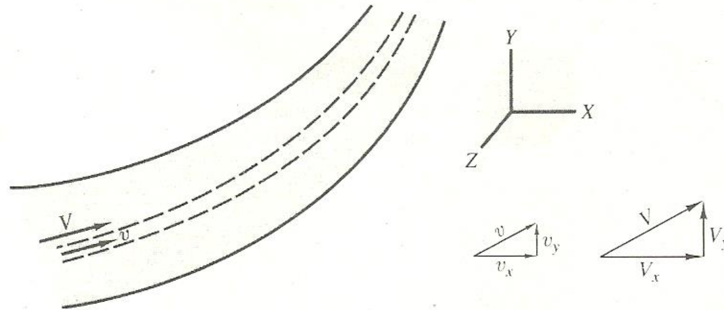


Fig. 13-1

Solution

La masse dM débitée par le tube de courant représenté dans la figure 13-1 est ρ dQ. La quantité de mouvement réelle dans la direction X est :

$$(\text{quantité de mouv.})_x = \int \mathrm{d}M v_x = \int \rho \, \mathrm{d}Q v_x = \int \rho v_x (v \, \mathrm{d}A)$$

Utilisant la vitesse moyenne pour la section, la quantité de mouvement réelle serait

$$(\text{quantité de mouv.})_x = \beta(MV_x) = \beta(\rho Q V_x) = \beta\rho(AV)V_x$$

En égalant les deux valeurs de la quantité de mouvement réelle, on obtient

$$\beta = \frac{\int \rho v_x (\theta \, \mathrm{d}A)}{\rho A V (V_x)} = \frac{1}{A}\int_A (v/V)^2 \, \mathrm{d}A$$

puisque, d'après le diagramme vectoriel des vitesses ci-dessus $v_x/V_x = \nu/V$.

13.2 Calculer le coefficient de correction de la quantité de mouvement si la distribution des vitesses vérifie l'équation $v = v_{\max}[(r_0^2 - r^2)/r_0^2]$. (Voir le chapitre 7, problème 7.18, pour le diagramme.)

Solution

D'après le problème 7.18, chapitre 7, on a vu que la vitesse moyenne valait $\frac{1}{2}v_{\max}$. Utilisant cette vitesse moyenne V, nous obtenons

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 \mathrm{d}A = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} \left[\frac{v_{\max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2}{\frac{1}{2}\,v_{\max}}\right]^2 (2\pi r \, \mathrm{d}r)$$

$$= \frac{8}{r_0^6}\left(\frac{1}{2}r_0^6 - \frac{1}{2}r_0^6 + \frac{1}{6}r_0^6\right) = \frac{4}{3} = 1{,}33$$

13.3 Un jet d'eau, de 75 mm de diamètre, se déplaçant vers la droite, vient frapper une plaque plane maintenue normalement à son axe. (a) Pour une vitesse de 25 m/s, quelle force maintiendra la plaque en équilibre?

(*b*) Comparer la pression dynamique moyenne s'exerçant sur la plaque avec la pression maximale (pression d'arrêt) si la plaque a 20 fois la surface du jet.

Solution

Supposons que l'axe X soit pris le long du parcours du jet. Ainsi la plaque annihile la quantité de mouvement initiale de l'eau dans la direction X. En prenant M pour la masse de l'eau ayant sa quantité de mouvement réduite à zéro en dt secondes et F_x vers la gauche, la force exercée par la plaque sur l'eau, nous avons :

(*a*) Quantité de mouvement linéaire initiale − impulsion linéaire = quantité de mouvement finale.

$$M(25) - F_x \, \mathrm{d}t = M(0)$$

$$\rho Q \, \mathrm{d}t(25) - F_x \, \mathrm{d}t = 0$$

et $F_x = 1\,000[\overset{A}{(\pi/A)(0{,}75)^2 10^{-2}}]\overset{V}{(25)} \times \overset{V}{(25)} = 2\,760$ N (vers la gauche pour assurer l'équilibre).
Il n'y a pas de composantes Y dans les forces mises en jeu dans le problème, les composantes Y s'exerçant par la plaque s'équilibrant (où s'annulant) l'une l'autre. Notons que le temps dt s'élimine et aurait pu aussi bien être pris comme étant une seconde.

Pour la plaque, il est bon de remarquer que l'expression de l'impulsion − quantité de mouvement peut s'écrire comme suit

$$F = MV = \rho QV = \rho(AV)V = \rho AV^2 \quad \text{(N)} \qquad (1)$$

(*b*) Pour avoir la pression moyenne, diviser la force dynamique totale par l'aire sur laquelle elle s'exerce :

$$\text{pression moyenne} = \frac{\text{force}}{\text{aire}} = \frac{\rho AV^2}{20A} = \frac{\rho V^2}{20} = \frac{w}{10}\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

D'après les problèmes 12.1 et 12.5 du chapitre 12, la pression d'arrêt $= p_s = w(V^2/2g)$ (Pa).
Ainsi la pression moyenne est 1/10 de la pression d'arrêt dans ce cas là.

13.4 Une plaque recourbée dévie un courant d'eau de 76 mm de diamètre de 45°. Pour une vitesse du jet de 40 m/s vers la droite, calculer la valeur des composantes de la force exercée sur la plaque recourbée (en admettant qu'il n'y a pas de frottements).

Solution

On prendra les composantes selon le parcours initial du jet et sa normale. L'eau a sa quantité de mouvement modifiée par la force exercée par la plaque.

(*a*) Pour la direction X, prenant + à droite, admettant que F_x est positive,

quantité de mouvement initiale + impulsion linéaire = quantité de mouvement finale.

$$MV_{x_1} + F_x\, t = MV_{x_2}$$

$$\rho Q\, tV_{x_1} + F_x\, t = \rho Q\, tV_{x_2}$$

Réarrangeant et notant que $V_{x_2} = +V_{x_1} \cos 45°$ nous obtenons

$$F_x = 1\,000[(\pi/4)(0{,}076)^2](40)[(40 \times 0{,}707) - 40] = -2\,125 \text{ N}$$

Où le signe négatif indique que F_x est dirigée vers la gauche (alors qu'on la supposait dirigée vers la droite). Si on avait supposé F_x dirigée vers la gauche, la solution aurait donné +2 125 N, le signe indiquant que l'hypothèse faite était correcte.

L'effet de l'eau sur la plaque est égal et opposé à celui de la plaque sur l'eau. Ainsi la composante selon X s'exerçant sur la plaque vaut 2 125 N (dirigée vers la droite).

(*b*) Dans la direction Y, en prenant le sens positif vers *le haut*,

$$MV_{y_1} + F_y\,t = MV_{y_2}$$
$$O + F_y = 10^3 \times (4{,}54 \times 10^{-3})(0{,}707\,1 \times 40) = 5\,130 \text{ N}$$

et $F_y = +5{,}13$ kN vers le haut sur l'eau. Ainsi, la composante selon Y s'exerçant sur la plaque = 5,13 kN vers le haut.

13.5 La force exercée par un courant d'eau de 25 mm de diamètre venant frapper une plaque plane maintenue normalement à l'axe du courant est de 645 N. Quel est le débit?

Solution

D'après l'équation (*1*) du problème 13-3 :

$$F_x = \rho A V^2$$
$$645 = 1\,000[(\pi/4)(0{,}025)^2]V^2; \text{ d'où } V = 36{,}2 \text{ m/s}$$

Alors,

$$Q = AV = 0{,}490\,9 \times 10^{-3} \times 36{,}2 = 0{,}017\,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

13.6 Si la plaque du problème 13-3 se déplace vers la droite avec une vitesse de 10,0 m/s, quelle est la force exercée par le jet sur la plaque?

Solution

En utilisant t = 1 seconde, la quantité de mouvement initiale $MV_{x_1} + F_x(1)$ = la quantité de mouvement finale MV_{x_2}.

Dans le cas présent, la masse d'eau qui voit sa quantité de mouvement modifiée n'est pas identique à la masse relative à la plaque stationnaire. Pour la plaque immobile, en une seconde une masse de :

$$(\rho)(\text{volume}) = (\rho)(A \times 25{,}0)$$

change de quantité de mouvement. Pour une plaque en mouvement, cette masse est de

$$M = (\rho)A(25 - 10{,}0)$$

où (25,0 − 10,0) est la vitesse relative de l'eau par rapport à la plaque.

Alors,
$$F_x = 1\,000[(\pi/4)(0{,}075)^2](25 - 10{,}0)(10{,}0 - 25) = -995 \text{ N}$$

et F_x = force exercée par la plaque sur l'eau = −995 N dirigée vers la gauche. Ainsi la force exercée par l'eau sur la plaque est de 995 N vers la droite.

Si la plaque s'était déplacée vers la gauche à 10,0 m/s, une masse d'eau plus importante aurait vu sa quantité de mouvement modifiée en n'importe quel intervalle de temps t. La vitesse aurait alors été −10,0 m/s. La force aurait été

$$F_x = 10^3 \times 4{,}42 \cdot 10^{-3}[(25 - (-10{,}0)](-10{,}0 - 25) = -5\,415 \text{ N} \quad \text{(exercée sur l'eau vers la gauche).}$$

13.7 La surface fixe représentée dans la figure 13-2 divise le jet de sorte que 30 l/s s'écoulent dans chaque direction. Pour une vitesse initiale de 15,0 m/s, calculer les valeurs des composantes selon X et Y nécessaires pour maintenir la surface en équilibre (en admettant qu'il n'y ait pas de frottement).

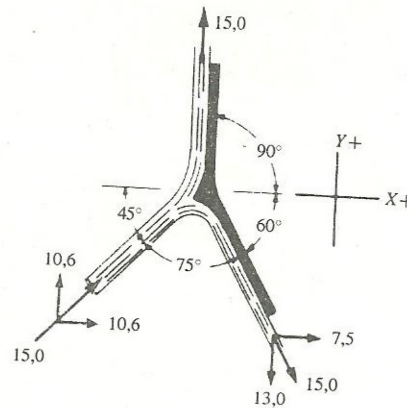


Fig. 13-2

Solution

(*a*) Dans la direction X, en utilisant $t = 1$ seconde.

$$MV_{x_1} - F_x(1) = \frac{1}{2}MV_{x_2} + \frac{1}{2}MV'_{x_2}$$
$$1\,000(0{,}06)(10{,}6) - F_x = 1\,000(0{,}03)(0 + 7{,}5)$$

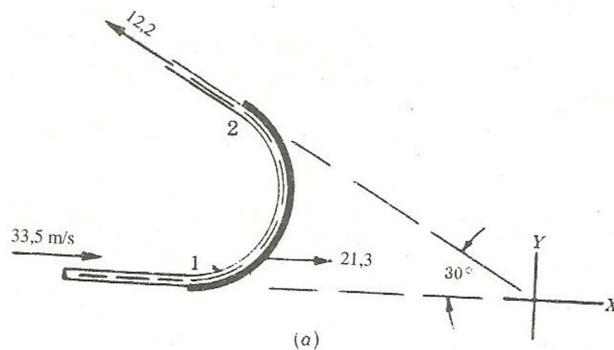
et $F_x = +636 - 225 = +411$ N vers la gauche.

(*b*) Dans la direction Y,

$$MV_{y_1} - F_y(1) = \frac{1}{2}MV_{y_2} - \frac{1}{2}MV'_{y_2}$$
$$1\,000(0{,}6)(10{,}6) - F_y = 1\,000(0{,}03)(+15 - 13)$$

et $F_y = +636 - 60 = 576$ N vers le bas.

13.8 Un jet de 75 mm de diamètre a une vitesse de 33,5 m/s. Il frappe une lame se déplaçant dans la même direction à 21,3 m/s. L'angle de déflexion de la lame est de 150°. En admettant qu'il n'y a pas de frottement, calculer les composantes selon X et Y de la force exercée par l'eau sur la lame. (Se reporter à la figure 13-3(*a*).)



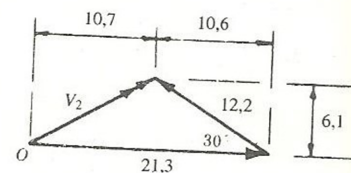


fig. 13-3

Solution

La vitesse relative $V_{x_1} = 33{,}5 - 21{,}3 = 12{,}2$ m/s vers la droite.

La vitesse de l'eau en 2 = $V_{\text{eau/lame}} + V_{\text{ailette}}$ [voir la figure 13.3 (*b*)], d'où $V_{2x} = 10{,}7$ m/s vers la droite et $V_{2y} = 6{,}1$ m/s vers le haut.

Appliquer le principe de la conservation de la quantité de mouvement dans la direction X.

(*a*) quantité de mouvement initiale $MV_x - F_x(1) =$ quantité de mouvement finale MV_x

$$M(33{,}5) - F_x = M(+10{,}7)$$

et $F_x = \left[\frac{\pi}{4}(75/1\,000)^2 \times 12{,}2\right](33{,}5 - 10{,}7) = 1{,}23$ kN exercée sur l'eau vers la gauche.

(*b*) quantité de mouvement initiale $MV_y - F_y(1) =$ quantité de mouvement finale MV_y

$$M(0) - F_y = M(+6{,}1)$$

et $F_y = \left[\frac{\pi}{4}(75/1\,000)^2 \times 12{,}2\right](0 - 6{,}1) = -0{,}328$ kN exercée sur l'eau vers le haut.

Les composantes de la force exercée par l'eau sur la lame sont 1,23 kN vers la droite et 0,328 kN vers le bas.

13.9 Si le frottement dans le problème 13-8 avait ramené la vitesse de l'eau par rapport à la lame de 10,2 m/s à 10,7 m/s, (*a*) quelles auraient été les composantes de la force exercée par la lame sur l'eau et (*b*) quelle aurait été la vitesse absolue finale de l'eau?

Solution

On trouve les composantes de la vitesse absolue en (2) en résolvant un triangle vectoriel analogue à celui de la Fig. 13-3 (*b*) du problème 13.8, en utilisant 21,3 horizontalement et 10,7 vers le haut, sur la gauche, à 30°. Ainsi :

$$V_{2x} = 12{,}1 \text{ m/s vers la droite et } V_{2y} = 5{,}33 \text{ m/s vers le haut.}$$

(*a*) Alors, $F_x = \frac{\pi}{4}(75/1\,000)^2 \times 12{,}2 \times (33{,}5 - 12{,}1) = 1{,}15$ kN, exercée sur l'eau vers la gauche

$$F_y = \frac{\pi}{4}(75/1\,000)^2 \times 12{,}2(0 - 5{,}33) = -0{,}287 \text{ kN, exercée sur l'eau vers le haut.}$$

(*b*) D'après les composantes calculées plus haut, la vitesse absolue de l'eau quittant la lame est

$$V_2 = \sqrt{(12{,}1)^2 + (5{,}33)^2} = 13{,}2 \text{ m/s} \quad \text{vers le haut et vers la droite,}$$

à un angle de $\theta_x = \tan^{-1} 5{,}33/12{,}1 = 23{,}8°$.

13.10 Pour une vitesse donnée du jet, déterminer les conditions dans lesquelles la quantité de travail (ou de puissance) produite sera maximale pour une série de lames en mouvement (en négligeant le frottement sur les lames).

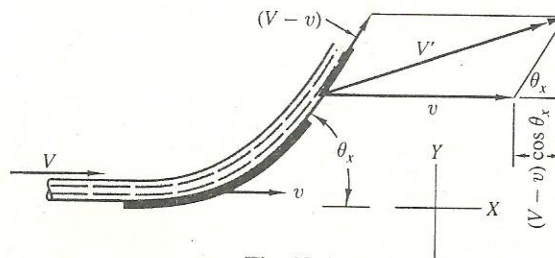


Fig. 13-4

Solution

Considérons d'abord la vitesse des lames V pour laquelle la puissance sera maximale. En se reportant à la figure 13-4, on va établir l'expression de la puissance produite dans la direction X, en prenant pour axe des X la direction du mouvement des lames. Puisque le jet tout entier frappe soit une lame, soit plusieurs, la masse toute entière qui circule par seconde, subit une modification de sa quantité de mouvement ou $M = (w/g)AV = \rho AV$.

Puissance = travail produit par seconde = force × distance parcourue par seconde dans la direction de la force.

(1) Déterminons la force par le principe de conservation de la quantité de mouvement. La vitesse absolue finale dans la direction X est

$$V'_x = v + (V - v)\cos\theta_x$$

et la quantité de mouvement initiale − l'impulsion linéaire = la quantité de mouvement finale.

$$MV - F_x(1) = M[v + (V - v)\cos\theta_x]$$

$$F_x = (wAV/g)[(V - v)(1 - \cos\theta_x)]$$

Alors,

$$\text{puissance } P = (wAV/g)[(V - v)(1 - \cos\theta_x)]v \qquad (1)$$

Puisque $(V - v)v$ est la variable qui doit avoir la valeur maximale pour que la puissance soit maximale, en égalant sa dérivée première à zéro, nous obtenons :

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}v = (wAV/g)(1 - \cos\theta_x)(V - 2v) = 0$$

Ainsi $v = V/2$, c'est-à-dire que les lames doivent avoir une vitesse égale à la moitié de celle du jet.

(2) L'examen de l'expression *(1)* ci-dessus pour des valeurs données de V et v indique que la puissance maximale est obtenue pour $\theta_x = 180°$ (par simple observation). Cet angle n'est pas pratiquement réalisable, mais un angle de 170° donne des résultats satisfaisants. La réduction correspondante de la puissance est petite en pourcentage.

(3) Dans la direction Y, la force non équilibrée est rendue égale à zéro en utilisant des lames incurvées, dirigeant chacune la moitié de la masse de l'eau vers chaque extrémité de l'axe des Y.

13.11 (*a*) En se reportant à la figure 13.5, avec quel angle un jet d'eau se déplaçant à 15,0 m/s doit-il venir frapper une série d'aubes se déplaçant à 6,0 m/s pour que l'eau soit tangente aux aubes (pas de choc)? (*b*) Quelle est la puissance produite si le débit est de 0,08 m³/s? (*c*) Quel est le rendement des aubes?

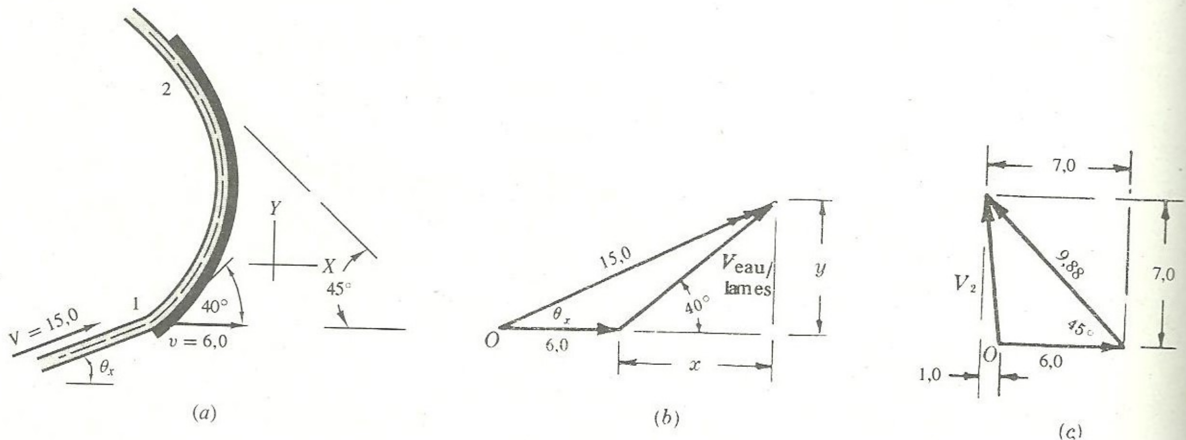


Fig. 13-5

Solution

(*a*) vitesse de l'eau = vitesse de l'eau/aubes + → vitesse des aubes

ou 15,0 en $\angle\theta_x$ =? en 40° + → 6,0 →

D'après le diagramme vectoriel figure 13.5 (*b*), $15\cos\theta_x = 6{,}0 + x$, $15\ \sin\theta_x = y$ et $\tan 40° = y/x = 0{,}839\,1$. En résolvant ces équations $\theta_x = 25°5'$.

(*b*) En résolvant le diagramme de la figure 13-5 (*b*) donnant la vitesse de l'eau par rapport aux lames

$$y = 15\ \sin\theta_x = 15\ \sin 25°5' = 6{,}36\ \text{m/s} \quad \text{et} \quad V_{\text{eau/lames}} = y/(\sin 40°) = 9{,}90\ \text{m/s}$$

De plus, $Vx_2(\text{absolue}) = 0{,}99$ m/s vers la gauche, d'après la figure 13-5(*c*), alors :

$$F_x = \overbrace{1\,000 \times 0{,}08}^{M} \times [\overbrace{15 \times 0{,}906}^{V_1\cos\theta_x} - (-0{,}99)] = 1\,170\ \text{N}$$

et la puissance $E_x = 1\,170 \times 6 = 7\,020\ \text{W} = 7{,}02\ \text{kW}$.

(*c*) $\text{Rendement} = \dfrac{7\,020}{\frac{1}{2}M(15)^2} = \dfrac{7\,020}{9\,000} = 0{,}78 = 78\ \%$.

13.12 Un tuyau de 600 mm de diamètre transportant $0{,}900\ \text{m}^3/\text{s}$ d'huile (de densité 0,85) présente un coude de 90° dans un plan horizontal. La perte de charge dans le coude est de 1,00 m d'huile et la pression à l'entrée est de 300 kPa. Calculer la résultante de la force exercée par l'huile sur le coude.

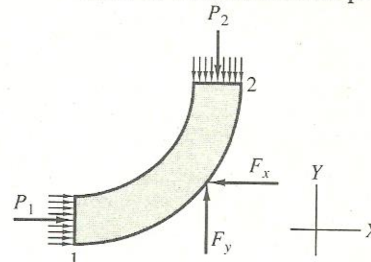


Fig. 13-6

Solution

En se reportant à la figure 13-6, le diagramme du système en équilibre représente les forces statiques et dynamiques s'exerçant sur la masse d'huile du coude. On calcule ces forces comme suit :

(*a*) $P_1 = p_1 A = 3 \times 10^5 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}6)^2 = 84\,800\ \text{N}$.

(*b*) $P_2 = p_2 A$, où $p_2 = p_1 -$ perte en Pa, d'après l'équation de Bernoulli puisque $z_1 = z_2$ et $V_1 = V_2$. Alors, $P_2 = (3 \times 10^5 - 0{,}85 \times 9\,810 \times 1{,}0) \times \frac{1}{4}\pi(0{,}6)^2 = 82\,460\ \text{N}$

(*c*) En utilisant le principe de la conservation de la quantité de mouvement, et sachant que $V_1 = V_2 = Q/A = 3{,}18$ m/s.

$$MV_{x_1} + \Sigma\ (\text{forces dans la direction } X) \times 1 = MV_{x_2}$$
$$84\,800 - F_x = (0{,}85 \times 1\,000 \times 0{,}9)(0 - 3{,}18) = -2\,430\ \text{N}$$

et
$$F_x = +87\,230\ \text{N}$$

(*d*) De même, pour $t = 1$ seconde,

$$MV_{y_1} + \Sigma\ (\text{forces dans la direction } Y) \times 1 = MV_{y_2}$$
$$F_y - 82\,460 = (0{,}85 \times 1\,000 \times 0{,}9)(3{,}18 - 0) = +2\,430\ \text{N}$$

et
$$F_y = +84\,890\ \text{N}.$$

Sur le coude du tuyau, la force résultante agit vers la droite et vers le bas et a pour grandeur

$$R = \sqrt{(87\,230)^2 + (84\,890)^2} = 121\,700\ \text{N}; \quad \theta_x = \tan^{-1} 84\,890/87\,230 = 44{,}2°.$$

13.13 Le tuyau de 600 mm du problème 13.12 est relié à un tuyau de 300 mm par un convergent normalisé. Pour le même débit de 0,900 m³/s d'huile, à la pression de 275 kPa, quelle est la force exercée par l'huile sur le convergent, en ne tenant pas compte des pertes de charges éventuelles?

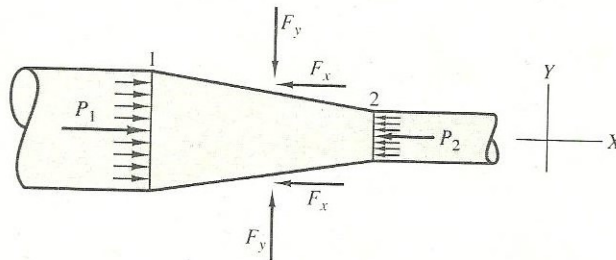


Fig. 13-7

Solution

Puisque $V_1 = 3,18$ m/s, $V_2 = (2/1)^2 \times 3,18 = 12,72$ m/s. De plus, l'équation de Bernoulli appliquée entre la section 1 à l'entrée et la section 2 à la sortie, donne

$$\left(\frac{p_1}{w} + \frac{(3,18)^2}{2g} + 0\right) - (\text{pertes négl.}) = \left(\frac{p_2}{w} + \frac{(12,72)^2}{2g} + 0\right)$$

En résolvant,

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{2,75 \times 10^5}{0,85 \times 9\,810} + \frac{10,1}{2g} - \frac{162}{2g} = 25,2 \text{ m d'huile} \quad \text{et} \quad p_2 = 2,10 \text{ bar.}$$

La figure 13-7 représente les forces agissant sur la masse d'huile du convergent.

$$P_1 = p_1 A_1 = 2,75 \times 10^5 \times \frac{1}{4}\pi(0,6)^2 = 77\,800 \text{ N} \quad (\text{vers la droite})$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 2,1 \times 10^5 \times \frac{1}{4}\pi(0,3)^2 = 14\,800 \text{ N} \quad (\text{vers la gauche}).$$

Dans la direction X la quantité de mouvement de l'huile subit une modification. Alors

$$MV_{x_1} + \Sigma\ (\text{forces dans la direction } X) \times 1 = MV_{x_2}$$
$$(77\,800 - 14\,800 - F_x)1 = (0,85 \times 1\,000 \times 0,9)(12,72 - 3,18)$$

et $F_x = 55,7$ kN, agissant vers la droite sur l'huile.

Les forces dans la direction Y s'équilibrent et $F_y = 0$.

Ainsi la force exercée par l'huile sur le convergent est de 55,7 kN vers la droite.

13.14 Un coude convergent de 45°, de 600 mm de diamètre en amont, de 300 mm en aval, débite 0,444 m³ d'eau à la seconde sous une pression de 145 kPa. En ne tenant pas compte des pertes de charge éventuelles, calculer la force exercée par l'eau sur le coude convergent.

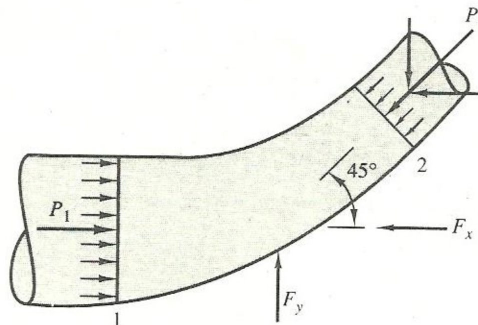


Fig. 13-8

Solution

$$V_1 = 0{,}444/A_1 = 1{,}57 \text{ m/s}$$

et
$$V_2 = 6{,}28 \text{ m/s}$$

L'équation de Bernoulli appliquée entre les sections 1 et 2 donne

$$\left(\frac{145}{9{,}81} + \frac{2{,}46}{2g} + 0\right) - (\text{pertes négl.}) = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{39{,}4}{2g} + 0\right)$$

d'où $p_2 = \rho g = 12{,}93$ m et $p_2 = 127$ kPa.

Dans la figure 13-8 on a représenté la masse d'eau soumise aux forces statiques et dynamiques

$$P_1 = p_1 A_1 = 145 \times \frac{1}{4}\pi(600/1\,000)^2 = 41{,}0 \text{ kN}$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 127 \times \frac{1}{4}\pi(300/1\,000)^2 = 8{,}98 \text{ kN}$$

Dans la direction X, $\quad P_{2x} = P_{2y} = 8{,}98 \times 0{,}707 = 6{,}35$ kN

$$MV_{x1} + \Sigma\,(\text{forces dans la direction } X) \times 1 = MV_{x2}$$
$$(41{,}0 - 6{,}35 - F_x)(1) = (0{,}444)[(6{,}28 \times 0{,}707) - 1{,}57]$$

et $F_x = 33{,}4$ kN vers la gauche.

Dans la direction Y,

$$(+F_y - 6{,}35)1 = (0{,}444)[6{,}28 \times 0{,}707) - 0]$$

et $F_y = 8{,}32$ kN vers le haut.

La force exercée sur le coude convergent est $F = \sqrt{(33{,}4)^2 + (8{,}32)^2} = 34{,}4$ kN dirigée vers la droite et vers le bas, avec $\theta_x = \tan^{-1}(8{,}32/33{,}4) = 13°59'$.

13.15 En se reportant à la figure 13-9, un jet d'eau de 50 mm de diamètre vient frapper une porte carrée de 1,20 m de côté faisant un angle de 30° avec la direction du jet. La vitesse de l'eau dans le jet est de 18,0 m/s et le jet vient frapper la porte en son centre de gravité. En ne tenant pas compte du frottement, quelle force doit-on appliquer normalement à l'extrémité de la porte pour maintenir l'équilibre ?

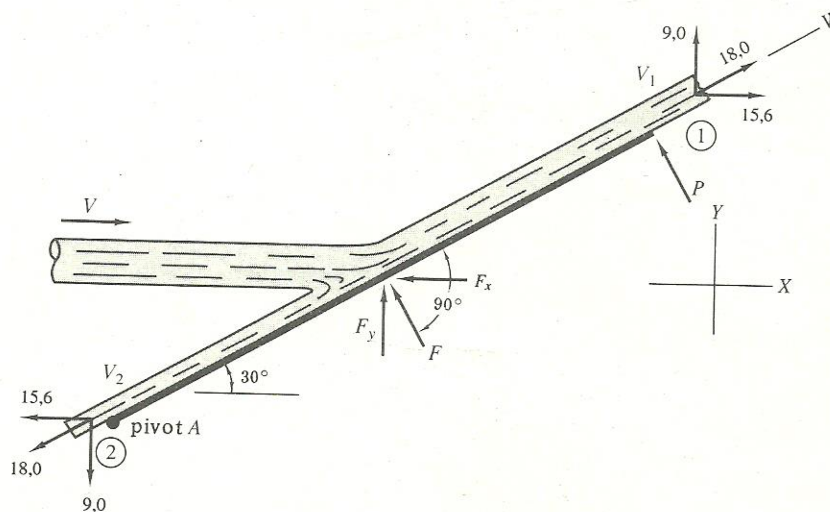


Fig. 13-9

Solution

La force exercée par la porte est normale à celle-ci (pas de frottement). Ainsi, aucune force agissant dans la direction W de la figure 13-9, il n'y a pas de variation de la quantité de mouvement dans cette direction. Ainsi, en utilisant les composantes selon W, on obtient,

$$\text{quantité de mouvement initiale} \pm 0 = \text{quantité de mouvement finale}$$
$$+M(V\cos 30°) = +M_1V_1 - M_2V_2$$
$$(\rho)(A_{\text{jet}}V)(V\cos 30°) = (\rho)(A_1V_1)V_1 - (\rho)(A_2V_2)V_2$$

Mais $V = V_1 = V_2$ (les frottements n'étant pas pris en compte). Alors,

$$A_{\text{jet}}\cos 30° = A_1 - A_2 \quad \text{et, d'après l'équation de continuité} \quad A_{\text{jet}} = A_1 + A_2$$

En résolvant, on a :

$$A_1 = A_{\text{jet}}(1+\cos 30°)/2 = A_{\text{jet}} \times 0{,}933 \quad \text{et} \quad A_2 = A_{\text{jet}}(1-\cos 30°)/2 = A_{\text{jet}} \times 0{,}067$$

Le jet se divise comme il est indiqué et l'équation des quantités de mouvement donne dans la direction X,

$$[1\,000(\tfrac{1}{4}\pi)(0{,}05)^2 18]18 - F_x(0{,}3) = [1\,000(\tfrac{1}{4}\pi)(0{,}05)^2 0{,}933(18)]15{,}6$$
$$+[1\,000(\tfrac{1}{4}\pi)(0{,}05)^2 0{,}067(18)](-15{,}6)$$

d'où $F_x = 160$ N.

De même, dans la direction Y

$$M(0) + F_y(0{,}3) = [1\,000(0{,}002)(0{,}933)18]9{,}0 + [1\,000(0{,}002)(0{,}067)18](-9{,}0)$$

d'où $F_y = 280$ N.

Pour la porte considérée comme un système en équilibre, $\Sigma M_{\text{pivot}} = 0$ et

$$+160(0{,}3) + 280(0{,}6 \times 0{,}866) - P(1{,}2) = 0 \quad \text{soit} \quad P = 161 \text{ N.}$$

13.16 Déterminer la réaction d'un jet, s'échappant d'un orifice, sur le réservoir qu'il quitte.

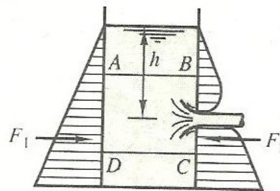


Fig. 13.10

Solution

Dans la figure 13-10 la masse de liquide $ABCD$ est considérée comme un système en équilibre. Les seules forces horizontales qui lui sont appliquées sont F_1 et F_2 qui font varier la quantité de mouvement de l'eau.

$$(F_1 - F_2) \times 1 = M(V_2 - V_1) \text{ ou } V_1 \text{ est négligeable.}$$

La réaction $F = F_1 - F_2 = \dfrac{wQ}{g}V_2 = \dfrac{wA_2V_2}{g}V_2.$

Mais, $A_2 = c_cA_0$ et $V_2 = c_c\sqrt{2gh}$

D'où $F = \dfrac{w(c_c A_0)}{g} c_v^2(2gh) = (cc_v)wA_0(2h)$ (vers la droite du liquide).

(1) Pour les valeurs moyennes $C = 0{,}60$ et $C_v = 0{,}98$ la réaction $F = 1{,}176whA_0$. Ainsi la force agissant vers la gauche du réservoir est à peu près 18 % supérieure à la force statique agissant sur un bouchon qui fermerait juste l'orifice.

(2) Pour un écoulement idéal (pas de frottement, pas de contraction), $F = 2(whA_0)$. Cette force est égale au double de celle qui agirait sur un bouchon fermant l'orifice.

(3) Pour une buse, ($c_c = 1{,}00$), la réaction $F = c_v^2 wA(2h)$, où h est la hauteur de charge effective provoquant l'écoulement.

13.17 Des gicleurs d'un appareil d'arrosage de jardin ont 25 mm de diamètre et sont normaux au rayon de 600 mm (voir la figure 13-11). Si la pression à la base des embouts est de 350 kPa, quelle force doit-on appliquer à chaque tuyau d'arrosage, à 300 mm du centre de rotation pour les maintenir en équilibre? (Utiliser $c_v = 0{,}80$ et $c_c = 1{,}00$). (fig. 13-11)

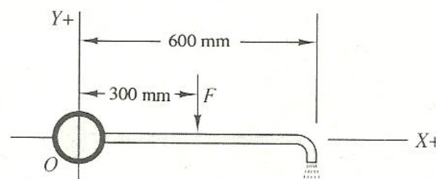


Fig. 13-11

Solution

La réaction provoquée par le jet de l'appareil d'arrosage peut se calculer d'après le principe de la conservation de la quantité de mouvement. Puisque la force qui provoque la variation de la quantité de mouvement dans la direction X agit selon l'axe des X, aucun couple n'est exercé sur le bras. On s'intéresse par conséquent à la variation de la quantité de mouvement ayant lieu dans la direction Y. Mais la quantité de mouvement initiale dans la direction Y est nulle. La vitesse du jet

$$V_Y = c_v\sqrt{2gh} = 0{,}80\sqrt{2 \times 350 + \text{hauteur de vitesse négligeable}} = 21{,}2 \text{ m/s}$$

Ainsi, $$F_Y\, t = M(V_Y) = \frac{1}{4}\pi(25/1\,000)^2 \times 21{,}2\, t(-21{,}2)$$

ou $F_Y = -0{,}220$ kN agissant sur l'eau vers le bas. Ainsi la force du jet sur le bras de l'appareil d'arrosage est de 0,220 kN vers le haut. Alors

$$\Sigma M_0 = 0, \quad F(0{,}3) - (0{,}220)(0{,}6) = 0 \quad \text{d'où} \quad F = 0{,}440 \text{ kN pour assurer l'équilibre.}$$

13.18 Établir les équations fondamentales de la poussée pour les dispositifs de propulsion

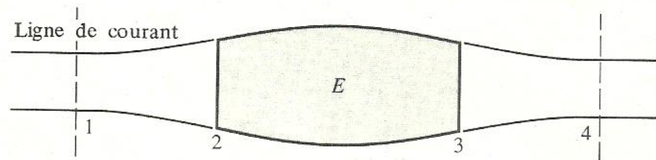


Fig. 13-12

Solution

Dans la figure 13-12, considérons un moteur à réaction E, qui utilise M kg d'air par seconde [M(**kg/s**) $=$ W(**N/s**)$/g$]. À la section 1, la vitesse V_1 de l'air pénétrant dans l'appareil est prise comme vitesse de vol. De plus,

l'air pénètre à la pression atmosphérique, (s'il n'y a pas d'onde de choc). Dans le moteur E, l'air est comprimé et chauffé par la combustion. L'air quitte la tuyère à la section 3 avec une grande vitesse de sortie et par conséquent avec une quantité de mouvement très largement augmentée.

Dans la plupart des moteurs à réaction, le poids de l'air qui par seconde quitte l'appareil est supérieur au poids de l'air qui par seconde y entre à cause de l'addition de fuel. Cette augmentation est d'environ 2 %. On mesure en général le poids de l'air à la sortie de la section 3.

La poussée peut être calculée à partir de la variation de la quantité de mouvement, comme suit :

$$\text{poussée } F = \frac{W_{\text{sortie}} V_4}{g} - \frac{W_1 V 1}{g} = M_{\text{sortie}} V_4 - M_1 V_1 \qquad (A)$$

Dans les cas où la pression à la section 3 est supérieure à la pression atmosphérique, on dispose d'une accélération supplémentaire du gaz. La force additionnelle est égale au produit de la différence de pression par l'aire de la section 3. Ainsi, pour la variation de la quantité de mouvement entre les sections 1 et 3, nous obtenons

$$F = \frac{W_{\text{sortie}} V_3}{g} + A_3(p_3 - p_4) - \frac{W_1 V_1}{g} \qquad (B)$$

Si on a besoin de la vitesse effective du gaz brûlé, on peut résoudre simultanément les équations (A) et (B) pour avoir

$$V_4 = V_3 + \frac{g A_3}{W_3}(p_3 - p_4) = V_3 + \frac{A_3}{M_3}(p_3 - p_4) \qquad (C)$$

On notera que si $p_3 = p_4$, $V_4 = V_3$.

Le terme $W_1 V_1 / g$ s'appelle la poussée négative ou résistance d'attaque. La poussée brute (produite par la tuyère) est $W_3 V_4 / g$ pour (A) et $W_3 V_3 / g + A_3(p_3 - p_4)$ pour (B).

Pour une fusée, on utilise l'équation (A) pour calculer la poussée; en tenant compte du fait que $V_1 = 0$ pour un tel dispositif.

13.19 On fait des essais sur un moteur à réaction en laboratoire. Le moteur consomme 200 N d'air par seconde et 2,0 N/s de combustible. Si la vitesse de sortie des gaz est de 450 m/s, quelle est la poussée?

Solution

En utilisant la formule (A) du problème 13.18, on obtient la poussée

$$F = (202 \times 450 - 200 \times 0)/9{,}81 = 9\,270 \text{ N}.$$

13.20 Un moteur à réaction fonctionne à 180 m/s et consomme 25,5 kg/s d'air. À quelle vitesse l'air doit-il sortir pour que la poussée soit de 6,7 kN?

Solution

$$\text{poussée} \quad F = 6\,700 = (25{,}5)(V_{\text{sort.}} - 180) \quad \text{d'où} \quad V_{\text{sortie}} = 443 \text{ m/s}.$$

13.21 On essaye en laboratoire un turbo propulseur dans des conditions simulant l'altitude où la pression atmosphérique est $p = 37{,}6$ kPa (absolus), la température $T = 238{,}3$ K et la masse volumique atmosphérique $\rho = 0{,}55$ kg/m^3. Si la section de sortie du moteur est de 1 400 cm^2 et que la pression de sortie est la pression atmosphérique, quelle est le nombre de Mach N_M si la poussée brute est de 6 540 N? (Utiliser $k = 1{,}33$.)

Solution

Puisque dans l'équation (B) du problème 12.18, $p_3 = p_4$ et $V_3 = 0$:

$$F = W_s V_s / g = (w A_s V_s) V_s / g \quad \text{ou} \quad 6\,540 = 0{,}55(0{,}14) V_e^2 \quad \text{soit} \quad V_e = 291 \text{ m/s}.$$

Nombre de Mach $N_M = V_s / c = V_s / \sqrt{krT} = 291 / \sqrt{1{,}33(287{,}1)(283{,}3)} = 0{,}96$.

l'air pénètre à la pression atmosphérique, (s'il n'y a pas d'onde de choc). Dans le moteur E, l'air est comprimé et chauffé par la combustion. L'air quitte la tuyère à la section 3 avec une grande vitesse de sortie et par conséquent avec une quantité de mouvement très largement augmentée.

Dans la plupart des moteurs à réaction, le poids de l'air qui par seconde quitte l'appareil est supérieur au poids de l'air qui par seconde y entre à cause de l'addition de fuel. Cette augmentation est d'environ 2 %. On mesure en général le poids de l'air à la sortie de la section 3.

La poussée peut être calculée à partir de la variation de la quantité de mouvement, comme suit :

$$\text{poussée } F = \frac{W_{\text{sortie}} V_4}{g} - \frac{W_1 V 1}{g} = M_{\text{sortie}} V_4 - M_1 V_1 \qquad (A)$$

Dans les cas où la pression à la section 3 est supérieure à la pression atmosphérique, on dispose d'une accélération supplémentaire du gaz. La force additionnelle est égale au produit de la différence de pression par l'aire de la section 3. Ainsi, pour la variation de la quantité de mouvement entre les sections 1 et 3, nous obtenons

$$F = \frac{W_{\text{sortie}} V_3}{g} + A_3(p_3 - p_4) - \frac{W_1 V_1}{g} \qquad (B)$$

Si on a besoin de la vitesse effective du gaz brûlé, on peut résoudre simultanément les équations (A) et (B) pour avoir

$$V_4 = V_3 + \frac{g A_3}{W_3}(p_3 - p_4) = V_3 + \frac{A_3}{M_3}(p_3 - p_4) \qquad (C)$$

On notera que si $p_3 = p_4$, $V_4 = V_3$.

Le terme $W_1 V_1 / g$ s'appelle la poussée négative ou résistance d'attaque. La poussée brute (produite par la tuyère) est $W_3 V_4 / g$ pour (A) et $W_3 V_3 / g + A_3(p_3 - p_4)$ pour (B).

Pour une fusée, on utilise l'équation (A) pour calculer la poussée; en tenant compte du fait que $V_1 = 0$ pour un tel dispositif.

13.19 On fait des essais sur un moteur à réaction en laboratoire. Le moteur consomme 200 N d'air par seconde et 2,0 N/s de combustible. Si la vitesse de sortie des gaz est de 450 m/s, quelle est la poussée?

Solution

En utilisant la formule (A) du problème 13.18, on obtient la poussée

$$F = (202 \times 450 - 200 \times 0)/9{,}81 = 9\,270 \text{ N}.$$

13.20 Un moteur à réaction fonctionne à 180 m/s et consomme 25,5 kg/s d'air. À quelle vitesse l'air doit-il sortir pour que la poussée soit de 6,7 kN?

Solution

$$\text{poussée} \quad F = 6\,700 = (25{,}5)(V_{\text{sort.}} - 180) \quad \text{d'où} \quad V_{\text{sortie}} = 443 \text{ m/s}.$$

13.21 On essaye en laboratoire un turbo propulseur dans des conditions simulant l'altitude où la pression atmosphérique est $p = 37{,}6$ kPa (absolus), la température $T = 238{,}3$ K et la masse volumique atmosphérique $\rho = 0{,}55$ kg/m^3. Si la section de sortie du moteur est de 1 400 cm^2 et que la pression de sortie est la pression atmosphérique, quelle est le nombre de Mach N_M si la poussée brute est de 6 540 N? (Utiliser $k = 1{,}33$.)

Solution

Puisque dans l'équation (B) du problème 12.18, $p_3 = p_4$ et $V_3 = 0$:

$$F = W_s V_s / g = (w A_s V_s) V_s / g \quad \text{ou} \quad 6\,540 = 0{,}55(0{,}14) V_e^2 \quad \text{soit} \quad V_e = 291 \text{ m/s}.$$

Nombre de Mach $N_M = V_s / c = V_s / \sqrt{krT} = 291 / \sqrt{1{,}33(287{,}1)(283{,}3)} = 0{,}96.$

13.22 Dans le problème 13.21, quelle serait la poussée brute si la pression de sortie était égale à 69 kPa (abs). et si le nombre de Mach valait 1,00? (Utiliser $k = 1{,}33$.)

Solution

Pour calculer la vitesse de sortie dans les nouvelles conditions de sortie, on doit calculer la température de sortie à partir de

$$T_s/238{,}5 = (0{,}69/0{,}376)^{(k-1)/k},$$

d'où

$$T_s = 277 \text{ K}.$$

Alors, $V_s = N_M c = N_M\sqrt{krT} = 1{,}00\sqrt{1{,}33(287{,}1)(277)} = 325$ m/s
De plus, on doit calculer la masse volumique à la sortie à partir de

$$(\rho_1/\rho_2)^k = p_1/p_2, \quad (\rho_e/0{,}55)^{1{,}33} = 0{,}69/0{,}376, \quad \rho_e = 0{,}869 \text{ kg/m}^3$$

En utilisant (*B*) du problème 13.18, on obtient :

$$F = 0{,}869(0{,}14)(325)^2 + 0{,}14(0{,}69 - 0{,}376)10^5 - 0 = 17\,240 \text{ N}.$$

13.23 Un moteur de fusée brûle son combustible à la vitesse de 67,6 N/s. Les gaz d'échappement sortent de la fusée avec une vitesse relative de 980 m/s et une pression égale à la pression atmosphérique. La tuyère d'échappement a une surface de 320 cm^2 et le poids brut de la fusée est de 2,2 kN. À l'instant considéré, le moteur de la fusée produit 2 000 kW. Quelle est la vitesse de la fusée?

Solution

Pour une fusée, il n'entre pas d'air dans l'appareil, et les termes relatifs à la section 1 de la formule (*B*) du problème 13.18 sont nuls. De plus, puisque la pression de sortie est la pression atmosphérique, $p_3 = p_4$. Ainsi la poussée :

$$F_T = (W_s/g)V_s = (0{,}067\,6/9{,}807)980 = 6{,}75 \text{ kN}$$

et puisque 2 000 kW $= F_T V_{\text{fusée}}$ on a $V_{\text{fusée}} = 296$ m/s.

13.24 En admettant que la traînée est fonction de la densité, de la viscosité, de l'élasticité et de la vitesse du fluide, et d'une aire caractéristique, montrer que la traînée est fonction du nombre de Mach et du nombre de Reynolds (voir aussi chapitre 6, les problèmes 6.9 et 6.16).

Solution

Ainsi qu'on l'a montré au chapitre 6, l'analyse dimensionnelle va donner la relation cherchée, comme suit

$$F_D = f_1(\rho, \mu, E, V, A)$$

ou

$$F_D = C\rho^a \mu^b E^c V^d L^{2e}$$

Alors, en dimensions, $\text{F}^1\text{L}^0\text{T}^0 = (\text{F}^a\text{T}^{2a}\text{L}^{-4a})(\text{F}^b\text{T}^b\text{L}^{-2b})(\text{F}^c\text{L}^{-2c})(\text{L}^d\text{T}^{-d})\text{L}^{2e}$

et

$$1 = a + b + c, \quad 0 = -4a - 2b - 2c + d + 2c, \quad 0 = 2a + b - d$$

En résolvant en fonction de *b* et *c*, on obtient,

$$a = 1 - b - c, \quad d = 2 - b - 2c, \quad e = 1 - b/2$$

En reportant, $F_D = C\rho^{1-b-c}\mu^b E^c V^{2-b-2c} L^{2-b}$.

Exprimant cette équation sous sa forme couramment utilisée, on obtient,

$$F = CA\rho V^2 \left(\frac{\mu}{L\rho V}\right)^b \left(\frac{E}{\rho V^2}\right)^c$$

$$F = A\rho V^2 f_2(R_\text{E}, N_\text{M})$$

Cette équation montre que la traînée d'objets de forme et d'orientation données ne dépend que de leur nombre de Reynolds et de Mach.

Pour les fluides incompressibles, le nombre de Reynolds a l'effet dominant, et l'effet du nombre de Mach N_M est soit petit soit négligeable; ainsi la traînée n'est fonction que du nombre de Reynolds R_E seul. (Voir les diagrammes F et G de l'annexe.) En effet, pour les petites valeurs de N_M, un fluide peut être considéré comme étant incompressible en ce qui concerne du moins le coefficient de traînée.

Quand le nombre de Mach N_M est égal ou supérieur à 1,0 (pour des vitesses du fluide égales ou supérieures à celles du son) le coefficient de traînée est fonction de N_M seul. (Voir le diagramme H de l'annexe.) Cependant, il se produit souvent des cas où le coefficient de traînée dépend de R_E et de N_M à la fois.

On peut faire un raisonnement analogue en ce qui concerne le coefficient de portance. L'utilisation du théorème en π de Buckingham est à conseiller.

13.25 Un vent de 22,5 m/s vient frapper un panneau de 1,8 m par 2,4 m normalement. Si la pression atmosphérique est normale, quelle est la force agissant sur le panneau ($w = 11{,}8$ N/m^3)?

Solution

Pour un petit jet de fluide venant frapper une grande plaque au repos, on a vu que la force exercée par le fluide est :

$$(\text{force})_x = \Delta(MV_x) = (w/g)(AV_x)V_x = \rho A V_x^2$$

La plaque immobile considérée intéresse une grande quantité d'air. La quantité de mouvement n'est pas réduite à zéro dans la direction X comme c'était le cas pour un jet d'eau. Des expériences effectuées avec des plaques se déplaçant dans un fluide à différentes vitesses ont montré que le coefficient de traînée varie avec le rapport de la largeur à la longueur, et que sa valeur est pour l'essentiel constante pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1 000. (Voir le diagramme F, annexe). Il importe peu que l'objet se déplace dans le fluide ou qu'il soit immobile et que ce soit le fluide qui se déplace le long de l'objet immobile; les coefficients de traînée et les forces de traînée sont les mêmes dans les deux cas. C'est la vitesse relative qui compte.

Le coefficient (C_D) s'emploie dans l'équation suivante :

$$\text{force } F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}.$$

On l'écrit quelquefois en faisant apparaître la hauteur due à la vitesse, comme suit :

$$\text{force } F = C_D w A \frac{V^2}{2g}$$

En employant $C_D = 1{,}20$ ainsi que l'indique le diagramme F, la force

$$F = 1{,}20\left(\frac{11{,}8}{9{,}81}\right)(4{,}32)\frac{(22{,}5)^2}{2} = 1\,580 \text{ N}.$$

13.26 Une plaque mince, de 1,2 sur 1,2 m se déplace à 6,7 m/s normalement à son plan. À la pression normale et pour une température de l'air de 20 °C, calculer la résistance de la plaque (*a*) se déplaçant dans l'air, (*b*) se déplaçant dans de l'eau à 15 °C ($w = 11{,}8$ N/m^3).

Solution

(*a*) Le diagramme F indique $C_D = 1{,}16$ pour un rapport longueur/largeur = 1.
La traînée $= C_D \rho A \dfrac{V^2}{2} = 1{,}16\left(\dfrac{11{,}8}{9{,}81}\right)(1{,}2 \times 1{,}2)\dfrac{6{,}7^2}{2} = 45$ N

(*b*) La traînée $= C_D \rho A \dfrac{V^2}{2} = 1{,}16(1\,000)(1{,}2 \times 1{,}2)\dfrac{6{,}7^2}{2} = 37\,500$ N $= 37{,}5$ kN.

13.27 Un long fil de cuivre de 10 mm de diamètre, est tendu et exposé à un vent de 27,0 m/s, normal au fil. Calculer la traînée par mètre de longueur.

Solution

Pour de l'air à 20 °C, la table 1 donne $\rho = 1{,}20$ kg/m^3 et $\nu = 1{,}49 \times 10^{-5}$ m^2/s. Alors,

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{27 \times 10 \times 10^{-3}}{1{,}49} \times 10^5 = 18\,120$$

D'après le diagramme F, $C_D = 1{,}30$. Alors,

$$\text{Traînée} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = 1{,}30(1{,}20)(1 \times 0{,}01)\frac{(27)^2}{2} = 5{,}69 \text{ N par m de longueur.}$$

13.28 Une plaque de 1,0 m par 1,2 m se déplace à 13,5 m/s dans de l'air immobile en faisant un angle de 12° avec l'horizontale. En utilisant un coefficient de traînée $C_D = 0{,}17$ et un coefficient de portance $C_L = 0{,}72$, calculer (*a*) la résultante de la force exercée par l'air sur la plaque, (*b*) la force due au frottement et (*c*) la puissance nécessaire en W pour maintenir le mouvement de la plaque (Utiliser $\rho = 1{,}200$ kg/m^3.)

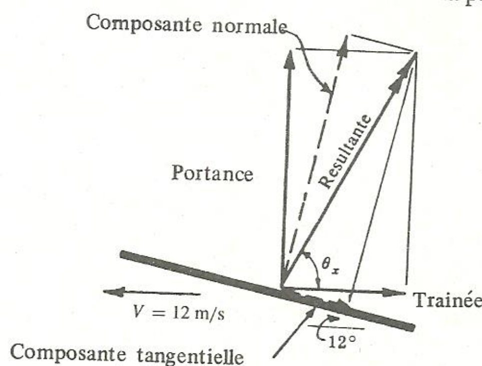


Fig. 13-13

Solution

(*a*) $\text{Traînée} = C_D(\rho)A\frac{V^2}{2} = 0{,}17(1{,}202)(1{,}2)\frac{(13{,}5)^2}{2} = 22{,}4 \text{ N}$

$\text{Portance} = C_L \rho A \frac{V^2}{2} = 0{,}72(1{,}202)(1{,}2)\frac{(13{,}5)^2}{2} = 95 \text{ N}$

Se reportant à la figure 13-13 la résultante de la traînée et de la portance est

$$R = \sqrt{(22{,}4)^2 + (95)^2} = 97{,}6 \text{ N}$$

agissant sur la plaque à $\theta_x = \tan^{-1} 95/22{,}4 = 76°44'$.

(*b*) La force résultante aurait aussi pu être décomposée en une composante normale et une composante de frottement (représentée en pointillé sur la figure). D'après le triangle vectoriel,

$$\text{composante de frottement} = R = \cos(\theta_x + 12°) = (97{,}5)(0{,}022\,1) = 2{,}15 \text{ N.}$$

(*c*) Puissance = (force dans la direction du mouvement × vitesse) = $(22{,}4 \times 13{,}5) \approx 300$ W.

13.29 Si un avion pèse 17,8 kN et a des ailes d'une superficie de 28 m^2, quel doit être *l'angle d'attaque* des ailes avec l'horizontale, à la vitesse de 160 km/h? Supposer que le coefficient de portance varie linéairement de 0,35 à 0° à 0,80 à 6° et utiliser pour l'air $\rho = 1{,}20$ kg/m^3.

Solution

Pour assurer l'équilibre dans la direction verticale, $\Sigma Y = 0$. Ainsi portance − poids = 0, où

$$\text{poids} = C_L \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{soit} \quad 17\,800 = C_L(1{,}20)(28)\frac{(160 \times 1\,000/3\,600)^2}{2}$$

d'où $C_L = 0{,}535$.

Par interpolation entre 0° et 6°, l'angle d'attaque = 2,5°.

13.30 Quelle doit être la surface des ailes d'un avion de 22,2 kN volant avec un *angle d'attaque* de 5° à 27 m/s? Utiliser les coefficients donnés dans le problème 13.29.

Solution

D'après les données (ou d'après une courbe), $C_L = 0{,}725$ pour 5° par interpolation. Comme dans le problème 13.29,

$$\text{poids} = \text{portance} \quad \text{soit} \quad 22\,200 = 0{,}725(1{,}200)A(27)^2/2,$$

d'où $A = 69{,}8 \text{ m}^2$.

13.31 Un profil d'aile de 37 m² de surface a un angle d'attaque de 6° et se déplace à 25 m/s. Si le coefficient de traînée varie linéairement de 0,040 à 4° à 0,120 à 14°, quelle est la puissance nécessaire pour maintenir cette vitesse dans de l'air à 4° C et à 0,90 bar de pression absolue?

Solution

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{0{,}90 \times 10^5}{287{,}1(273+4)} = 1{,}132 \text{ kg/m}^3 \text{ pour l'air}$$

Pour un angle d'attaque de 6°, $C_D = 0{,}056$ par interpolation, et :

$$\text{traînée} = C_D \rho A V^2/2 = 0{,}056(1{,}132 \times 37)(25)^2/2 = 733 \text{ N}$$
$$\text{puissance} = (733 \text{ N})(25 \text{ m/s}) = 18\,325 \text{ W} \approx 18{,}3 \text{ kW}.$$

13.32 Dans le problème précédent, pour un coefficient de portance de 0,70 et une longueur de corde de 1,50 m, déterminer (*a*) la portance et (*b*) les nombres de Reynolds et de Mach.

Solution

(*a*) Portance $F_L = C_L \rho A V^2/2 = 0{,}70(1{,}132)(37)(25)^2/2 = 9\,160$ N.

(*b*) La longueur caractéristique figurant dans l'expression du nombre de Reynolds est la longueur de la corde. Alors,

$$R_E = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{25 \times 1{,}5 \times 1{,}132}{1{,}73 \times 10^{-5}} = 2\,450\,000$$

On se rappellera que le coefficient de viscosité absolue ne varie pas avec les variations de pression

$$N_M = V/\sqrt{E/\rho} = V/\sqrt{krT} = 25/\sqrt{(1{,}4)(287{,}1)(277)} = 0{,}075$$

13.33 Un profil d'aile de 25 m² se déplace avec la vitesse de 26,0 m/s. Si on a besoin d'une puissance de 10 kW pour maintenir le mouvement de l'aile, quel est l'angle d'attaque employé, en se servant de la variation du même coefficient de traînée que dans le problème 13.31 ? Prendre $w = 11{,}0 \text{ N/m}^3$.

Solution

$$10\,000 = (\text{force})(26 \text{ m/s}) \quad \text{force} = 385 \text{ N}$$
$$\text{force} = C_D \rho A V^2/2 \quad \text{soit} \quad 385 = C_D(11{,}0/9{,}81)(25)(26)^2/2,$$

d'où $C_D = 0{,}040\,6$.

En utilisant les données concernant l'angle d'attaque et C_D, et en interpolant on trouve un angle d'attaque de 4,1°.

13.34 Les côtés d'un fourgon ont une surface de 55 m^2. Calculer la force résultante agissant sur le côté du fourgon quand le vent souffle à 4,5 m/s normalement à la surface, (*a*) quand le fourgon est au repos et (*b*) quand le fourgon se déplace à la vitesse de 13,5 m/s dans une direction perpendiculaire à celle du vent. Pour (*a*) utiliser $C_D = 1{,}30$ et pour (*b*) utiliser $C_D = 0{,}25$ et $C_L = 0{,}60$ ($\rho = 1{,}22$ kg/m^3).

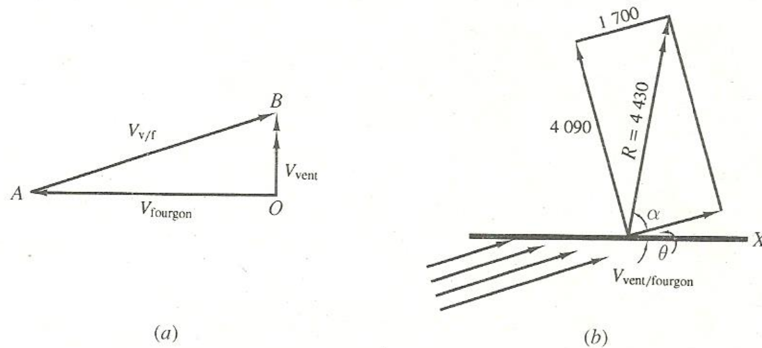


Fig. 13-14

Solution

(*a*) La force agissant normalement à la surface $= C_D(\rho/2)AV^2$. Alors,

$$\text{force résultante} = 1{,}30(1{,}22/2)(55)(4{,}5)^2 = 883 \text{ N} \quad \text{normale à la surface}$$

(*b*) Il va être nécessaire de calculer la vitesse relative du vent par rapport au fourgon. D'après la cinématique,

$$V_{vent} = V_{vent/fourgon} +\!\!\rightarrow V_{fourgon}$$

La figure 13-14(*a*) représente cette relation vectorielle, c'est-à-dire

$$OB = OA +\!\!\rightarrow AB = 13{,}5 +\!\!\rightarrow V_{v/f}$$

Ainsi la vitesse relative $= \sqrt{(13{,}5)^2 + (4{,}5)^2} = 14{,}25$ m/s, vers le haut à un angle de $\theta = \tan^{-1} 4{,}5/13{,}5 = 18{,}4°$.

La composante de la force résultante normale à la vitesse relative du fourgon par rapport au vent est :

$$\begin{aligned}\text{portance} &= C_L(\rho/2)AV^2\\ &= 0{,}60(1{,}22/2)(55)(14{,}25)^2\\ &= 4\,090 \text{ N} \quad \text{normale à la vitesse relative.}\end{aligned}$$

La composante de la force résultante parallèle à la vitesse relative du vent par rapport au fourgon est :

$$\begin{aligned}\text{traînée} &= C_D(\rho/2)AV^2\\ &= 0{,}25(1{,}22/2)(55)(14{,}25)^2\\ &= 1\,700 \text{ N} \quad \text{parallèlement à la vitesse relative.}\end{aligned}$$

Se reportant à la figure 13-14 (*b*), la force résultante $= \sqrt{(4\,090)^2 + (1\,700)^2} = 4\,430$ N avec un angle $\alpha = \tan^{-1}(4\,090/1\,700) = 67{,}4°$. Ainsi l'angle avec l'axe longitudinal (axe X) est $18{,}4° + 67{,}4° = 85{,}8°$.

13.35 Un cerf-volant pèse 11 N et a une surface de 0,75 m². La tension de la corde du cerf-volant est de 30 N quand la corde fait un angle de 45° avec l'horizontale. Pour un vent de 9,0 m/s, quels sont les coefficients de portance et de traînée si le cerf-volant prend une position faisant 8° avec l'horizontale? Considérer le cerf-volant comme étant une plaque plane et $w_{air} = 11{,}8$ N/m³.

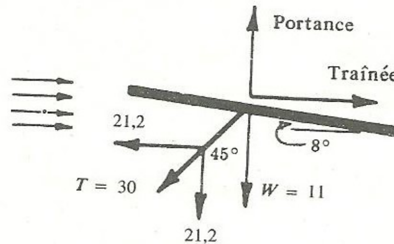


Fig. 13-15

Solution

La figure 13-15 représente les forces agissant sur le cerf-volant considéré comme système en équilibre. Les composantes de la tension sont chacune de 21,2 N.

D'après $\Sigma X = 0$, la traînée = 21,2 N.

D'après $\Sigma Y = 0$, la portance = 21,2 + 11 = 32,2 N.

La traînée $= C_D \rho A V^2/2$, $21{,}2 = C_D(11{,}8/9{,}81)(0{,}75)(9)^2/2$ $C_D = 0{,}58$.

La portance $= C_L \rho A V^2/2$, $32{,}2 = C_L(11{,}8/9{,}81)(0{,}75)(9)^2/2$ $C_L = 0{,}88$.

13.36 Un homme pesant 756 N s'élance d'un avion avec un parachute de 5,50 m de diamètre. Supposant que le coefficient de traînée soit égal à 1,00 et en ne tenant pas compte du poids du parachute, quelle sera la vitesse limite de descente?

Solution

Les forces agissant sur le parachute sont le poids agissant vers le bas et la traînée agissant vers le haut. Pour avoir l'équilibre $\Sigma Y = 0$ (vitesse constante),

$$F = \frac{C_D \rho A V^2}{2}, \quad 756 = \frac{1{,}00(1{,}20)(\pi 2{,}75^2)V^2}{2}, \quad V = 7{,}27 \text{ m/s}$$

13.37 Une bille d'acier, de 3 mm de diamètre et de poids spécifique 77 kN/m³, tombe dans de l'huile de densité 0,908 et de viscosité cinématique $1{,}46 \times 10^{-4}$ m²/s. Quelle est la vitesse limite de la bille?

Solution

Les forces agissant sur la bille d'acier sont le poids dirigé vers le bas, la poussée hydrostatique dirigée vers le haut, et la traînée dirigée vers le haut. Pour une vitesse constante, $\Sigma Y = 0$, et, transposant les termes;

$$\text{poids de la sphère} - \text{poussée hydrostatique} = \text{traînée}$$

soit

$$w_s\ (\text{volume}) - w_0\ (\text{volume}) = \frac{C_D \rho A V^2}{2}$$

En utilisant (N/m³) × m³ = poids,

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 10^{-9}(77\,000 - 0{,}908 \times 9\,810) = C_D\left(\frac{0{,}908 \times 9\,810}{9{,}81}\right)\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 10^{-6}\frac{V^2}{2}$$

En prenant pour C_D la valeur de 3,00 (voir le diagramme F, sphères) et en résolvant,

$$V^2 = 0{,}30/C_D = 0{,}100 \quad \text{et} \quad V = 0{,}316 \text{ m/s}$$

Comparons à la valeur C_D prise ci-dessus, en calculant le nombre de Reynolds et en utilisant le diagramme F,

$$R_E = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}316 \times 0{,}003}{1{,}46 \times 10^{-4}} = 6{,}5 \quad \text{et} \quad C_D = 6{,}0 \text{ (augmenter } C_D)$$

En recalculant et en vérifiant avec $C_D = 8{,}0$ pour connaître l'effet d'une plus grande valeur de C_D, on obtient :

$$V^2 = 0{,}30/(8) = 0{,}037\,5 \qquad V = 0{,}194 \qquad R_E = 3{,}98 \qquad C_D = 8{,}7 \text{ (augmenter } C_D)$$

En essayant $C_D = 9{,}5$,

$$V^2 = 0{,}30/9{,}5 = 0{,}031\,6 \qquad V = 0{,}178 \qquad R_E = 3{,}65 \qquad C_D = 9{,}5 \text{ (correct)}$$

Par conséquent, la vitesse limite = 0,178 m/s.
Si le nombre de Reynolds avait été inférieur à 0,60, l'équation donnant la traînée aurait pu s'écrire

$$C_D \rho A V^2/2 = (24/R_E)\rho A V^2/2 = (24\nu/Vd)\rho(\pi d^2/4)V^2/2.$$

Puisque $\mu = \rho\nu$, la traînée = $3\pi\mu\, dV$.

13.38 Une sphère de plomb de 25 mm de diamètre, de poids spécifique 111 kN/m³ se déplace vers le bas dans de l'huile à la vitesse constante de 0,357 m/s. Calculer la viscosité absolue de l'huile si sa densité est de 0,93.

Solution

Comme dans le problème précédent, mais en utilisant : poids = (kN/m³) × m³,

$$(w_s/ - w_0)(\text{volume}) = C_D \rho A V^2/2$$

Alors, $(111 - 0{,}93 \times 9{,}79)(4\pi/3)(0{,}012\,5)^3 = C_D(0{,}93 \times 9{,}79/9{,}81)\pi(0{,}012\,5)^2(0{,}357)^2/2$ et $C_D = 28{,}7$
D'après le diagramme F, pour $C_D = 2{,}87$; $R_E = 0{,}85$ et

$$0{,}85 = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(0{,}357)(0{,}025)}{\nu} \quad \text{d'où} \quad \nu = 0{,}010\,5 \text{ m}^2/\text{s}$$

Ainsi, $\mu = \nu\rho = 0{,}010\,5(0{,}93 \times 1\,000) = 9{,}75 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$

13.39 Une sphère de 12,5 mm de diamètre, s'élève dans de l'huile à la vitesse limite de 37 mm/s. Quelle est le poids spécifique de la sphère si la densité de l'huile est de 0,917 et si sa viscosité absolue est de 0,034 Pa · s?

Solution

Pour une vitesse constante vers le haut, $\Sigma Y = 0$ et

$$\text{poussée hydrostatique} - \text{poids} - \text{traînée} = 0$$
$$(4\pi/3)(6{,}25/1\,000)^3(917 \times 9{,}81 - w_s) = C_D(917)\pi(6{,}25/1\,000)^2(0{,}037)^2/2$$
$$(8\,996 - w_s) = 75{,}32 C_D \qquad (1)$$

Le coefficient de traînée peut être évalué à l'aide du diagramme F et du nombre de Reynolds.

$$\text{Le nombre de Reynolds} = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{(0{,}037)(12{,}5/1\,000)(917)}{0{,}034} = 12{,}5$$

Alors d'après le diagramme F, $C_D = 3{,}9$ (pour une sphère) et, d'après (1),

$$w_s = 8\,996 - 75{,}32 \times 3{,}9 = 8\,700 \text{ N/m}^3 = 8{,}70 \text{ kN/m}^3$$
$$(\rho_s = 887 \text{ kg/m}^3)$$

13.40 Pour l'écoulement laminaire pour des nombres de Reynolds faibles, montrer que le coefficient de traînée pour une sphère est égal au quotient de 24 par le nombre de Reynolds (représenté graphiquement dans le diagramme F de l'annexe).

Solution

La traînée $F_D = C_D \rho A V^2/2$, comme on l'a vu précédemment.

Pour l'écoulement laminaire, la traînée dépend de la viscosité et de la vitesse du fluide et du diagramme d de la sphère. Ainsi,

$$F_D = f(\mu, V, d) = C\mu^a V^b d^c$$

Alors,
$$F^1L^0T^0 = (F^aT^aL^{-2a})(L^bT^{-b})(L^c)$$

et,
$$1 = a, \qquad 0 = -2a + b + c, \qquad 0 = a - b$$

d'où $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$. Ainsi, la traînée $F_D = C(\mu\, Vd)$. G.G. Stokes a démontré mathématiquement que $C = 3\pi$, fait qui a été confirmé par de nombreuses expériences.

On peut à présent égaler les deux expressions de la traînée, écrivant $\frac{1}{4}\pi d^2$ pour l'aire projetée A et résolvant ensuite en C_D.

$$3\pi\mu V d = \frac{C_D \rho(\frac{1}{4}\pi d^2)V^2}{2} \quad \text{et} \quad C_D = \frac{24\mu}{V d \rho} = \frac{24}{R_E}$$

13.41 Pour l'écoulement laminaire d'un fluide le long d'une plaque mince, établir l'expression de l'épaisseur de la couche limite, en admettant que l'équation de la distribution des vitesses est $v = V\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$. (Voir la figure 13-16.)

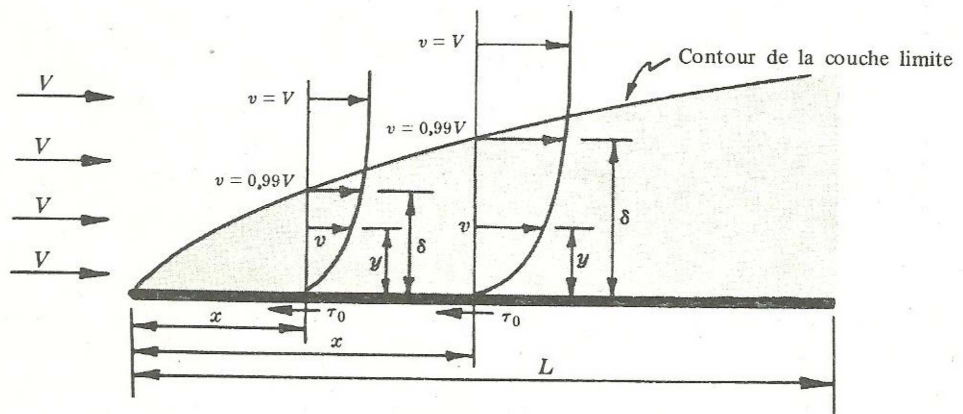


Fig. 13-16

Solution

On admet que l'écoulement est régulier ($\partial v/\partial t = 0$), que la vitesse en dehors de la couche limite est uniformément égale à V, que δ est très petit par rapport à la distance x et que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}y = 0 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$, à la fois

à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite. De plus, par définition, on considère que le bord de la couche limite est le lieu géométrique des points pour lesquels la vitesse est 0,99 fois la vitesse non perturbée V.

La masse traversant une section quelconque de la couche limite est, par unité de largeur, $\int_0^\delta \rho v(\mathrm{d}y \times 1)$ et la variation de vitesse en tout point est $(V - v)$. Puisque les forces agissant sur la section s'annulent mutuellement, n'apportant ainsi aucune contribution à la variation de la quantité de mouvement, celle-ci est provoquée exclusivement par la contrainte tangentielle visqueuse $\tau_0\,\mathrm{d}A$ ou $\tau_0(\mathrm{d}x \times 1)$. D'après les considérations précédentes, la variation de la quantité de mouvement par unité de temps est

$$\int_0^\delta \rho(V - v)v(\mathrm{d}y \times 1)$$

Cette expression est égale à l'action de la contrainte tangentielle visqueuse pendant l'unité de temps, ou traînée/unité de largeur,

$$F'_D = \int_0^x \tau_0(\mathrm{d}x \times 1) = \int_0^\delta \rho(V - v)v(\mathrm{d}y \times 1).$$

En substituant la distribution de vitesse parabolique dans l'équation, on obtient

$$F'_D = \int_0^\delta \rho(V - 2yV/\delta + y^2V/\delta^2)(V)(2y/\delta - y^2/\delta^2)\mathrm{d}y$$

$$\rho V^2 \int_0^\delta (1 - 2y/\delta + y^2/\delta^2)(2y/\delta - y^2/\delta^2)\mathrm{d}y = \frac{2}{15}\rho V^2\delta \qquad (A)$$

Pour obtenir une expression utile de δ, considérons que $\tau_0\,\mathrm{d}x =$ la différentielle de la traînée unitaire dF'_D et que l'écoulement est laminaire. Alors dans $\tau_0 = \mu(\mathrm{d}v/\mathrm{d}y)$, le terme

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[V(2y/\delta - y^2/\delta^2)] = \frac{2V}{\delta}(1 - y/\delta) \qquad (B)$$

En reportant la valeur ci-dessus dans $\mu(\mathrm{d}v/\mathrm{d}y)_0 = \mathrm{d}F'_D/\mathrm{d}x$ et n'oubliant pas que la contrainte tangentielle visqueuse est τ_0 quant $y = 0$, nous obtenons $\mu(2V/\delta) = \frac{2}{15}\,\rho V^2(\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}x)$ ou

$$\int_0^\delta \delta\,\mathrm{d}\delta = \frac{15\mu}{\rho V}\int_0^x \mathrm{d}x$$

ce qui donne

$$\delta^2 = \frac{30\mu x}{\rho V} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{xV}} = \frac{5,48}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (C)$$

La solution plus précise de Blasius donne 5,20 comme numérateur de (C).

13.42 Pour l'écoulement laminaire, établir l'expression (*a*) de la contrainte tangentielle visqueuse à la frontière (plaque) du problème précédent et (*b*) pour le coefficient de traînée local.

Solution

(*a*) D'après (B) du problème 13.41, quand $y = 0$, $\tau_0 = 2\mu V/\delta$. Alors, utilisant la valeur de δ dans (C) ci-dessus,

$$\tau_0 = \frac{2\mu V}{\sqrt{30\mu x/\rho V}} = 0,365\sqrt{\frac{\rho V^3\mu}{x}} = 0,365\frac{\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (A)$$

Les résultats d'expériences donnent une formule plus précise

$$\tau_0 = 0,33\sqrt{\frac{\rho V^3\mu}{x}} = 0,33\frac{\rho V^2}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (B)$$

(*b*) Le coefficient de traînée local C_{D_x}, s'obtient en égalant $\tau_0 A$ à la traînée locale, c'est-à-dire,

$$F_D = \tau_0 A = C_{D_x} \rho A V^2/2$$
$$C_{D_x} = \frac{2\tau_0}{\rho V^2} = \frac{0{,}66 \rho V^2}{\rho V^2 \sqrt{R_{E_x}}} = \frac{0{,}66}{\sqrt{R_{E_x}}} \qquad (C)$$

On peut voir que la traînée totale s'exerçant sur un côté de la plaque est la somme de tous les termes en ($\tau_0\, dA$) soit

$$F_D = \int_0^L \tau_0 (dx \times 1) = \int_0^L 0{,}33\sqrt{\rho V^3 \mu}(x^{-1/2}\, dx) = 0{,}33(2L^{1/2})\sqrt{\rho V^3 \mu}$$

Sous la forme habituelle, $F_D = C_D \rho A V^2/2$. Dans ce cas-là, $A = L \times 1$, ainsi

$$C_D \rho L V^2/2 = 0{,}33(2)\sqrt{\rho V^3 \mu L} \quad \text{et} \quad C_D = 1{,}32\sqrt{\frac{\mu}{\rho V L}} = \frac{1{,}32}{\sqrt{R_E}} \qquad (D)$$

13.43 Une plaque mince de 1,20 m par 1,20 m est maintenue parallèlement à un courant d'air se déplaçant à la vitesse de 3 m/s (conditions normales). Calculer (*a*) la traînée de surface de la plaque, (*b*) l'épaisseur de la couche limite *au bord de fuite* et (*c*) la contrainte tangentielle au bord de fuite.

Solution

(*a*) Puisque le coefficient de traînée du «frottement pelliculaire» varie avec le nombre de Reynolds, on doit calculer d'abord R_E.

$$R_E = VL/\nu = 3(1{,}2)/(1{,}48 \times 10^{-5}) = 243\,000 \quad \text{(domaine laminaire).}$$

En admettant que les conditions existant dans la couche limite sont laminaires sur toute la plaque,

$$\text{coefficient } C_D = 1{,}328/\sqrt{R_E} = 1{,}328/\sqrt{243\,000} = 0{,}002\,69$$

La traînée D (deux côtés) $= 2C_D \rho A V^2/2 = (0{,}002\,69)(1{,}22)(1{,}2 \times 1{,}2)(3)^2$
$= 0{,}042$ N

(*b*) $$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}20}{\sqrt{R_{E_x}}} y \delta = \frac{5{,}20(1{,}2)}{\sqrt{243\,000}} = 0{,}012\,6 = 12{,}6 \text{ mm.}$$

(*c*) $$\tau = 0{,}33\frac{\mu V}{x}\sqrt{R_{E_x}} = 0{,}33\frac{(1{,}84 \times 10^{-5}) \times 3}{1{,}2}\sqrt{243\,000} = 0{,}007\,4 \text{ Pa.}$$

13.44 Une plaque lisse de 3,0 m par 1,2 m se déplace dans l'air (15,6 °C) avec une vitesse relative de 1,2 m/s, parallèlement à la surface de la plaque dans le sens de la longueur. Calculer la traînée appliquée à une face de la plaque (*a*) en admettant que l'écoulement est laminaire, et (*b*) en admettant que l'écoulement est turbulent sur toute la surface de la plaque. (*c*) Pour des conditions d'écoulement laminaire, donner une estimation de l'épaisseur de la couche limite au milieu de la plaque et au *bord de fuite*.

Solution

(*a*) On calcule le nombre de Reynolds : $R_E = VL/\nu = 1{,}2(3)/(1{,}47 \times 10^{-5}) = 245\,000$.

Pour des conditions d'écoulement laminaire $C_D = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{R_E}} = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{245\,000}} = 0{,}002\,68$

(voir aussi le diagramme *G*).

La traînée $= C_D \rho A V^2/2 = 0{,}002\,68(1{,}22)(3 \times 1{,}2)(1{,}2)^2/2 = 0{,}008\,5$ N $= 8{,}5$ mN.

(*b*) Pour des conditions d'écoulement turbulent, avec $R_E < 10^7$, $C_D = \dfrac{0{,}074}{R_E^{0{,}20}}$ (voir l'équation (*12*)).

Alors, $C_D = \dfrac{0{,}074}{(245\,000)^{0{,}20}} = \dfrac{0{,}074}{11{,}97} = 0{,}006\,18$ (voir aussi le diagramme G).

$$\text{La traînée} = C_D \rho A V^2/2 = 0{,}006\,18(1{,}22)(3 \times 1{,}2)(1{,}2)^2/2 = 0{,}019\,6 \text{ N}$$

(*c*) Pour $x = 1{,}5$ m, $R_{E_x} = 1{,}2(1{,}5)/(1{,}47 \times 10^{-5}) = 122\,500$.
Notons qu'on a calculé le nombre de Reynolds pour $L = x$ m. On appelle cette valeur du nombre de Reynolds le nombre de Reynolds local. Alors,

$$\delta = \frac{5{,}20x}{\sqrt{R_{E_x}}} = \frac{(5{,}20)1{,}5}{\sqrt{122\,500}} = 0{,}022\,2 = 22{,}2 \text{ mm}$$

Pour $x = 3$ m, $R_E = 245\,000$ et $\delta = \dfrac{5{,}20x}{\sqrt{R_{E_x}}} = \dfrac{5{,}20(3)}{\sqrt{245\,000}} = 0{,}031\,5 = 31{,}5$ mm

13.45 Une plaque lisse de 1,2 m de large par 24,4 m de long, se déplace dans l'eau à 20 °C dans le sens de la longueur. La traînée s'exerçant sur la plaque (des deux côtés) est de 8,0 kN. Calculer (*a*) la vitesse de la plaque, (*b*) l'épaisseur de la couche limite *au bord de fuite*, et (*c*) la longueur de la couche limite laminaire si les conditions de l'écoulement laminaires existent *au bord d'attaque*.

Solution

(*a*) Vu la longueur de la plaque et que le fluide est l'eau, on peut admettre que l'écoulement est turbulent avec une bonne marge de sécurité. En examinant le diagramme 4, admettons que $C_D = 0{,}002$.

$$\text{La traînée} = 2C_D\rho A V^2/2, \quad 8\,000 = C_D(1\,000)(1{,}2 \times 24)V^2$$

et
$$V^2 = \frac{0{,}273}{C_D} = \frac{0{,}273}{0{,}002} \quad \text{d'où} \quad V = 11{,}7 \text{ m/s.}$$

Le nombre de Reynolds $R_E = (11{,}7)(24{,}4)/(9{,}84 \times 10^{-7}) = 2{,}90 \times 10^8$. Ainsi, la couche limite est turbulente, comme on l'a supposé. Continuant

$$C_D = \frac{0{,}455}{[\log(2{,}90 \times 10^8)]^{2{,}58}} = 0{,}001\,84, \qquad V^2 = \frac{0{,}273}{0{,}001\,84} = 148{,}4 \qquad V = 12{,}2 \text{ m/s}$$

calculant à nouveau le nombre de Reynolds, on obtient 303×10^6; alors

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log 303\ 10^6)^{2{,}58}} = 0{,}001\,83 \quad \text{et} \quad V = 12{,}2 \text{ m/s}$$

cette valeur correspond à la précision espérée.

(*b*) L'épaisseur de la couche limite pour l'écoulement turbulent peut être estimée en utilisant l'équation (15)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}22}{R_E^{0{,}167}} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{0{,}22(24{,}4)}{(303 \times 10^6)^{0{,}167}} = 0{,}206 \text{ m}$$

(*c*) Admettons que le nombre de Reynolds critique vaut à peu près 500 000, c'est-à-dire la limite inférieure du domaine de transition

$$R_{E_c} = \frac{Vx_c}{\nu}, \qquad 500\,000 = \frac{12{,}2x_c}{9{,}84 \times 10^{-7}} \quad \text{d'où} \quad x_c = 0{,}040 \text{ m}$$

13.46 La plaque de 3 m par 1,2 m du problème 13.44 est maintenue dans de l'eau (10 °C) se déplaçant à 1,2 m/s parallèlement à sa longueur. En admettant que les conditions sont celles de l'écoulement laminaire pour la couche limite au bord d'attaque de la plaque, (*a*) situer le point où l'écoulement à l'intérieur de la

couche limite passe de l'état laminaire à l'état turbulent, (*b*) donner une estimation de l'épaisseur de la couche limite en ce point, et (*c*) calculer la résistance due au frottement s'exerçant sur la plaque.

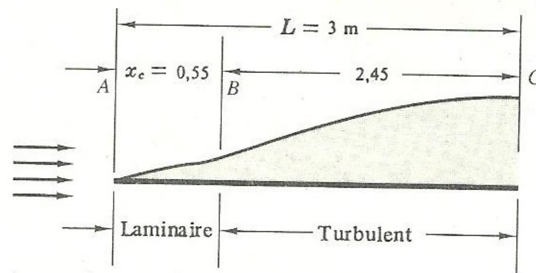


Fig. 13-17

Solution

(*a*) Le nombre de Reynolds $R_E = VL/\nu = 1{,}2(3)/(1{,}31 \times 10^{-6}) = 2\,740\,000$.

Cette valeur du nombre de Reynolds indique que l'écoulement de la couche limite se situe dans la zone de transition. En admettant que la valeur critique du nombre de Reynolds est 500 000, la position du point où l'écoulement cesse d'être laminaire peut être estimé en utilisant

$$\frac{x_c}{L} = \frac{R_E \text{ critique}}{R_E \text{ pour toute la plaque}} \quad \text{ou} \quad x_c = 3\left(\frac{500\,000}{2\,740\,000}\right) = 0{,}55 \text{ m}$$

(*b*) L'épaisseur de la couche limite en ce point est estimée être

$$\delta_c = \frac{5{,}20 x_c}{\sqrt{R_{E_c}}} = \frac{5{,}20(0{,}55)}{\sqrt{500\,000}} = 0{,}004\,05 \text{ m} = 4{,}0 \text{ mm}$$

(*c*) La résistance due au frottement peut se calculer en ajoutant à la résistance provoquée par la couche limite laminaire jusqu'en x_c (dans la figure 13-17) la résistance provoquée par la couche limite turbulente, de B à C. Cette dernière valeur de la résistance s'obtient en calculant la résistance pour l'écoulement turbulent pour toute la plaque (A à C) moins la résistance de la couche turbulente fictive s'étendant de A à B.

(1) La résistance laminaire, de A à B, sur un côté, est :

$$\text{force de résistance} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{R_{E_c}}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{500\,000}}(1\,000)(1{,}2 \times 0{,}55)\frac{1{,}2^2}{2} = 0{,}89 \text{ N.}$$

(2) La résistance turbulente de A à C, si les conditions de l'écoulement étaient turbulentes sur toute la longueur de la plaque :

$$\text{résistance} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{(sur un côté)}$$

$$= \frac{0{,}074}{R_E^{0{,}20}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0{,}074}{(2\,740\,000)^{0{,}20}}(1\,000 \times 1{,}2 \times 3)\frac{1{,}2^2}{2} = 9{,}89 \text{ N}$$

(3) résistance turbulente fictive, de A à B :

$$\text{résistance} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{(sur un côté)}$$

$$= \frac{0{,}074}{R_{E_c}^{0{,}20}} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0{,}074}{(500\,000)^{0{,}20}}(1\,000 \times 1{,}2 \times 0{,}55)\frac{1{,}2^2}{2} = 2{,}55 \text{ N}$$

$$\text{résistance totale (deux côtés)} = 2[0{,}89 + (9{,}89 - 2{,}55)] = 16{,}5 \text{ N}$$

Si le nombre de Reynolds pour la plaque tout entière avait été supérieur à 10^7; il aurait fallu employer l'équation (*13*) du début de ce chapitre, dans la partie (2) ci-dessus.

On aurait pu obtenir une valeur pondérée de C'_D pour la plaque tout entière en égalant la résistance ci-dessus à l'expression de la résistance, comme suit :

$$\text{résistance totale} = 2C'_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{ou } 16{,}5 = 2C'_D(1\,000)(1{,}2 \times 3)\frac{1{,}2^2}{2} \quad \text{soit } C'_D = 0{,}003\,18.$$

13.47 Des mesures faites sur une sphère lisse de 150 mm de diamètre plongée dans un courant d'air (20 °C) ont donné pour la force assurant l'équilibre 1,1 N. Quelle était la vitesse de l'air ?

Solution

Résistance totale $= C_D \rho A V^2/2$, où C_D = coefficient de résistance d'ensemble.
Puisqu'on ne peut trouver directement ni le nombre de Reynolds ni C_D, admettons que $C_D = 1{,}00$. Alors,

$$1{,}1 = C_D(1{,}2)\frac{1}{4}\pi(0{,}15)^2(V^2/2), \qquad V^2 = \frac{104}{C_D}, \qquad V = 10{,}2 \text{ m/s}$$

Calculons, $R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{10{,}2(0{,}15)}{1{,}486 \times 10^{-5}} = 103\,000$. D'après le diagramme F, $C_D = 0{,}59$ (pour les sphères).
Alors, $V^2 = \dfrac{104}{0{,}59} = 176$, $V = 13{,}3$ m/s. En anticipant sur les résultats, prendre $V = 13{,}68$ m/s.
Recalculons $R_E = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{13{,}8(0{,}15)}{1{,}486 \times 10^{-5}} = 137\,900$. D'après le diagramme F, $C_D = 0{,}56$.
Alors, $V^2 = 104/0{,}56 = 185{,}7$, $V = 13{,}6$ m/s, (précision satisfaisante).

13.48 Calculer l'augmentation de pression produite par la fermeture instantanée d'une vanne sur un pipe-line.

Solution

Soit p' égal à la variation de pression due à la fermeture de la vanne. On peut utiliser l'équation de la conservation de la quantité de mouvement pour calculer la variation de la quantité de mouvement, soit

$$F_x = \frac{wQ}{g}(V_2 - V_1) \quad \text{dans la direction } x \qquad (A)$$

En ne tenant pas compte des frottements, la force compensée qui produit la variation de la quantité de mouvement du liquide dans le pipe-line est $p'A$. L'équation (A) s'écrit alors

$$-p'A = \frac{w(Ac)}{g}(0 - V_1) = \rho(AC)(0 - V_1) \qquad (B)$$

où ρAC représente la masse de liquide ayant sa quantité de mouvement modifiée et où c représente la vitesse de l'onde de pression. Cette onde de pression ramène la vitesse à zéro sur son passage dans chaque section. Alors,

$$p' = \rho c V_1 \qquad (C)$$

L'équation (C) peut s'écrire en fonction de la hauteur de pression h',

$$h' = \frac{cV_1}{g} \qquad (D)$$

13.49 Quelle est la formule donnant la vitesse de l'onde de pression provoquée par la fermeture rapide d'une vanne dans un pipe-line, en supposant la paroi rigide ?

Solution

Par «fermeture rapide» on entend toute durée $\leqslant 2L/c$. Pour établir l'expression de la vitesse c, on utilise les principes de conservation du travail et de l'énergie ainsi que celui de la quantité de mouvement.

L'énergie cinétique de l'eau va être transformée en énergie d'élasticité, comprimant ainsi l'eau. L'énergie cinétique est $MV_1^2/2 = \frac{1}{2}(wAL/g)V_1^2/2$ où A désigne la surface de la section transverse du tuyau et L sa longueur.

Le module d'élasticité cubique de l'eau est $E_B = \dfrac{-\Delta p}{(\Delta \text{ volume})/(\text{volume initial})}$ (Pa)

Ainsi la diminution de volume, Δ volume $= \dfrac{(\text{volume})(\Delta p)}{E_B} = \dfrac{(AL)(\rho g h)}{E_B}$

Le travail de compression = intensité moyenne de la pression multipliée par la réduction du volume, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(\rho AL)V_1^2 = \frac{1}{2}\rho g h(AL\rho g h/E_B) \qquad (A)$$

ou

$$h^2 = V_1^2 E_B/g^2\rho \qquad (B)$$

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement donne (en ne tenant pas compte du frottement),

$$MV_1 - \Sigma(F_x \, \mathrm{d}t) = MV_2, \quad -\rho g h A = (\rho Q)(0 - V_1), \quad \rho g h A = (\rho)(Ac)V_1$$

ou

$$h = cV_1/g \qquad (C)$$

Reportant dans (B) nous obtenons $C_1^2 V_1^2/g^2 = V^2 E_B/g^2\rho$ d'où

$$c = \sqrt{\frac{E_B}{\rho}} \qquad (D)$$

13.50 Établir la formule donnant la vitesse de l'onde de pression provoquée par la fermeture rapide d'une vanne dans un pipe-line, en supposant le tuyau non rigide.

Solution

Pour cette résolution, on doit prendre en considération l'élasticité des parois, en plus des facteurs pris en considération dans le problème précédent.

Pour le tuyau, le travail dépensé pour élargir les parois du tuyau est égal au produit de la force moyenne exercée sur les parois du tuyau par la déformation. D'après le diagramme du système en équilibre formé par la moitié de la section du tuyau, en utilisant $\Sigma Y = 0$, $2T = \rho dL = whdL$. De plus la déformation unité $\varepsilon = \sigma/E$ ou $\sigma = pr/t = whr/t$. (Voir la tension de circonférence au chapitre 2.) Dans cette étude, la hauteur h représente l'excès de la hauteur due à la pression par rapport à la normale, provoquée par la fermeture soudaine de la vanne.

$$\text{Le travail} = \text{force moyenne} \times \text{déformation} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, whdL\right)(2\pi r\varepsilon) \text{ en J.}$$

$$= \frac{1}{4}(whdL)(2\pi r)(whr/tE)$$

Ajoutant cette valeur à l'équation (A) du problème précédent, on obtient

$$\frac{1}{2}(wAL/g)V_1^2 = \frac{1}{2}wh(ALwh/E_B) + whdL(2\pi whr^2/tE)$$

qui après substitution de $h = cV_1/g$, de (C) du problème 13.49, donne

$$\frac{V_1^2}{g} = \frac{c^2V_1^2}{g^2}\left(\frac{w}{E_B} + \frac{wd}{tE}\right) = \frac{c^2V_1^2}{g}\left(\frac{\rho}{E_B} + \frac{\rho d}{tE}\right)$$

$$\text{Vitesse } c = \sqrt{\frac{1}{\rho(1/E_B + d/Et)}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho(1 + E_B d/Et)}}$$

13.51 Comparer les vitesses des ondes de pression circulant le long d'un tuyau rigide contenant (*a*) de l'eau à 15 °C (*b*) de la glycérine à 20 °C et (*c*) de l'huile de densité 0,800. Utiliser pour module cubique de la glycérine et de l'huile respectivement $4{,}34 \times 10^9$ et $1{,}38 \times 10^9$ Pa.

Solution

$$c = \sqrt{\frac{\text{module cubique d'élasticité en Pa}}{\text{masse volumique du fluide}}}$$

(*a*) $$c = \sqrt{\frac{2{,}16 \times 10^9}{1\,000}} = 1\,470 \text{ m/s}$$

(*b*) $$c = \sqrt{\frac{4{,}34 \times 10^9}{1{,}262 \times 1\,000}} = 1\,850 \text{ m/s}$$

(*c*) $$c = \sqrt{\frac{1{,}38 \times 10^9}{0{,}80 \times 1\,000}} = 1\,310 \text{ m/s}$$

13.52 Dans le problème 13.51, si ces liquides avaient circulé dans un tuyau de 300 mm de diamètre à la vitesse de 1,2 m/s, et si le courant avait été brusquement interrompu, à quelle augmentation de pression devait-on s'attendre, en admettant le tuyau rigide?

Solution

La variation (augmentation) de pression $= \rho c \times$ variation de vitesse

(*a*) Augmentation de pression $= 1\,000(1\,470)(1{,}2 - 0) = 1{,}764 \times 10^6$ Pa $= 1\,760$ kPa

(*b*) Augmentation de pression $= 1\,262(1\,850)(1{,}2) = 2{,}802 \times 10^6$ Pa $= 2\,800$ kPa

(*c*) Augmentation de pression $= 800(1\,310)(1{,}2) = 1{,}258 \times 10^6$ Pa $= 1\,260$ kPa

13.53 Un tuyau d'acier de 1,20 m de diamètre et de 10 mm d'épaisseur transporte de l'eau à 16 °C à raison de 1,8 m/s. Si le tuyau a une longueur de 3 000 m et si la vanne côté sortie est fermée en 2,50 s, à quelle augmentation de tension dans les parois du tuyau doit-on s'attendre?

Solution

L'onde de pression prendrait, pour aller de la vanne à l'entrée et retour, un

$$\text{temps (aller retour)} = 2\left(\frac{\text{longueur du tuyau}}{\text{vitesse de l'onde de pression}}\right)$$

La vitesse de l'onde de pression pour un tuyau non rigide est donnée par

$$c = \sqrt{\frac{E_B \text{ (kg/m}^2\text{)}}{\rho[1 + (E_B/E)(d/t)]}}$$

où les deux rapports sont sans dimensions quand on utilise les mêmes unités :

Prenant E pour l'acier $= 207 \times 10^9$ Pa, $$c = \sqrt{\frac{2{,}16 \times 10^9}{1\,000\left[1 + \dfrac{2{,}16 \times 10^9}{207 \times 10^9}\left(\dfrac{1\,200}{10}\right)\right]}} = 980 \text{ m/s}$$

et le temps $= 2(3\,000/980) = 6{,}1$ s.

Mais on a fermé la vanne en 2,50 s. Ceci correspond à une fermeture brusque, puisque l'onde de pression, atteignant la vanne fermée doit repartir dans l'autre sens.

Augmentation de pression $= \rho c(dV) = (1\,000 \times 980)(1{,}8) = 1{,}764 \times 10^6$ Pa $= 1\,760$ kPa.
D'après la tension de circonférence pour un cylindre à parois minces,

$$\text{la contrainte d'étirement } \sigma = \frac{\text{pression} \times \text{rayon}}{\text{épaisseur}} = \frac{1\,760 \times 600}{10} = 106\,000 \text{ kPa d'augmentation}$$

Cette augmentation de tension ajoutée à la valeur de construction de 110 MPa approche de la valeur limite de l'élasticité de l'acier. On devra augmenter le temps de fermeture de la vanne jusqu'à 6,5 s. au moins et même plusieurs fois 6,3 s.

Pour la fermeture lente des vannes, quand le temps est supérieur à $2L/c$, Norman R. Gibson a proposé une méthode d'intégration arithmétique. On se reportera au volume 83 des *Transactions of the American Society of Civil Engineers* de 1919.

13.54 On ferme une vanne brusquement dans un tuyau de 75 mm transportant de la glycérine à 20 °C. L'augmentation de pression est de 690 kPa. Quel est le débit probable en m³/s? Utiliser $\rho = 1\,260$ kg/m³ et $E_B = 4{,}34$ GPa.

Solution

On a calculé la valeur de la vitesse dans le problème 13.51, elle est de 1 850 m/s.
La variation de pression $= \rho c \times$ variation de vitesse

$$0{,}69 \cdot 10^6 = 1\,260(1\,850)V \quad \text{d'où} \quad V = 0{,}30 \text{ m/s.}$$

Ainsi, $Q = AV = \frac{1}{4}\pi(0{,}075)^2 \times 0{,}300 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ m³/s

13.55 De l'air à 27 °C circule à raison de 6,0 m/s dans un conduit de ventilation carré de 1,5 m de côté. Si les dispositifs de commande sont brusquement fermés, quelle est la force s'exerçant sur la surface de fermeture de 1,5 m sur 1,5 m?

Solution

Pour de l'air à 27 °C, $\rho = 1{,}17$ kg/m³ et la vitesse

$$c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287{,}1)(273 + 27)} = 347 \text{ m/s}$$

Alors utilisant $\Delta p = \rho c V$, la force

$$F = \Delta p \times \text{aire} = (\rho c V)A = (1{,}17)(347)(6)(1{,}5 \times 1{,}5) = 5\,480 \text{ N}$$

13.56 Un émetteur sonar produit 2 impulsions par seconde. Si le dispositif est maintenu à la surface d'une eau douce à 4 °C et si l'écho est reçu au milieu de l'intervalle de deux impulsions, quelle est la profondeur de l'eau? (On sait que la profondeur est inférieure à 600 m.)

Solution

La vitesse du son dans l'eau à 4 °C se calcule en utilisant

$$c = \sqrt{\frac{\text{module cubique}}{\text{masse volumique du fluide}}} = \sqrt{\frac{2{,}04 \times 10^9}{1\,000}} = 1\,430 \text{ m/s}$$

(*a*) La distance parcourue par l'onde sonore (vers le bas et retour) en $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ seconde, soit en $\frac{1}{4}$ seconde (une moitié de l'intervalle de temps des impulsions) est

$$2 \times \text{profondeur} = \text{vitesse} \times \text{temps}$$
$$= 1\,430 \times \frac{1}{4} \quad \text{et la profondeur} = 179 \text{ m (profondeur minimale).}$$

(*b*) Si la profondeur dépasse 179 m, pour que le son soit entendu à mi-chemin de deux impulsions, il faudrait que le son ait mis 3/2 de 1/2 seconde. Alors

$$\text{profondeur} = \frac{1}{2}(1\,430) \times \frac{3}{4} = 536 \text{ m.}$$

(*c*) Pour des profondeurs dépassant la limite de 600 m proposée, nous obtenons :

$$\text{profondeur} = \frac{1}{2}(1\,430) \times \frac{5}{4} = 894 \text{ m.}$$
$$\text{profondeur} = \frac{1}{2}(1\,430) \times \frac{7}{4} = 1\,250 \text{ m, etc.}$$

13.57 Un projectile se déplace à 670 m/s dans de l'air au repos à 38 °C et sous 100 kPa de pression. Calculer (*a*) le nombre de Mach, (*b*) l'angle de Mach et (*c*) la force de résistance pour la forme *B* du diagramme *H*, en supposant le diamètre égal à 20 cm.

Solution

(*a*) Vitesse $c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287{,}1)(273+38)} = 354$ m/s

$$\text{nombre de Mach } N_M = \frac{V}{c} = \frac{670}{354} = 1{,}89$$

(*b*) L'angle de Mach $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{N_M}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}89}\right) = 31{,}9°$

(*c*) D'après le diagramme *H*, pour la forme *B*, et pour un nombre de Mach de 1,89, le coefficient de traînée est de 0,60.

La masse volumique de l'air est $\rho = \frac{p}{rT} = \frac{100\,000}{287(273+38)} = 1{,}120 \text{ kg/m}^3$.

$$\text{La force de résistance} = C_D \rho A V^2/2 = 0{,}60(1{,}120) \times \frac{1}{4}\pi(0{,}20)^2 \times (660^2)/2 = 4\,740 \text{ N}$$

13.58 D'après une photographie, l'angle de Mach d'un projectile se déplaçant dans l'air était de 40 °. Calculer la vitesse de la balle pour les conditions atmosphériques du problème précédent. (Vitesse du son $c = 354$ m/s.)

Solution

$$\sin\alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{N_M} \quad \text{alors} \quad \sin 40° = \frac{354}{V} \quad \text{et} \quad V = 551 \text{ m/s.}$$

13.59 Quel doit être le diamètre d'une sphère, de densité 2,50, pour que sa vitesse en chute libre atteigne la vitesse du son? Utiliser $\rho = 1{,}22$ kg/m^3 pour l'air, à 16 °C.

Solution

Pour un corps en chute libre, résistance − poids = 0 et d'après le diagramme *H*, $C_D = 0{,}80$.
Pour l'air à 15 °C, $c = \sqrt{krT} = \sqrt{1{,}4(287{,}1)(273+16)} = 341$ m/s
Puisque le poids = la résistance : $(2{,}50 \times 9\,810)(4\pi/3)(d/2)^3 = 0{,}80(1{,}22)(\pi d^2/4)(341)^2/2$ d'où $d = 3{,}47$ m.

Problèmes supplémentaires

13.60 Montrer que le coefficient de correction de la quantité de mouvement β dans le problème 7-85 du chapitre 7 est de 1,20.

13.61 Montrer que le coefficient de correction de la quantité de mouvement β dans le problème 7.83 du chapitre 7 est 1,02.

13.62 Calculer le coefficient de correction de la quantité de mouvement β dans le problème 7.92 du chapitre 7. *Rép.* $\dfrac{(K+1)^2(K+2)^2}{2(2K+1)(2K+2)}$

13.63 Montrer que le coefficient de correction de la quantité de mouvement β du problème 8.86 du chapitre 8 est de 1,12.

13.64 Un jet d'huile de 50 mm de diamètre frappe une plaque de front. Pour une vitesse du jet de 24 m/s, calculer la force exercée sur la plaque par l'huile, de densité 0,85. *Rép.* 1,0 kN.

13.65 Dans le problème 13.64, si la plaque s'était déplacée à 9 m/s dans le même sens que le courant, quelle aurait été la force exercée sur la plaque par l'huile? Si elle s'était déplacée à 9 m/s dans l'autre sens, quelle aurait été la force exercée? *Rép.* 395 N; 1 900 N.

13.66 Un jet d'eau de 50 mm de diamètre, exerce une force de 2,67 kN sur une plaque plane maintenue normalement au jet. Quel est le débit? *Rép.* 0,074 m^3/s.

13.67 De l'eau circulant à raison de 34 l/s frappe une plaque plane maintenue normalement au jet. Si la force exercée par la plaque est de 721 N, calculer le diamètre du jet. *Rép.* 45,2 mm.

13.68 Un jet d'eau de 50 mm de diamètre, frappe une lame recourbée immobile, et est dévié de 135° par rapport à sa direction initiale. En ne tenant pas compte du frottement de l'eau sur la plaque, calculer la résultante des forces exercées sur la plaque si la vitesse du jet est de 27,5 m/s. *Rép.* 2,80 kN; $\theta_x = -22{,}6°$.

13.69 Si la lame du problème précédent se déplaçait à 6,1 m/s dans le sens contraire de la direction de l'eau, quelle aurait été la résultante des forces exercées sur la lame et quelle serait la puissance nécessaire pour maintenir le mouvement? *Rép.* 4,20 kN; 23,6 kW.

13.70 Une lame stationnaire dévie de 180° un jet de 50 mm de diamètre se déplaçant à 35,1 m/s. Quelle est la force exercée par la lame sur l'eau? *Rép.* 5,0 kN.

13.71 Un tuyau horizontal passe de 300 mm de diamètre à 150 mm. Si le débit est de 0,127 m^3/s d'huile, de densité 0,88, et si la pression existant à l'intérieur du plus petit tuyau est de 265 kPa, quelle est la résultante des forces exercées sur la partie convergente, sans tenir compte des frottements? *Rép.* 15,4 kPa.

13.72 Un coude convergent vertical (figure 13-18) transporte de l'huile, de densité 0,85 à raison de 350 l/s à une pression d'entrée en A de 1,40 bar. Le diamètre en A est de 40 cm et en B de 30 cm et le volume compris entre A et B est de 0,10 m^3. En ne tenant pas compte du frottement, calculer la force s'exerçant sur le coude. *Rép.* 23,0 kN; $\theta_x = -76{,}1°$.

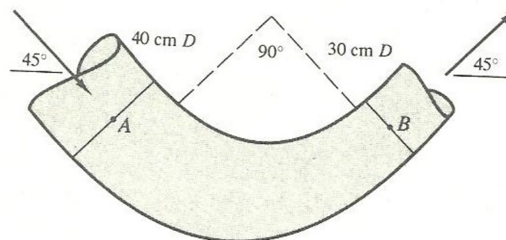


Fig. 13-18

13.73 Un modèle réduit de bateau à moteur est propulsé à la vitesse de 4,57 m/s par un jet d'eau de 25 mm de diamètre, émis directement de l'arrière. La vitesse du jet par rapport au modèle est de 35,1 m/s. Quelle est la force motrice? *Rép.* 543 N.

13.74 Une buse de 50 mm de diamètre, $c_v = 0{,}97$, fixée à un réservoir, déverse un jet d'huile, de densité 0,80 horizontalement avec une hauteur due à la pression de 11 m. Quelle est la force horizontale exercée sur le réservoir? *Rép.* 328 N.

13.75 Un ballon jouet pesant 1 N est rempli d'air ayant une masse volumique $\rho = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$. Le petit tube de gonflage, de 6 mm de diamètre, est dirigé vers le bas et on lache le ballon. Si l'air s'échappe avec la vitesse initiale de 8,5 l/s, quelle est l'accélération instantanée (en négligeant les frottements)? *Rép.* 22 m/s^2.

13.76 Un engin mû par un moteur de propulsion à jet se déplace vers l'amont dans une rivière avec une vitesse absolue de 8,69 m/s. Le courant a une vitesse de 2,29 m/s. Un jet d'eau sort du moteur avec la vitesse relative de 18,29 m/s. Si le débit du jet est de 1,416 m^3/s, quelle est la poussée produite par le moteur? *Rép.* 10,4 kN.

13.77 Quels poids peut porter une voilure d'aile de 46,5 m^2 sous un angle d'attaque de 4° et à une vitesse de 30,5 m/s? Utiliser $C_L = 0{,}65$ et prendre pour température de l'air 16 °C. *Rép.* 17 kN.

13.78 À quelle vitesse doit-on faire voler un avion ayant une voilure de 46,45 m^2, pesant 26,7 kN, si l'angle d'attaque est de 8°? Prendre $C_L = 0{,}90$. *Rép.* 32,3 m/s.

13.79 Quelle doit être la voilure d'un avion pesant 8,9 kN pour pouvoir atterrir à la vitesse de 15,6 m/s? Prendre pour valeur maximale de C_L 1,50. *Rép.* 40 m^2.

13.80 Si la traînée d'une aile de 27,87 m^2 de surface est de 3,02 kN à quelle vitesse se déplace-t-elle, si l'angle d'attaque est de 7°? Prendre $C_D = 0{,}05$. *Rép.* 59,7 m/s.

13.81 Un vent de 13,4 m/s souffle avec un angle de 8° par rapport à son plan sur un panneau de signalisation qui a 3,70 m de long et 0,60 m de large. En prenant les valeurs $C_L = 0{,}52$ et $C_D = 0{,}09$, calculer, (*a*) la force agissant sur le panneau perpendiculairement à la direction du vent et (*b*) la force agissant parallèlement à la direction du vent. Prendre les conditions atmosphériques normales à 16 °C. *Rép.* 127 N; 22 N.

13.82 Démontrer que pour un angle d'attaque donné, la traînée s'exerçant sur une aile est la même à toutes les altitudes. (Pour un angle d'attaque donné, C_D ne varie pas avec l'altitude.)

13.83 Un modèle d'aile de 0,90 m d'envergure et de 100 mm de corde est soumis à des essais en soufflerie avec un angle d'attaque fixe. L'air à pression normale et à la température de 27 °C a pour vitesse 27 m/s. On trouve pour la portance et la traînée respectivement 26 N et 225 N. Déterminer les coefficients de portance et de traînée. *Rép.* 0,657; 0,056 6.

13.84 Calculer le nombre de Mach (*a*) d'un avion se déplaçant dans de l'air dans les conditions atmosphériques normales à 20 °C à la vitesse de 483 km/h, (*b*) d'une fusée se déplaçant dans l'air à 20 °C à 3 860 km/h et (*c*) d'un projectile se déplaçant dans de l'air à 20 °C dans les conditions atmosphériques normales, à la vitesse de 1 930 km/h. *Rép.* 0,391; 3,13; 1,56.

13.85 Un turboréacteur aspire de l'air à raison de 200 N/s quand il se déplace à la vitesse de 213 m/s. Si la poussée produite est de 12,0 kN pour une vitesse des gaz d'échappement de 762 m/s, quel est le poids de combustible consommé par seconde? *Rép.* 10,6 N.

13.86 De l'air pénètre dans la prise d'air d'un moteur à réaction à la pression atmosphérique et à la vitesse de 152 m/s. Le moteur consomme du combustible à raison d'une part de combustible pour 50 parts d'air entrant, en poids. La surface de la prise d'air est de 0,139 m^2 et la masse volumique de l'air de 1,24 kg/m^3. Si la vitesse des gaz d'échappement est de 1 524 m/s et la pression, la pression atmosphérique, quelle est la poussée produite? *Rép.* 37 kN.

13.87 Une automobile a une aire projetée de 2,98 m^2 et se déplace à la vitesse de 22,35 m/s dans l'air immobile à 26,7 °C. Si $C_D = 0{,}45$, quelle est la puissance en kW nécessaire pour vaincre la résistance de l'air? *Rép.* 8,80 kW.

13.88 Un train de 152 m de long se déplace à 121 km/h dans l'air à 16 °C dans les conditions atmosphériques normales. Considérons que la surface latérale du train vaut 1 393 m^2 et qu'elle est équivalente à celle d'une plaque plane. Pour un bord d'attaque turbulent, quelle est la résistance pelliculaire? *Rép.* 1,67 kN sur un côté.

13.89 Un cylindre de 610 mm de diamètre et de 4,57 m de long se déplace à 48,3 km/h, dans de l'eau à 16 °C (dans le sens de la longueur). Quel est le coefficient de résistance si la résistance pelliculaire est de 1,60 kN? *Rép.* $C_D = 0{,}002\ 04$.

13.90 Calculer la résistance due au frottement s'exerçant sur une plaque de 0,3 m de large et de 0,9 m de long disposée dans le sens de la longueur (*a*) dans un courant d'eau à 21 °C qui coule à la vitesse de 0,30 m/s et (*b*) dans un courant de fuel oil lourd à 21 °C à une vitesse de 0,30 m/s. *Rép.* 0,064 N; 0,72 N.

13.91 Un ballon de 1,20 m de diamètre pesant 17,8 N est soumis à une poussée hydrostatique d'environ 22,2 N. En utilisant $\rho = 1{,}18$ kg/m^3 et $\nu = 1{,}58 \times 10^{-5}$ m^2/s, calculer sa vitesse ascensionnelle. *Rép.* 5,7 m/s.

13.92 Calculer le vitesse limite d'un grêlon de 13 mm de diamètre en prenant comme température de l'air, 4 °C et comme densité du grêlon 0,90. *Rép.* 16,8 m/s.

13.93 Un objet ayant une aire projetée de 0,557 m^2 se déplace à la vitesse de 48,3 km/h. Si le coefficient de résistance est de 0,30, calculer la résistance exercée par l'eau à 16 °C et par l'air à 16 °C dans les conditions atmosphériques normales. *Rép.* 15,0 kN; 18,3 N.

13.94 Un corps se déplace dans de l'air à 16 °C dans les conditions atmosphériques normales à la vitesse de 26,8 m/s et une puissance de 4,10 kW est nécessaire au maintien de cette vitesse. Si la surface projetée est de 1,25 m^2, calculer le coefficient de résistance. *Rép.* 0,28.

13.95 Une plaque lisse rectangulaire de 0,61 m de large et de 24,38 de long se déplace à la vitesse de 12,2 m/s dans le sens de la longueur dans de l'huile. (*a*) Calculer la force de résistance s'exerçant sur la plaque et l'épaisseur de la couche limite au bord d'attaque. (*b*) Quelle est la longueur de la couche limite laminaire? Prendre pour viscosité cinématique $1{,}49 \times 10^{-5}$ m^2/s et $w = 8{,}33$ kN/m^3. *Rép.* (*a*) 5,0 kN; 326 mm; (*b*) 610 mm.

13.96 Quelle est l'augmentation de pression produite par l'arrêt brutal de la circulation de l'huile, de densité 0,85 et de module cubique d'élasticité $1{,}7 \times 10^9$ Pa, à raison de 0,57 m^3/s dans un tuyau d'acier de 60 cm, supposé rigide? *Rép.* 23,5 bar.

13.97 Si la canalisation du problème 13.96 a 2 440 m de long, combien faut-il prendre de temps pour fermer la vanne pour éviter le coup de bélier? *Rép.* plus de 3,42 s.

13.98 Si un tuyau d'acier de 60 cm de diamètre et de 2 440 m de long a été conçu pour résister à une pression de 103 MPa sous une charge statique maximale de 330 m d'eau, de combien la tension des parois du tuyau va-t-elle augmenter quand une vanne à fermeture rapide arrête le débit de 0,85 m^3/s? ($E_B = 2{,}0 \times 10^9$ Pa). *Rép.* 3,2 MPa.

13.99 Calculer l'angle de Mach d'une balle se déplaçant à 518 m/s dans de l'air à 98,6 kPa et 16 °C. *Rép.* 41°13'.

13.100 Quelle est la traînée d'un projectile (forme *A* du diagramme *H*) de 102 mm de diamètre quand il se déplace à 579 m/s dans de l'air à 10 °C et 98,6 kPa? *Rép.* 854 N.

Chapitre 14

Machines hydrauliques

MACHINES HYDRAULIQUES

À présent, nous allons porter notre attention sur les principes fondamentaux à partir desquels sont conçues les pompes, les souffleries, les turbines et les hélices. Les bases essentielles de cette étude reposent sur les principes d'évolution de la quantité de mouvement en fonction de l'impulsion (chapitre 13) du *tourbillon forcé* (chapitre 5) et sur les lois de la similitude (chapitre 6). Les turbines hydrauliques et les pompes centrifuges modernes sont des machines de grand rendement ayant des caractéristiques peu différentes les unes des autres. Pour chaque appareil, il y a un rapport défini entre la vitesse de rotation N, le débit Q, la hauteur de charge H, le diamètre D de l'élément tournant et la puissance P.

POUR DES VEINES TOURNANTES, le couple et la puissance produite se calculent par :

$$\text{couple } T \text{ (en N} \cdot \text{m)} = \rho Q(V_2 r_2 \cos\alpha_2 - V_1 r_1 \cos\alpha_1) \qquad (1)$$

et

$$\text{puissance } P \text{ (en N} \cdot \text{m)} = \rho Q(V_2 u_2 \cos\alpha_2 - V_1 u_1 \cos\alpha_1) \qquad (2)$$

Les formules ainsi que les notations employées ont été expliquées dans le problème 14.1.

ROUES À EAU, TURBINES, POMPES ET SOUFFLERIES

Celles-ci sont caractérisées par certaines constantes qu'on calcule couramment. On en étudiera les détails dans le problème 14.5.

1. Le *facteur de vitesse* ϕ est défini par :

$$\phi = \frac{\text{vitesse à la périphérie de l'élément tournant}}{\sqrt{2gH}} = \frac{u}{\sqrt{2gH}} \qquad (3)$$

où u = rayon de l'élément tournant (en m) × vitesse angulaire en radians/s = $r\omega$ (m/s).
Ce facteur s'exprime aussi comme :

$$\phi = \frac{\text{diamètre en m} \times \text{nombre de tours par minute}}{84{,}60\sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{84{,}6\sqrt{H}} \qquad (4)$$

2a. Le *rapport de vitesse* peut s'exprimer par :

$$\frac{\text{diamètre } D \text{ en m} \times \text{vitesse } N \text{ en tours par minute}}{\sqrt{g \times \text{hauteur } H \text{ en m}}} = \text{constante } C'_N \qquad (5a)$$

On a aussi

$$H = \frac{D^2 N^2}{C_N^2} \qquad (5b)$$

où g est inclu dans le coefficient C_N.

2b. La *vitesse unitaire* est définie comme étant la vitesse d'un élément tournant géométriquement semblable (homologue) ayant un diamètre de 1 m fonctionnant sous une charge de 1 m. On exprime généralement cette vitesse unitaire (N_u en tours/min) en fonction de D_1 en m et de N en tours/min. Ainsi

$$N_u = \frac{D \text{ en m} \times \text{tours/min.}}{\sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \text{ (tours/min)(m}^{-1/2}) \qquad (6a)$$

Ainsi,

$$N = N_u \frac{\sqrt{H}}{D_1} \qquad (6b)$$

3a. La *relation des débits* peut s'exprimer par :

$$\frac{\text{débit } Q \text{ en m}^3\text{/s}}{(\text{diamètre } D \text{ en m})^2 \sqrt{\text{hauteur } H \text{ en m}}} = \text{constante } C_Q \qquad (7a)$$

Alors :

$$Q = C_Q D^2 \sqrt{H} = C_Q D^2 \left(\frac{D_N}{C_N}\right) = C'_Q D^3 N \qquad (7b)$$

Ainsi, le coefficient C_Q peut aussi s'exprimer en prenant comme unité de débit le 1/min. Lorsqu'on prend les coefficients dans des textes ou des manuels, on doit vérifier les unités afin d'éviter les erreurs. Si C_q est le même pour deux unités homologues, alors C_N et C_P et le rendement seront les mêmes, sauf quand il s'agit de fluides très visqueux.

3b. Le *débit unitaire* est défini comme le débit d'un élément tournant homologue de 1 m de diamètre, fonctionnant sous une charge de 1 m. Le débit unitaire en m^3/s s'écrit :

$$Q_u = \frac{\text{débit } Q \text{ en m}^3\text{/s}}{(\text{diamètre } D \text{ en m})^2 \sqrt{\text{hauteur } H \text{ en m}}} = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} \text{ m}^3\text{/s(m}^{-5/2}) \qquad (8a)$$

Aussi,

$$Q = Q_u D_1^2 \sqrt{H} \qquad (8b)$$

4a. La *relation des puissances*, obtenue en prenant les valeurs de Q et de H des équations (*5a*) est

$$\text{puissance } P = \frac{\rho g Q H}{e} = \frac{\rho g (C_Q D^2 \sqrt{H}) H}{e} = C_p D^2 H^{3/2} \qquad (9a)$$

Alors,

$$P_{(W)} = \frac{\rho g (C'_Q D^3 N)}{e} \frac{D^2 N^2}{g (C'_N)^2} = C'_P \rho D^5 N^3 \qquad (9b)$$

4b. La *puissance unitaire* est définie comme étant la puissance produite par un élément tournant homologue de 1 m de diamètre fonctionnant sous une hauteur de charge de 1 m. La puissance unitaire P_u est

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} \text{ kW(m}^{-7/2}) \quad \text{et} \quad P = P_u D_1^2 H^{3/2} \qquad (10)$$

VITESSE SPÉCIFIQUE

On définit la vitesse spécifique comme étant la vitesse d'un élément tournant homologue de diamètre tel qu'il produise 1 kW pour une charge de 1 m (voir le problème 14.5). La vitesse spécifique N_S peut s'exprimer sous deux formes, comme suit :

1. Pour les *turbines* :

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{\sqrt{\rho}(gH)^{5/4}}, \text{ qui représente l'équation générale} \qquad (11a)$$

Aussi, $$N_S = N_u\sqrt{P_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \text{ est d'application courante} \qquad (11b)$$

2. Pour les *pompes* et *souffleries* :

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \text{ représente l'équation générale} \qquad (12a)$$

Aussi $$N_S = N_u\sqrt{Q_u} = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \text{ est d'application courante.} \qquad (12b)$$

RENDEMENT

Le rendement s'exprime par un rapport. Il varie avec la vitesse et le débit.
Pour les *turbines*,

$$\text{le rendement d'ensemble } e = \frac{\text{puissance à l'arbre}}{\text{puissance fournie par l'eau}} \qquad (13)$$

$$\text{rendement hydraulique } e_h = \frac{\text{puissance utilisée par l'unité}}{\text{puissance fournie par l'eau}}$$

Pour les *pompes*,

$$\text{le rendement } e = \frac{\text{puissance fournie}}{\text{puissance consommée}} = \frac{\rho g Q H}{\text{puissance consommée}} \qquad (14)$$

CAVITATION

La cavitation provoque la destruction rapide du métal dans les rotors de pompes, dans les rotors et aubes des turbines, dans les tubes de Venturi, et quelquefois dans les canalisations. Elle se produit quand la pression du liquide tombe en dessous de sa pression de vapeur.

PROPULSION PAR HÉLICES

La propulsion par hélices a été la source du mouvement des avions et des bateaux pendant longtemps. De plus, les hélices sont utilisées comme ventilateurs et comme moyen de capter la puissance du vent. On ne va pas ici entreprendre l'étude de la conception des hélices, mais les expressions de la poussée et de la puissance sont du domaine de la mécanique des fluides. De telles expressions, établies dans le problème 14.23, sont :

$$\text{poussée } F = \rho Q(V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}}) \text{ en N} \qquad (15)$$

$$\text{puissance fournie } P_0 = \rho Q(V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}})V_{\text{initiale}} \qquad (16)$$

$$\text{puissance consommée } P_i = \rho Q\left(\frac{V_{\text{finale}}^2 - V_{\text{initiale}}^2}{2}\right) \qquad (17)$$

$$\text{rendement } e = \frac{\text{puissance fournie}}{\text{puissance consommée}} = \frac{2V_{\text{initiale}}}{V_{\text{finale}} + V_{\text{initiale}}} \qquad (18)$$

LES COEFFICIENTS DES HÉLICES mettent en jeu la poussée, le couple et la puissance. On peut les exprimer comme suit :

$$\text{coefficient de poussée } C_F = \frac{\text{poussée } F \text{ (en N)}}{\rho N^2 D^4} \qquad (19)$$

Des valeurs élevées de C_F donnent une bonne propulsion.

$$\text{coefficient de moment } C_T = \frac{\text{couple } T \text{ (en N} \cdot \text{m)}}{\rho N^2 D^5} \tag{20}$$

Des valeurs élevées de C_T sont courantes pour les turbines et les éoliennes.

$$\text{coefficient de puissance } C_p = \frac{\text{puissance } P \text{ (en W)}}{\rho N^3 D^5} \tag{21}$$

Ce dernier coefficient est de même forme que l'équation (*9b*) ci-dessus.

Les trois coefficients sont sans dimensions si N s'exprime en tours/s, ou Hz.

Problèmes résolus

14.1 Calculer le moment et la puissance fournie par un élément tournant (tel que le rotor d'une pompe ou d'une turbine) dans des conditions d'écoulement permanent.

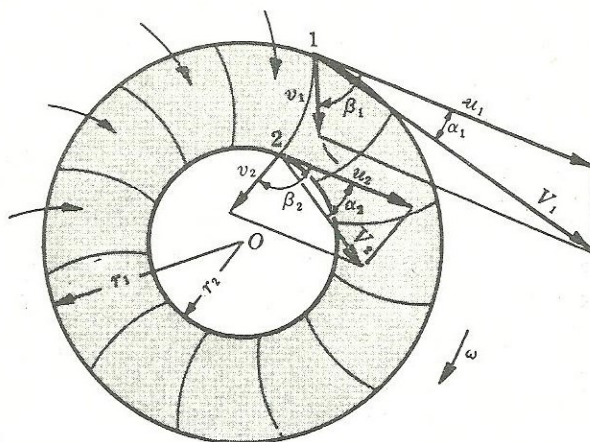


Fig. 14.1

Solution

Supposons que la figure 14.1 représente l'eau pénétrant au niveau du cercle de rayon r_1 dans les canaux incurvés formés par l'élément tournant et les quittant au niveau du cercle de rayon r_2. On a représenté par v_1 à l'entrée (1) et par v_2 à la sortie (2) les vitesses relatives de l'eau par rapport à l'aubage. La vitesse linéaire de la lame est u_1 en (1) et u_2 en (2). Les diagrammes vectoriels représentent les vitesses absolues de l'eau (V_1 et V_2).

Pour une masse d'eau élémentaire circulant en dt seconde, la variation du moment cinétique est provoquée par l'impulsion angulaire exercée par le rotor. C'est-à-dire :

$$\text{moment cinétique initial} + \text{impulsion angulaire} = \text{moment cinétique final.}$$

soit
$$(\mathrm{d}M)V_1 \times r_1 \cos\alpha_1 + \text{couple} \times \mathrm{d}t = (\mathrm{d}M)V_2 \times r_2 \cos\alpha_2$$

En reportant et en résolvant par rapport au couple exercé sur l'eau, nous obtenons :

$$\text{couple } T = \rho Q(V_2 r_2 \cos\alpha_2 - V_1 r_1 \cos\alpha_1)$$

Ainsi le couple exercé par le fluide sur la partie tournante est

$$T = \rho Q(V_1 r_1 \cos\alpha_1 - V_2 r_2 \cos\alpha_2) \text{ en N} \cdot \text{m}$$

La puissance est égale au produit du couple par la vitesse angulaire. Alors,

$$P = T\omega = \rho Q(V_1 r_1 \cos\alpha_1 - V_2 r_2 \cos\alpha_2)\omega$$

Puisque $u_1 = r_1\omega$ et $u_2 = r_2\omega$, l'expression s'écrit

$$P = \rho Q(V_1 u_1 \cos\alpha_1 - V_2 u_2 \cos\alpha_2) \text{ en W} \qquad (1)$$

Les expressions établies ici sont applicables aussi bien aux pompes qu'aux turbines. La question importante est que, dans l'établissement de la formule, le point (1) soit en *amont* et le point (2) en *aval*.

14.2 Établir l'équation de Bernoulli pour le rotor d'une turbine.

Solution

En écrivant l'équation de Bernoulli entre le point (1) et le point (2) de la figure du problème 1, on obtient :

$$\left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - H_T - \text{perte de charge } H_L = \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

D'après les diagrammes vectoriels du problème 1 et la règle du cosinus,

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos\beta_1$$
$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos\beta_2$$

Ainsi, posant $V_1 \cos\alpha_1 = a_1$ et $V_2 \cos\alpha_2 = a_2$, on peut calculer d'après le diagramme vectoriel que

$$a_1 = u_1 + v_1 \cos\beta_1 \quad \text{et} \quad a_2 = u_2 + v_2 \cos\beta_2$$

De plus,

$$H_T(J/N) = \rho Q(V_1 u_1 \cos\alpha_1 - V_2 u_2 \cos\alpha_2)/\rho g Q$$
$$= \frac{1}{g}(u_1 V_1 \cos\alpha_1 - u_2 V_2 \cos\alpha_2) \qquad (1)$$

Les termes relatifs à la hauteur de vitesse et à la charge de la turbine dans l'équation de Bernoulli ci-dessus, s'écrivent alors

$$\frac{u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos\beta_1}{2g}, \quad \frac{2(u_1 a_1 - u_2 a_2}{2g}, \quad \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos\beta_2}{2g}$$

En simplifiant et incorporant ces termes dans l'équation de Bernoulli, on obtient

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) + \frac{u_2^2}{2g} - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

ou

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}\right) - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) \qquad (2)$$

dans laquelle les vitesses v sont des valeurs relatives et où le terme dans la deuxième parenthèse est connu sous le nom de hauteur de charge créé par le tourbillon forcé ou hauteur de centrifugation.

14.3 Une turbine tourne à 100 tours/min et le débit est de 0,800 m³/s. La hauteur de pression à la sortie est de 0,30 m et le rendement hydraulique dans ces conditions est de 78,5 %. Les données physiques sont : $r_1 = 0{,}5$ m, $r_2 = 0{,}2$ m, $\alpha_1 = 15°$, $\beta_2 = 135°$, $A_1 = 0{,}11$ m², $A_2 = 0{,}08$ m², $z_1 = z_2$. En admettant

que la perte de charge soit de 1,20 m, déterminer (*a*) la puissance fournie à la turbine (*b*) la hauteur de charge totale disponible et la hauteur de charge utilisée et (*c*) la pression à l'entrée.

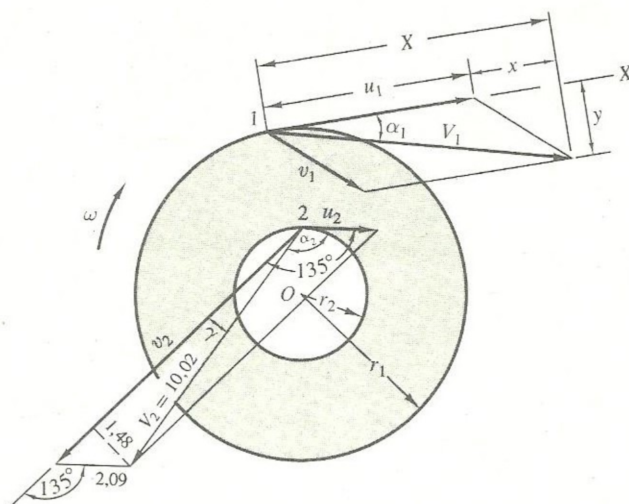


Fig. 14-2

Solution

(*a*) On doit effectuer des calculs préliminaires avant de reporter les valeurs dans l'équation de la puissance (équation (*1*) du problème 14.1).

$$V_1 = Q/A_1 = 0{,}8/0{,}11 = 7{,}27 \text{ m/s}, \quad V_2 = 0{,}8/0{,}08 = 10 \text{ m/s}$$
$$V_1 \cos\alpha_1 = 7{,}27 \times 0{,}966 = 7 \text{ m/s}$$
$$u_1 = 0{,}50(2\pi)(100/60) = 5{,}24 \text{ m/s}, \quad u_2 = 0{,}2(2\pi)(100/60) = 2{,}09 \text{ m/s}$$

D'après le diagramme vectoriel de la figure 14-2 où $\gamma = \sin^{-1} 1{,}48/10 = 8°31'$, nous avons

$$\alpha_2 = 135° - \gamma = 126°29' \quad \text{et} \quad V_2 \cos\alpha_2 = 10(-0{,}595) = -5{,}95 \text{ m/s}$$

Alors la puissance $P = 1\,000 \times 0{,}8[5{,}24(7) - 2{,}09(-5{,}95)] = 39$ kW

(*b*) Rendement $= \dfrac{P \text{ sortie}}{P \text{ entrée}} = \dfrac{\text{charge utilisée}}{\text{charge disponible}}$

Mais la charge disponible $= \dfrac{\text{puissance utilisée}}{\rho g Q}$ ou $H_T = \dfrac{39\,300}{9\,810 \times 0{,}8} = 5{,}0$ m

Ainsi la charge disponible $= 5{,}0/0{,}785 = 6{,}4$ m.

(*c*) Pour utiliser l'équation (*2*) du problème précédent, on doit calculer les deux vitesses relatives, en se reportant au diagramme vectoriel ci-dessus, nous obtenons

$$X = 7{,}27 \cos 15° = 7{,}27(0{,}966) = 7 \text{ m/s} \quad [\text{comme ci-dessous } (a)]$$
$$y = 7{,}27 \sin 15° = 7{,}27(0{,}259) = 1{,}88 \text{ m/s}$$
$$x = (X - u_1) = 7 - 5{,}24 = 1{,}76 \text{ m/s}$$
$$v_1 = \sqrt{(1{,}88)^2 + (1{,}76)^2} = \sqrt{6{,}63} = 2{,}58 \text{ m/s}$$

D'une manière analogue,

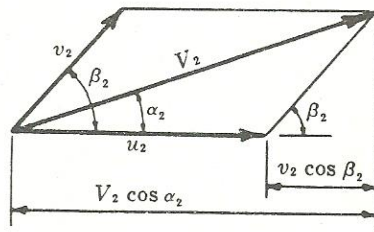
$$v_2 = V_2 \cos\gamma + u_2 \cos 45° = 10(0{,}989) + 2{,}09(0{,}707) = 11{,}4 \text{ m/s}$$

L'équation de Bernoulli devient

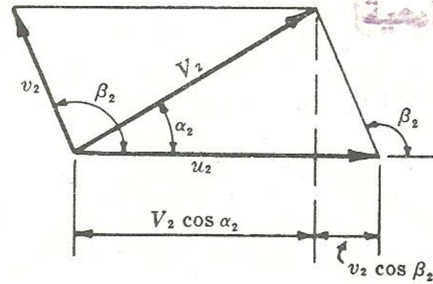
$$\left[\frac{(2,58)^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+0\right]-\left[\frac{(5,24)^2}{2g}-\frac{(2,09)^2}{2g}\right]-1,2=\left[\frac{(11,4)^2}{2g}+0,3+0\right]$$

d'où $p_1/\rho g = 9$ m.

14.4 Calculer la valeur de la hauteur de charge produite par le rotor d'une pompe.



(a)



(b)

Fig. 14-3

Solution

L'expression (*1*) du problème 14.1, appliquée dans la direction du courant dans la pompe (où r_1 est le rayon intérieur, etc.), s'écrit

$$\text{puissance dépensée} = \rho Q(u_2 V_2 \cos\alpha_2 - u_1 V_1 \cos\alpha_1)$$

et la hauteur de charge fournie par le rotor s'obtient en divisant par $\rho g Q$, ainsi

$$\text{hauteur } H' = \frac{1}{g}(u_2 V_2 \cos\alpha_2 - u_1 V_1 \cos\alpha_1)$$

Dans la plupart des pompes, l'écoulement au point 1 peut être considéré comme radial et la valeur du terme $u_1 V_1 \cos\alpha_1$ est nulle. L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\text{hauteur } H' = \frac{1}{g}(u_2 V_2 \cos\alpha_2) \qquad (1)$$

On peut voir dans la figure 14-3(*a*) et (*b*) que $V_2 \cos\alpha_2$ peut s'exprimer en fonction de u_2 et v_2, ainsi

$$V_2 \cos\alpha_2 = u_2 + v_2 \cos\beta_2$$

en faisant attention au signe de $\cos\beta_2$. Alors :

$$\text{hauteur } H' = \frac{u_2}{g}(u_2 + v_2 \cos\beta_2) \qquad (2)$$

De plus, pour les triangles vectoriels,

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos(180° - \beta_2)$$

d'où l'on peut écrire

$$u_2 v_2 \cos\beta_2 = \frac{1}{2}(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)$$

L'équation de la hauteur (2) devient :

$$\text{hauteur } H' = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

La hauteur de charge fournie par la pompe est inférieure à cette quantité de la perte due au rotor et de la perte à la sortie. Alors

$$\text{hauteur de charge fournie } H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - \text{pertes dues au rotor} - \text{pertes dues à la sortie}$$

$$H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - K_i\frac{v_2^2}{2g} - K_e\frac{V_2^2}{2g}.$$

14.5 Calculer, pour les pompes et les turbines (*a*) le facteur de vitesse ϕ, (*b*) la vitesse unitaire N_u, (*c*) le débit unitaire Q_u, (*d*) la puissance unitaire P_u et (*e*) la vitesse spécifique.

Solution

(*a*) Par définition, $\phi = \dfrac{u}{\sqrt{2gH}}$. Mais $u = r\omega = r\dfrac{2\pi N}{60} = \dfrac{\pi D_1 N}{60}$, où D_1 est le diamètre en m, N la vitesse en tours par minute. Enfin,

$$\phi = \frac{\pi D_1 N}{60} \times \frac{1}{\sqrt{2gH}} = \frac{D_1 N}{84{,}6\sqrt{H}} \qquad (1a)$$

(*b*) Si $D_1 = 1$ m et $H = 1$ m, nous obtenons d'après l'équation (*1a*) ci-dessus, la vitesse unitaire N_u. Ainsi,

$$N_u = 84{,}6\,\phi \qquad (1b)$$

qui est constante pour toutes les roues de conception analogue si ϕ se réfère à la vitesse optimale. De plus, de (*1a*) ci-dessus,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \text{ en tours/min.} \qquad (2)$$

Ainsi pour des éléments tournants homologues, la vitesse optimale est proportionnelle au diamètre et inversement proportionnelle à la racine carrée de H.

(*c*) Pour la turbine tangentielle, le débit Q traversant l'unité peut s'exprimer ainsi :

$$Q = cA\sqrt{2gH} = c\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{2gH} = \frac{c\pi\sqrt{2g}}{4}\left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2 D_1^2\sqrt{H}$$
$$= (\text{facteur})D_1^2\sqrt{H} = Q_u D_1^2\sqrt{H} \qquad (3)$$

Pour $D_1 = 1$ cm et $H = 1$ m, le facteur est par définition le débit unitaire Q_u.
Pour les turbines à réaction et les pompes, le débit Q peut s'exprimer comme le produit de :

$$(c)(A)(\text{une composante de la vitesse})$$

La composante de la vitesse dépend de la racine carrée de H et du sinus de l'angle α_1 (voir figure 14-1 du problème 14.1). Ainsi le débit Q peut s'écrire sous la forme (*3*) ci-dessus.

(*d*) En se servant de l'expression (*3*) ci-dessus,

$$\text{puissance } P = \rho g Q H = \rho g(Q_u D^2\sqrt{H})H$$

Pour $D_1 = 1$ m, et $H = 1$ m, puissance $= \rho g Q_u =$ (facteur). Quand le rendement est inclus dans la puissance fournie pour les turbines et dans la puissance contenue dans l'eau pour les pompes, le facteur devient égal à la puissance unitaire P_u. Alors,

$$\text{puissance } P = P_u D_1^2 H^{3/2} \qquad (4)$$

(*e*) Dans l'équation (*4*) on peut remplacer D_1 par sa valeur déduite de (*2*) ci-dessus, obtenant ainsi :

$$\text{puissance } P = P_u \frac{N_u^2 H}{N^2} H^{3/2}$$

De plus,

$$P_u N_u^2 = \frac{PN^2}{H^{5/2}} \quad \text{ou} \quad N_u \sqrt{P_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \tag{5}$$

Le terme $N_u\sqrt{P_u}$ porte le nom de vitesse spécifique N_s. L'expression (*5*) s'écrit alors

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad \text{(pour les turbines)} \tag{6}$$

Si P est remplacé par Q en éliminant D_1 des équations (*2*) et (*3*) nous obtenons

$$N_u^2 Q_u = \frac{QN^2}{H^{3/2}}$$

et

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad \text{(pour les pompes)} \tag{7}$$

où cette vitesse spécifique se rapporte à la vitesse à laquelle circulerait 1 m^3/s sous 1 m de charge.

Voilà quelles sont les expressions communes pour les pompes et les roues à eau. Pour des éléments tournants homologues dans lesquels on peut utiliser différents fluides, voir les expressions (*9b*), (*11a*) et (*12a*) au débit de ce chapitre.

14.6 Une turbine tangentielle produit 5 400 kW à 200 tours/min sous une charge de 240 m avec un rendement de 82 %. (*a*) Si le facteur de vitesse est de 0,46, calculer le diamètre de la roue, le débit, la vitesse unitaire, le débit unitaire et la vitesse spécifique. (*b*) Pour cette turbine, quelle serait la vitesse, la puissance et le débit avec une charge de 160 m? (*c*) Pour une turbine ayant la même conception, quelle devrait être la taille de la roue pour produire une puissance de 2 850 kW sous 183 m de charge et quelle serait sa vitesse et son débit? On suppose que le rendement reste inchangé.

Solution

Se reportant au problème 14.5 pour avoir les formules adéquates, nous procédons comme suit :

(*a*) Puisque $\phi = \dfrac{D_1 N}{84{,}6\sqrt{H}}$, $D_1 = \dfrac{84{,}6\sqrt{240} \times 0{,}46}{200} = 3{,}0$ m

D'où

$$\text{puissance fournie} = \rho g Q H_e \quad \text{alors} \quad Q = \frac{5\,400 \times 10^3}{9\,810 \times 240 \times 0{,}82} = 2{,}8 \text{ m}^3\text{/s.}$$

$$N_u = \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{200 \times 3}{\sqrt{240}} = 38{,}7 \text{ t/min(m}^{1/2})$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{5\,400}{(3)^2(240)^{3/2}} = 0{,}161 \text{ kW(m}^{-7/2})$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2\sqrt{H}} = \frac{2{,}8}{(3)^2\sqrt{240}} = 0{,}02 \text{ m}^3\text{/s(m}^{-5/2})$$

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{200\sqrt{5\,400}}{(240)^{5/4}} = 15{,}6 \text{ t/min(kW}^{1/2}\text{m}^{-5/4})$$

(*b*) Vitesse $N = \dfrac{N_u\sqrt{H}}{D_1} = \dfrac{38{,}7\sqrt{160}}{3} = 163$ tours/min

Puissance $P = P_u D_1^2 H^{3/2} = 0{,}161(3)^2(160)^{3/2} = 2\,930$ kW

Débit $Q = Q_u D_1^2\sqrt{H} = 0{,}02(3)^2\sqrt{160} = 2{,}28$ m^3/s

Les trois quantités ci-dessus auraient pu être obtenues en notant que, pour la même turbine (D_1 inchangé), la vitesse varie comme $H^{1/2}$, la puissance comme $H^{3/2}$ et Q comme $H^{1/2}$. Ainsi

$$N = 200\sqrt{\frac{160}{240}} = 163 \text{ tours/min}, \qquad P = 5\,400\left(\frac{160}{240}\right)^{3/2} = 2\,930 \text{ kW}, \qquad Q = 2{,}8\sqrt{\frac{160}{240}} = 2{,}28 \text{ m}^3/\text{s}$$

(c) De $P = P_u D_1^2 H^{3/2}$ nous obtenons

$$2\,850 \times 10^3 = 161(D_1^2)(183)^2 \quad \text{d'où} \quad D_1^2 = 7{,}15 \text{ m}^2 \quad \text{et} \quad D_1 = 2{,}67 \text{ m}$$

$$N = \frac{N_u\sqrt{H}}{D_1} = \frac{37{,}8\sqrt{183}}{2{,}67} = 196 \text{ tours/min}$$

$$Q = Q_u D_1^2\sqrt{H} = 0{,}02(7{,}15)\sqrt{183} = 1{,}93 \text{ m}^3/s$$

14.7 Une turbine fournit 107 kW en tournant à 100 tours/min sous une charge de 7,6 m. (*a*) Quelle serait la puissance produite sous une charge de 11,0 m, en admettant que le débit est inchangé? (*b*) À quelle vitesse la turbine doit-elle tourner pour qu'il en soit ainsi?

Solution

(*a*) La puissance produite $= \rho g Q H e$ d'où $\rho g Q e = P/H = \dfrac{107 \times 10^3}{7{,}6}$

Pour le même débit (et le même rendement) sous une charge de 11,0 m, nous obtenons

$$\rho g Q e = 107\,000/7{,}6 = P/11 \quad \text{ou} \quad P = 155 kW$$

(*b*)

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{100\sqrt{107}}{(7{,}6)^{5/4}} = 82\frac{\text{tours}}{\text{min}}\,\frac{(\text{kW})^{1/2}}{\text{m}^{5/4}}$$

Alors,

$$N = \frac{N_S H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{82(11)^{5/4}}{\sqrt{155}} = 132 \text{ tours/min.}$$

14.8 Une roue à impulsion, à la vitesse optimale produit 93 kW sous une charge de 64 m. (*a*) De quel pourcentage la vitesse augmente-t-elle pour une charge de 88 m? (*b*) En supposant le rendement égal, quelle serait la puissance résultante?

Solution

(*a*) Pour la même roue, la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de charge. Ainsi,

$$P_2 = \frac{N_1}{\sqrt{H_1}} = \frac{N_2}{\sqrt{H_2}} \quad \text{ou} \quad N_2 = N_1\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} = N_1\sqrt{\frac{88}{64}} = 1{,}172\,6N_1$$

La vitesse augmente de 17,26 %.

(*b*) On peut obtenir la nouvelle puissance produite à l'aide de l'expression de la vitesse spécifique. De $N_S = \dfrac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}$ nous avons

$$\frac{N_1\sqrt{93}}{(64)^{5/4}} = \frac{N_2\sqrt{P_2}}{(88)^{5/4}}.$$

En résolvant par rapport à la puissance produite

$$P_2 = \left[\frac{N_1}{1{,}173N_1}\sqrt{93}(88/64)^{5/4}\right]^2 = 150 \text{ kW.}$$

On peut obtenir la même valeur de la puissance en notant que, pour la même roue, la puissance varie comme $H^{3/2}$, donnant $P_2 = 93(88/64)^{3/2} = 150$ kW.

14.9 Trouver le diamètre approximatif et la vitesse angulaire d'une roue de Pelton, de rendement 85 % et de charge réelle 67 m, quand le débit est de 0,027 m^3/s. Prendre les valeurs $\phi = 0,46$ et $c = 0,975$.

Solution

Pour une roue à impulsion, l'expression générale de la puissance est

$$P = \rho g Q He = \rho g(cA\sqrt{2gH})He = 9\,810\left(0,975\frac{\pi}{4}\sqrt{2 \times 9,81}(0,85)\right)d^2H^{3/2} = 28,3d^2H^{3/2} \text{ kW} \qquad (1)$$

où d = diamètre de l'injecteur en m et où les valeurs de c et e sont respectivement de 0,975 et de 0,85. D'après les données, on peut aussi calculer la puissance d'après :

$$\text{puissance} = \rho g Q He = 9\,810 \times 0,027 \times 67 \times 0,85 = 15,1 \text{ kW}$$

Reportant cette valeur dans (*1*) ci-dessus, nous obtenons $d = 31$ mm. (Cette même valeur du diamètre d peut se calculer d'après l'équation $Q = cA\sqrt{2gH}$ du chapitre 12).

À présent, on va établir le rapport du diamètre de l'injecteur au diamètre de la roue. On obtiendra ce rapport à partir du quotient de la vitesse spécifique par la vitesse unitaire soit

$$\frac{N_s}{N_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} : \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{\sqrt{P} \times \sqrt{H}}{D_1 H^{5/4}}$$

Reportant la valeur de P tirée de (*1*) ci-dessus,

$$\frac{N_S}{N_u} = \frac{\sqrt{28,3d^2H^{3/2}}\sqrt{H}}{DH^{5/4}} = 5,3\frac{d}{D}$$

Mais $N_u = 84,6\phi$ (voir le problème 5 ci-dessus). Alors

$$N_S = (84,6 \times 0,46)\left(5,3\frac{d}{D_1}\right) = 206\frac{d}{D_1} \qquad (2)$$

Il est nécessaire de prendre une valeur de N_S dans (2). Prenant $N_S = 10$, nous avons

$$10 = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{N\sqrt{15,1}}{(67)^{5/4}} \quad \text{ou} \quad N = 494 \text{ tours/min.}$$

La vitesse d'une roue à impulsion doit être synchronisée avec celle du générateur. Pour un générateur à 60 périodes avec 8 paires de pôles, la vitesse $N = 7\,200/(2 \times 8) = 450$ tours/min; et avec 7 paires, $N = 7\,200/(2 \times 7) = 515$ tours/min. En utilisant un générateur à 7 paires comme exemple, le nouveau calcul donne

$$N_S = \frac{515\sqrt{15,1}}{(67)^{5/4}} = 10,44 \, \frac{\text{tours}}{\text{min}} \, \frac{(\text{kW})^{1/2}}{\text{m}^{5/4}}$$

Alors d'après (2) ci-dessus,

$$D_1 = 206d/N_S = 206 \times 0,031/10,44 = 0,61 \text{ m}$$

Pour un générateur à 7 paires, $N = 515$ tours/min.

14.10 Les turbines à réaction de l'installation du barrage de Hoover ont une capacité estimée à 86 000 kW à 180 tours /min sous une charge de 148 m. Le diamètre de chaque turbine est de 3,4 m et le débit est de 66,5 m^3/s. Calculer le facteur de vitesse, la vitesse unitaire, le débit unitaire et la puissance unitaire, ainsi que la vitesse spécifique.

Solution

En utilisant les équations (*4*) à (*11*) du début de ce chapitre, nous obtenons les résultats suivants :

$$\varphi = \frac{D_1 N}{84{,}6\sqrt{H}} = \frac{3{,}4 \times 180}{84{,}6\sqrt{148}} = 0{,}595$$

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{3{,}4 \times 180}{\sqrt{148}} = 50 \text{ tours/min}$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2\sqrt{H}} = \frac{66{,}5}{(3{,}4)^2\sqrt{148}} = 0{,}473 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{86\,000}{(3{,}4)^2(148)^{3/2}} = 4{,}13 \text{ kW}$$

$$N_S = N_u\sqrt{P_u} = 50\sqrt{4{,}13} = 102 \; \frac{\text{tours}}{\text{min}} \; \frac{(\text{kW})^{1/2}}{\text{m}^{5/4}}$$

14.11 Une roue à impulsion tourne à 400 tours/min sous une charge effective de 60 m et fournit 67 kW au frein. Pour les valeurs $\phi = 0{,}46$, $c_v = 0{,}97$ et rendement $e = 83$ %, calculer (*a*) le diamètre du jet, (*b*) le débit en m^3/s (*c*) le diamètre de la roue et (*d*) la hauteur de pression à la base de l'injecteur, sachant qu'il mesure 200 mm de diamètre.

Solution

(*a*) La vitesse du jet est $v = c_v\sqrt{2gh} = 0{,}97\sqrt{19{,}62 \times 60} = 33{,}3$ m/s.
On doit déterminer le débit avant de pouvoir calculer le diamètre du jet.
La puissance fournie $= \rho g Q H e$, $67 \times 10^3 = (9\,810)Q(60)(0{,}83)$ et $Q = 0{,}137$ m^3/s.
Alors, l'aire du jet $= Q/v = 0{,}004\,12$ m^2 et le diamètre du jet $= 0{,}073$ m $= 73$ mm.

(*b*) Résolu en (*a*).

(*c*) $\phi = \dfrac{D_1 N}{84{,}6\sqrt{H}}$, $\quad 0{,}46 = \dfrac{D_1(400)}{84{,}6\sqrt{60}}$ $\quad$ et $\quad D_1 = 754$ mm

(*d*) Hauteur de charge effective $h = (p/\rho g + V^2/2g)$, où p et V sont les valeurs moyennes de la pression et de la vitesse à la base de l'injecteur. La valeur de $V_{200} = Q/A_{200} = 0{,}137/0{,}031 = 4{,}4$ m/s
Alors, $\dfrac{p}{\rho g} = h - \dfrac{V_{200}^2}{2g} = 60 - \dfrac{(4{,}4)^2}{2g} = 59$ m.

14.12 Une roue de Pelton produit 4 470 kW au frein sous une charge nette de 122 m à la vitesse de 200 tours/min. En admettant que $c_v = 0{,}98$, $\phi = 0{,}46$, que le rendement = 88 % et que le rapport du diamètre du jet au diamètre de la roue est de 1/9, calculer (*a*) le débit nécessaire (*b*) le diamètre de la roue, (*c*) le diamètre et le nombre de jets nécessaires.

Solution

(*a*)
$$\text{puissance fournie par l'eau} = wQH$$
$$4\,470/0{,}88 = 9{,}79Q(122)$$
et
$$Q = 4{,}25 \text{ m}^3/\text{s}.$$

(*b*)
$$\text{vitesse du jet } v = c_v\sqrt{2gh} = 0{,}98\sqrt{(2 \times 9{,}81)(122)} = 47{,}9 \text{ m/s}.$$
$$\text{vitesse périphérique } u = \phi\sqrt{2gh} = 0{,}46\sqrt{(2 \times 9{,}81)(122)} = 22{,}5 \text{ m/s}.$$

Alors $u = r\omega = \pi DN/60$, $\quad 22{,}5 = \pi D(200/60)$, $\quad$ et $\quad D = 2{,}15$ m.

(c) Puisque $d/D = 1/9$, $d = 2{,}15/9 = 0{,}239$ m de diamètre.

$$\text{nombre de jets} = \frac{\text{débit } Q}{\text{débit par jet}} = \frac{Q}{A_{\text{jet}} v_{\text{jet}}} = \frac{4{,}25}{\frac{1}{4}\pi(0{,}239)^2(47{,}9)} = 1{,}98.$$

On prendra deux jets.

14.13 À l'usine Pickwick de TVA les turbines du type hélice ont une puissance installée de 36 000 kW à 81,8 tours/min sous une charge de 13 m. Le diamètre de sortie est de 7,42 m. Pour qu'une turbine géométriquement semblable produise 27 000 kW sous une charge de 11 m, quel doit être sa vitesse et son diamètre? Quelle est la variation probable du débit en pourcentage?

Solution

La vitesse spécifique des turbines géométriquement semblables peut s'exprimer par

$$N_S = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}. \quad \text{Alors,} \quad \frac{81{,}8\sqrt{36\,000}}{(13)^{5/4}} = \frac{N\sqrt{27\,000}}{(11)^{5/4}} \quad \text{et} \quad N = 76{,}6 \text{ tours/min}$$

On peut obtenir le même résultat en calculant N_u, puis P_u et N_S. Appliquons ces valeurs à la turbine à concevoir. Ainsi,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{7{,}42(81{,}8)}{\sqrt{13}} = 168$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{36\,000}{(7{,}42)^2(13)^{3/2}} = 14$$

$$N_S = N_u\sqrt{P_u} = 168\sqrt{14} = 628 \ \frac{\text{tours}}{\text{min}} \ \frac{(\text{kW})^{1/2}}{\text{m}^{5/4}}$$

et

$$N = \frac{N_S H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{628\sqrt{11}}{\sqrt{27\,000}} = 76{,}6 \text{ tours/min, comme ci-dessus}$$

Pour le diamètre de la nouvelle turbine, en utilisant $N_u = \dfrac{D_1 N}{\sqrt{H}}$, $D_1 = \dfrac{N_u\sqrt{H}}{N} = \dfrac{168\sqrt{11}}{76{,}6} = 7{,}27$ m.

Pour le pourcentage de variation du débit Q, la relation des débits pour les turbines Pickwick et la nouvelle turbine est la suivante :

$$\text{nouveau } \frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}} = \text{Pickwick } \frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}}, \quad \frac{Q_{\text{Pick}}}{(7{,}42)^2(13)^{1/2}} = \frac{Q_{\text{nouvelle}}}{(7{,}27)^2(11)^2}$$

$Q_{\text{nouvelle}} = 0{,}883 Q_{\text{Pick}}$ soit environ 11 % de diminution pour Q.

14.14 Un modèle de turbine de 380 mm de diamètre produit 9 kW à une vitesse de 1 500 tours/min sous une charge de 7,6 m. Une turbine géométriquement semblable de 1,9 m de diamètre fonctionne avec le même rendement sous une charge de 14,9 m. Quelle est la vitesse et la puissance auxquelles ont doit s'attendre?

Solution

D'après l'expression (*5a*) du début de ce chapitre,

$$C'_N = \frac{ND}{\sqrt{gH}} = \text{constante pour des turbines homologues}$$

Ainsi

$$\frac{ND}{\sqrt{gH}}\text{ modèle} = \frac{ND}{\sqrt{gH}}\text{ prototype}$$

$$\frac{1\,500 \times 380}{\sqrt{g \times 7{,}6}} = \frac{N \times 1\,900}{\sqrt{g \times 14{,}9}}$$

et $N = 420$ tours/min.

D'après l'expression (*9a*), $C_p = \dfrac{P}{d^2 H^{3/2}}$ = constante. Ainsi

$$\text{modèle } \frac{P}{D^2 H^{3/2}} = \text{prototype } \frac{P}{D^2 H^{3/2}}$$

$$\frac{9}{(380)^2 (7{,}6)^{3/2}} = \frac{P}{(1\,900)^2 (14{,}9)^{3/2}},$$

d'où $P = 618$ kW.

14.15 Une turbine à réaction, de 500 mm de diamètre, tournant à 600 tours/min produit 195 kW au frein quand le débit est de 0,74 m³/s. La hauteur de pression à l'entrée de la turbine est de 28 m et la cote du compartiment de la turbine par rapport au niveau des eaux mortes est de 1,90 m. L'eau entre dans la turbine à la vitesse de 3,7 m/s. Calculer (*a*) la charge effective, (*b*) le rendement, (*c*) la vitesse à laquelle on doit s'attendre sous une charge de 69 m et (*d*) la puissance au frein et le débit sous une charge de 69 m.

Solution

(*a*) Charge effective $H = \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z = 28{,}0 + \dfrac{(3{,}7)^2}{2g} + 1{,}90 = 30{,}6$ m.

(*b*) Puissance fournie par l'eau $= \rho g Q H = 9\,810(0{,}74)(30{,}6) = 222$ kW

$$\text{rendement} = \frac{\text{puissance à l'arbre}}{\text{puissance fournie}} = \frac{195}{222} = 87{,}8\ \%.$$

(*c*) Pour la même turbine, le rapport $\dfrac{ND_1}{\sqrt{H}}$ est constant. Alors

$$\frac{N \times 0{,}5}{\sqrt{69}} = \frac{600 \times 0{,}5}{\sqrt{30{,}6}}$$

d'où $N = 900$ tours/min.

(*d*) Pour la même turbine les rapports $\dfrac{P}{D_1^2 H^{3/2}}$ et $\dfrac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}}$ sont aussi constants. Alors

$$\frac{P}{(0{,}5)^2 (69)^{3/2}} = \frac{195}{(0{,}5)^2 (30{,}6)^{3/2}}$$

d'où $P = 660$ kW et :

$$\frac{Q}{(0{,}5)^2 \sqrt{69}} = \frac{0{,}74}{(0{,}5)^2 \sqrt{30{,}6}}$$

d'où $Q = 1{,}11$ m³/s.

14.16 Un rotor de pompe, de 300 mm de diamètre, a un débit de 0,15 m^3/s quand il tourne à 1 200 tours/min. L'angle de la lame β_2 est de 160° et l'aire de sortie A_2 est de 0,023 m^2. En admettant que les pertes sont de $2{,}8(v_2^2/2g)$ et de $0{,}38(V_2^2/2g)$ calculer le rendement de la pompe (la surface de sortie A_2 est mesurée normalement à v_2).

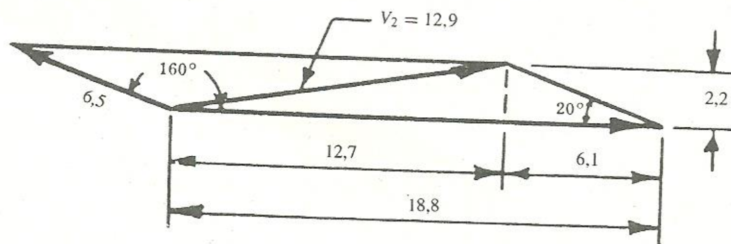


Fig. 14-4

Solution

On doit d'abord calculer les vitesses absolues et relatives à la sortie. Les vitesses u_2 et v_2 sont

$$u_2 = r_2\omega = (15/100)(2\pi \times 1\,200/60) = 18{,}85 \text{ m/s} \qquad v_2 = Q/A_2 = 0{,}15/0{,}023 = 6{,}5 \text{ m/s}$$

D'après le diagramme vectoriel représente dans la figure 14-4, la valeur de la vitesse absolue à la sortie est $V_2 = 12{,}9$ m/s. D'après le problème 14.4,

$$\text{charge fournie par le rotor} = H' = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(18{,}8)^2}{2g} - \frac{(6{,}5)^2}{2g} + \frac{(12{,}9)^2}{2g} = 24{,}3 \text{ m.}$$

La charge fournie à l'eau, $H = H' - \text{pertes} = 24{,}3 - \left(2{,}8\frac{(6{,}5)^2}{2g} + 0{,}38\frac{(12{,}9)^2}{2g}\right) = 15{,}1$ m.

Le rendement $e = H/H' = 15{,}1/24{,}3 = 62\ \%$.

On aurait pu calculer le valeur de H' au moyen de l'expression couramment utilisée

$$H' = \frac{u_2}{g}(u_2 + v_2 \cos\beta_2) = \frac{18{,}8}{g}[18{,}8 + 6{,}5(-0{,}940)] = 24{,}3 \text{ m.}$$

14.17 Une pompe centrifuge a débité 0,020 m^3/s en travaillant contre une charge de 16,8 m quand la vitesse était de 1 500 tours/minute. Le diamètre du rotor est de 320 mm et la puissance au frein de 4,5 kW. Une pompe géométriquement semblable de 380 mm de diamètre doit fonctionner à 1 750 tours/min. En admettant que les rendements sont égaux (*a*) quelle est la hauteur de charge fournie, (*b*) quel est le débit d'eau pompée et (*c*) quelle est la puissance fournie?

Solution

(*a*) D'après l'équation de la vitesse, les rapports $\dfrac{DN}{\sqrt{H}}$ pour le modèle et le prototype sont égaux. Alors,

$$\frac{32 \times 1\,500}{\sqrt{16{,}8}} = \frac{38 \times 1\,750}{\sqrt{H}} \quad \text{et} \quad H = 32{,}2 \text{ m.}$$

(*b*) D'après l'équation du débit, les rapports $\dfrac{Q}{D^2\sqrt{H}}$ sont égaux. Alors

$$\frac{0{,}02}{(32)^2\sqrt{16{,}8}} = \frac{Q}{(38)^2\sqrt{32{,}2}} \quad \text{et} \quad Q = 0{,}039 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Une autre équation relative au débit est $\dfrac{Q}{D^2N}$ = constante, d'où

$$\frac{Q}{(38)^3(1\,750)} = \frac{0{,}02}{(32)^3(1\,500)} \quad \text{et} \quad Q = 0{,}039 \text{ m}^3/\text{s}.$$

(*c*) On peut employer l'équation de la puissance $\dfrac{P}{D^5N^3}$ = constante, pour le modèle et le prototype. Alors,

$$\frac{P}{(38)^5(1\,750)^3} = \frac{4{,}5}{(32)^5(1\,500)^3} \quad \text{et} \quad P = 16{,}9 \text{ kW}$$

14.18 Une pompe de 150 mm produit 0,13 m³/s en travaillant contre une charge de 22,5 m quand elle tourne à 1 750 tours/minutes. On a représenté dans la figure 14-5, les courbes représentatives de la hauteur de charge en fonction du débit et la courbe de rendement. Pour une pompe géométriquement semblable de 200 mm de diamètre tournant à 1 450 tours/minute et produisant 0,18 m³/s déterminer (*a*) la hauteur de charge probable fournie par la pompe de 200 mm, (*b*) en admettant que la courbe du rendement est identique pour la pompe de 200 mm, quelle est la puissance nécessaire pour avoir un débit de 0,18 m³/s.

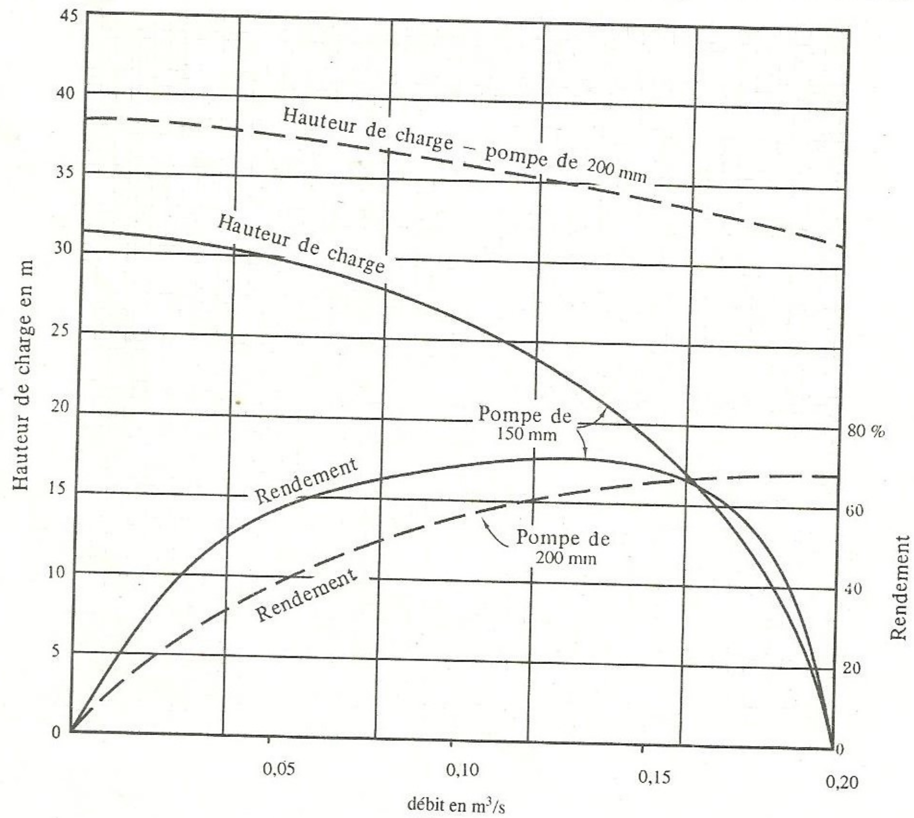


Fig. 14-5

Solution

(*a*) Les pompes homologues ont des caractéristiques identiques pour les débits qui se correspondent. Choisissons quelques débits pour la pompe de 150 mm et lisons les hauteurs de charge correspondantes. Calculez les valeurs de Q et H pour pouvoir tracer la courbe de la pompe de 200 mm. Un tel calcul est fait en détail ci-après et on a dressé une table de valeurs établies pour des calculs analogues.

En utilisant le débit donné de 0,13 m^3/s et les 22,5 m de charge, nous obtenons à partir de l'équation de la vitesse,

$$H_2 = (D_2/D_1)^2(N_2/N_1)^2H_1 = (0{,}20/0{,}15)^2(1\,450/1\,750)^2H_1 = 1{,}22H_1 = 1{,}22(22{,}5) = 27{,}5 \text{ m}$$

De la relation du débit $\dfrac{Q}{D^3N}$ = constante, nous obtenons

$$Q_2 = (D_2/D_1)^3(N_2/N_1)Q_1 = (0{,}20/0{,}15)^3(1\,450/1\,750)Q_1 = 1{,}96Q_1 = 1{,}96(0{,}13) = 0{,}255 \text{ m}^3/\text{s}$$

D'autres valeurs qui ont été portées selon la ligne en pointillé dans la figure 14-5, sont les suivantes :

pour la pompe de 150 mm à 1 750 tours/min

Q en m^3/s	H en m	Rendement
0	31,0	0
0,05	30,0	54 %
0,08	28,0	64 %
0,10	26,0	68 %
0,13	22,5	70 %
0,16	16,5	67 %

pour la pompe de 200 mm à 1 450 tours/min

Q en m^3/s	H en m	Rendement
0	37,8	0
0,098	36,6	54 %
0,157	34,2	64 %
0,196	31,7	68 %
0,255	27,5	70 %
0,314	20,1	67 %

D'après la courbe donnant la charge en fonction des débits, pour $Q = 0{,}18$ m^3/s la hauteur de charge est de 32,7 m.

(*b*) Le rendement de la pompe de 200 mm serait sans doute quelque peu plus élevé que celui de la pompe de 150 mm pour des débits comparables. Dans ce cas-là, l'hypothèse faite est que les courbes de rendement sont les mêmes pour des débits comparables. Le tableau ci-dessus en donne les valeurs pour les débits indiqués. La figure 14-5 donne la courbe du rendement pour la pompe de 200 mm et pour le débit de 0,18 m^3/s, la valeur en est de 67 %, Alors

$$P = \rho g Q H/e = 9\,810[0{,}18](32{,}7)/0{,}67 = 86{,}2 \text{ kW}.$$

14.19 On a besoin de fournir 0,020 m^3/s en travaillant contre une charge de 129 m à 3 600 tours/min. En admettant que la pompe a un rendement acceptable et que la vitesse spécifique du rotor est comprise entre 1 200 et 4 000 tours/min quand le débit Q est exprimé en m^3/s combien d'étages de pompages doit-on utiliser?

Solution

Pour 1 étage :

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = \frac{3\,600\sqrt{0{,}02}}{(129)^{3/4}} = 13{,}3.$$

Cette valeur est trop faible. Essayons 3 étages. Alors

$$\text{charge/étage} = 129/3 = 43 \text{ m} \quad \text{et} \quad N_S = \frac{3\,600\sqrt{0{,}02}}{(43)^{3/4}} = 30{,}3.$$

Comparons cette valeur avec celle qu'on obtiendrait pour 4 étages, pour laquelle $H = 129/4 = 32{,}25$ m, c'est-à-dire avec

$$N_S = \frac{3\,600\sqrt{0{,}02}}{(32{,}25)^{3/4}} = 37{,}6 \text{ tours/min}(\text{m}^3/\text{s})^{1/2}\text{m}^{-3/4}$$

Cette dernière vitesse spécifique semble être intéressante. Cependant dans la pratique, le coût supplémentaire de la pompe du 4e étage risque de l'emporter sur l'accroissement d'efficacité de l'unité de pompage. Il faudrait faire une étude de coût.

14.20 Pour prévoir le comportement d'une petite pompe à huile, on fait des essais sur un modèle utilisant l'air. La pompe à huile doit être entraînée par un moteur de 37 W à 1 800 tours/min et on dispose d'un moteur de 186 W pour faire tourner la pompe à air à 600 tours/min. Prenant pour densité de l'huile 0,912 et pour masse volumique de l'air (constante) 1,23 kg/m^3, quelle est la taille que doit avoir le modèle?

Solution

Utilisant la relation de la puissance (coefficients de puissance égaux), nous obtenons :

$$\frac{P}{\rho D^5 N^3} \text{ prototype} = \frac{P}{\rho D^5 N^3} \text{ modèle.}$$

Alors,

$$\frac{37}{(0{,}912)(1\,000)D_p^5(1\,800)^3} = \frac{186}{1{,}23 D_m^5 (600)^3} \quad \text{et} \quad \frac{D_m}{D_p} = \frac{10}{1}$$

Le modèle doit être dix fois plus grand que la pompe à huile.

14.21 Une pompe tournant à 1 750 tours/min, présente comme courbe de charge en fonction du débit celle qu'on a représentée dans la figure 14-6. La pompe doit faire circuler de l'eau à travers 450 m de tuyau de 150 mm de diamètre, $f = 0{,}025$. La charge statique est de 10,0 m et les pertes mineures peuvent être négligées. Calculer le débit et la hauteur de charge dans ces conditions.

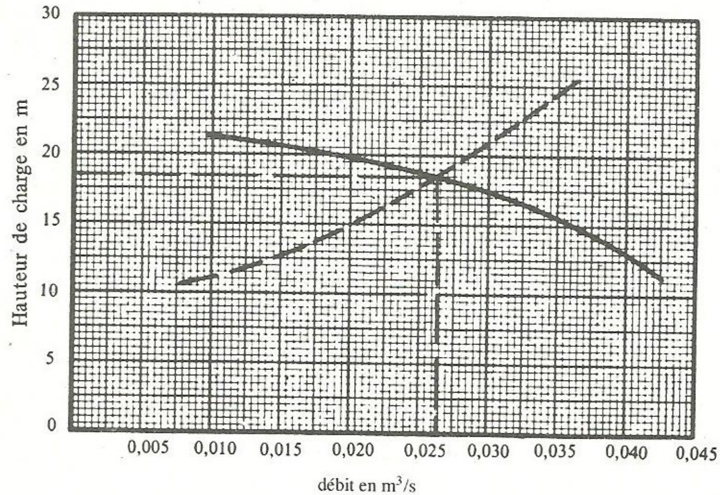


Fig. 14-6

Solution

La perte de charge dans la canalisation augmente avec le débit. On peut tracer la courbe représentant la charge totale de pompage en fonction du débit (représentée en pointillé). Mais la charge contre laquelle on pompe = charge statique + perte dans la canalisation

$$= 10{,}0 + 0{,}025\left(\frac{450}{0{,}15}\right)\frac{V^2}{2g} = 10{,}0 + 75{,}0\,\frac{V^2}{2g}$$

On peut évaluer cette hauteur de charge comme suit :

$Q =$	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030 m^3/s
$V = Q/A =$	0,566	0,849	1,132	1,415	1,698 m/s
$75V^2/2g =$	1,226	2,758	4,903	7,662	11,033 m (perte)
charge totale =	11,226	12,758	14,903	17,662	21,033 m

La figure 14-6 indique que, pour un débit de 0,026 5 m^3/s, la hauteur de charge fournie par la pompe est égale à la charge totale contre laquelle on pompe, soit 18,5 m.

14.22 Quel est le rapport de puissance d'une pompe et de son modèle à l'échelle de 1/5 si le rapport des charges est de 4 à 1 ?

Solution

Pour des pompes géométriquement semblables

$$\frac{P}{D^2H^{3/2}} \text{ pour la pompe} = \frac{P}{D^2H^{3/2}} \text{ pour le modèle.}$$

Alors,

$$\frac{P_b}{(5D)^2(4H)^{3/2}} = \frac{P_m}{D^2H^{3/2}} \quad \text{et} \quad P_b = 25(4)^{3/2}P_m = 200P_m$$

14.23 Établir les expressions de la poussée et de la puissance fournie par une hélice, de la vitesse de l'air à travers l'hélice et du rendement de celle-ci.

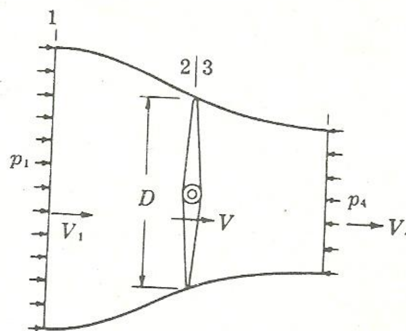


Fig. 14-7

Solution

(*a*) En utilisant le principe de la conservation de la quantité de mouvement, la poussée F de l'hélice fait varier la quantité de mouvement de la masse M d'air représentée sur la figure 14-7. L'hélice peut être considérée comme stationnaire dans un fluide circulant avec une vitesse d'approche V_1 ou comme se déplaçant vers la gauche avec une vitesse V_1 dans le fluide au repos. Ainsi, en négligeant les tourbillons et les frottements,

$$\text{la poussée } F = \rho Q(\Delta V) = \rho Q(V_4 - V_1) \tag{1a}$$

$$= \rho(\frac{1}{4}\pi D^2 V)(V_4 - V_1) \tag{1b}$$

(*b*) La puissance fournie est P = poussée × vitesse

$$= \rho Q(V_4 - V_1)V_1 \tag{2}$$

(*c*) La poussée F est aussi égale à $(p_3 - p_2)(\frac{1}{4}\pi D^2)$. Donc d'après (*1b*)

$$p_3 - p_2 = \rho V(V_4 - V_1) \tag{3}$$

Les principes de conservation du travail et de l'énergie cinétique, en utilisant une unité de 1 m^3 et en admettant qu'il n'y ait pas de pertes de charges, donnent les équations suivantes :

$$\text{énergie cinétique initiale / m}^3 + \text{travail produit / m}^3 = \text{énergie cinétique finale / m}^3$$

$$\frac{1}{2}(\rho)V_1^2 + (p_3 - p_2) = \frac{1}{2}(\rho)V_4^2$$

d'où

$$p_3 - p_2 = \rho\left(\frac{V_4^2 - V_1^2}{2}\right) \tag{4}$$

On peut obtenir le même résultat en appliquant l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 et 3 et 4 et en résolvant en $(p_3 - p_2)$. On observe que $(p_3 - p_1)$ s'exprime en (N/m^2) (m/m) soit en Pa.

En égalant (3) et (4)

$$V = \frac{V_1 + V_4}{2} = \frac{V_1 + (V_1 + \Delta V)}{2} = V_1 + \frac{\Delta V}{2} \qquad (5)$$

ceci indique que la vitesse moyenne de l'air à travers l'hélice est la moyenne des vitesses à l'avant et à l'arrière de l'hélice.

Le débit du fluide Q peut s'écrire en fonction de cette vitesse V comme suit

$$Q = AV = \frac{1}{4}\pi D^2 V = \frac{1}{4}\pi D^2 \left(\frac{V_1 + V_4}{2}\right) \qquad (6a)$$

$$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 (V_1 + \frac{1}{2}\Delta V) \qquad (6b)$$

(*d*) Le rendement de l'hélice est :

$$e = \frac{\text{puissance fournie}}{\text{puissance consommée}} = \frac{(\rho Q)(V_4 - V_1)V_1}{\frac{1}{2}(\rho Q)(V_4^2 - V_1^2)} = \frac{2V_1}{V_4 + V_1} = \frac{V_1}{V} \qquad (7)$$

le dénominateur représentant la variation de l'énergie cinétique créée par la puissance dépensée.

14.24 Un modèle d'hélice de 380 mm de diamètre, fournit une poussée de 220 N à la vitesse de 3 m/s dans l'eau. (*a*) Quelle poussée une hélice semblable de 1,90 m fournira-t-elle dans l'eau à la même vitesse? (*b*) À la vitesse de 6 m/s? (*c*) Quelle est la vitesse de glissement en (*b*)?

Solution

(*a*) La vitesse linéaire $V = r\omega$ ou varie comme DN. Alors on peut écrire

$$V_m \propto 38 N_m \quad \text{et} \quad V_p \propto 1{,}9 N_p$$

Puisque les vitesses sont égales $0{,}38 N_m = 1{,}9 N_p$.

Employant l'équation du coefficient de poussée, l'équation (*19*), nous obtenons,

$$\frac{F}{\rho N^2 D^4}\ \text{modèle} = \frac{F}{\rho N^2 D^4}\ \text{prototype},$$

$$\frac{220}{\rho\left(\frac{1{,}9}{0{,}38}N_p\right)^2 (0{,}38)^4} = \frac{F}{\rho (N_p)^2 (1{,}9)^4},$$

d'où $F = 5\,500$ N.

Dans l'équation (*19*), le diamètre D est en m et N en tours/s. Cependant, quand les rapports sont égalés l'un à l'autre, aussi longtemps qu'on utilise les mêmes unités pour les grandeurs correspondantes (m/m, cm/cm, tours/min, tours/min), on a une solution correcte.

(*b*) Ici $V_m \propto 0{,}38 N_m$ $(2V_m = V_p) \propto 1{,}9 N_p$. Ces valeurs donnent $0{,}76 N_m = 1{,}9 N_p$. Alors,

$$\frac{220}{\rho\left(\frac{1{,}9}{0{,}76}N_p\right)^2 (0{,}38)^4} = \frac{F}{\rho N_p^2 (1{,}9)^4} \quad \text{et} \quad F = 22\,000 \text{ N}.$$

Note : La relation ci-dessus entre la vitesse linéaire, la vitesse angulaire et le diamètre peut s'écrire :

$$\frac{V}{ND}\ \text{du modèle} = \frac{V}{ND}\ \text{du prototype} \qquad (1)$$

On appelle ce rapport, le rapport d'avance-diamètre puisque V/N est la distance parcourue par l'hélice en 1 tour.

(*c*) La vitesse en glissement (ou variation de vitesse) peut s'obtenir en résolvant l'expression (*6b*) du problème précédent en ΔV après avoir remplacé Q par $F/\rho\Delta V$ (tiré de l'équation (*1a*)). Alors

$$\frac{F}{\rho\Delta V} = (\frac{1}{4}\pi D^2)V_1 + (\frac{1}{4}\pi D^2)(\frac{1}{2}\Delta V) \quad \text{et} \quad (\Delta V)^2 + 2V_1\Delta V - \frac{8F}{\rho\pi D^2} = 0$$

En résolvant par rapport à ΔV nous avons, comme racine réelle,

$$\Delta V = -V_1 + \sqrt{V_1^2 + \frac{8F}{\rho\pi D^2}} \tag{2}$$

D'après les valeurs ci-dessus, exprimant D en m,

$$\Delta V = -6{,}0 + \sqrt{(6{,}0)^2 + \frac{8 \times 22\,000}{(1\,000)\pi(1{,}8)^2}} = 1{,}28 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad V_4 = 7{,}28 \text{ m/s}.$$

14.25 Calculer le coefficient de poussée d'une hélice ayant 100 mm de diamètre qui tourne à 1 800 tours/min et produit une poussée de 11,1 N dans l'eau douce.

Solution

$$\text{Coefficient de poussée} = \frac{F}{\rho N^2 D^4} = \frac{11{,}1}{(1\,000)(1\,800/60)^2(0{,}1)^4} = 0{,}123.$$

Le coefficient est sans dimensions pour F en N, N en Hz et D en m.

14.26 Les coefficients de puissance et de poussée d'une hélice de 2,5 m de diamètre se déplaçant vers l'avant à 30 m/s à la vitesse de rotation de 2 400 tours/min sont respectivement de 0,068 et 0,095. (*a*) Déterminer la puissance nécessaire et la poussée dans l'air ($\rho = 1{,}22$ kg/m^3). (*b*) Si le rapport avance-diamètre au rendement maximal est de 0,70, quelle est la vitesse de l'air au rendement maximal?

Solution

(*a*) Puissance $P = C_p\rho N^3 D^5$ en $W = (0{,}068)(1{,}22)(2\,400/60)^3(2{,}5)^5 = 518\,000 \text{ W} = 518 \text{ kW}$.

$$\text{Poussée } F = C_F\rho N^2 D^4 = (0{,}095)(1{,}22)(2\,400/60)^2(2{,}5)^4 = 7\,240 \text{ N} = 7{,}24 \text{ kN}.$$

(*b*) Puisque $V/ND = 0{,}70$,

$$V = (0{,}70)(2\,400/60)(2{,}5) = 70{,}0 \text{ m/s}.$$

14.27 Un avion vole à 290 km/h dans de l'air calme, $w = 11{,}8$ N/m^3. L'hélice a 1,68 m de diamètre et la vitesse de l'air traversant est de 97,5 m/s. Déterminer (*a*) la vitesse de glissement, (*b*) la poussée, (*c*) la puissance consommée (*d*) la puissance fournie (*e*) le rendement et (*f*) la différence de pression de part et d'autre de l'hélice.

Solution

En utilisant les expressions établies dans le problème 14.23, nous obtenons d'après (*5*),

(*a*) $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_4)$, $97{,}5 = \frac{1}{2}[290(1\,000/3\,600) + V_4]$, $V_4 = 114$ m/s (par rapport au fuselage).

(*b*) Poussée $F = \frac{w}{g}Q(V_4 - V_1) = \frac{11{,}8}{9{,}81}\left[\frac{1}{4}\pi(1{,}68)^2(97{,}5)\right][114 - (290\,000/3\,600)] = 8\,690 \text{ N} = 8{,}69 \text{ kN}$.

(*c*) Puissance dépensée $P_e = FV = (8{,}69)(97{,}5) = 847$ kW.

(*d*) Puissance fournie $P_o = FV_1 = (8{,}69)(290\,000/3\,600) = 700$ kW.

(*e*) Rendement $e = 700/847 = 82{,}6$ %

(*f*) Différence de pression $= \dfrac{\text{poussée } F}{\text{aire } (\frac{1}{4}\pi D^2)} = \dfrac{8{,}69}{\frac{1}{4}\pi(1{,}68)^2} = 3{,}92$ kPa.

Problèmes supplémentaires

14.28 Une roue à impulsion fonctionne sous une charge effective de 190 m. Le diamètre du jet est de 100 mm. Pour les valeurs $\phi = 0{,}45$, $c_v = 0{,}98$, $\beta = 160°$ et $v_2 = 0{,}85(V_1 - u)$. Calculer la puissance fournie à l'axe. *Rép.* 775 kW.

14.29 Une roue à impulsion doit fournir 1 865 kW sous une charge effective de 274 m. Le diamètre de l'injecteur est de 127 mm, $c = 0{,}98$, $\phi = 0{,}46$ et $D/d = 10$. Calculer le rendement et la vitesse de rotation.
Rép. 76,3 %, 508 tours/min.

14.30 Un modèle de turbine, construit à l'échelle 1/5 a fourni 3,17 kW au frein à la vitesse de 400 tours/min pour une charge de 1,83 m. En admettant que le rendement ne change pas, à quelle vitesse et à quelle puissance doit-on s'attendre dans la turbine en vraie grandeur sous une charge de 9,15 m? *Rép.* 180 tours/min; 885 kW.

14.31 D'après les données suivantes, calculer le diamètre d'une roue à impulsion et sa vitesse de rotation : $\phi = 0{,}46$, $e = 82$ %, $c_v = 0{,}98$, $D/d = 12$, charge = 395 m et puissance fournie = 3 580 kW *Rép.* 1,55 m; 500 tours/min.

14.32 Une turbine à réaction tournant à la vitesse optimale fournit 25,4 kW au frein à 620 tours/min sous 30 m de charge. Si le rendement est de 70,0 % et le rapport de vitesse $\phi = 0{,}75$, déterminer (*a*) le diamètre de la roue, (*b*) le débit en m^3/s, (*c*) la vitesse caractéristique N_S et (*d*) pour une charge de 58 m, la puissance au frein et le débit.
Rép. 0,57 m, 0,121 m^3/s, 51,49 tours/min, 70 kW et 0,170 m^3/s.

14.33 Dans les conditions de rendement optimal, une turbine de 1,27 m de diamètre fournit 224 kW pour une charge de 4,57 m à 95 tours/min. À quelle vitesse doit fonctionner une turbine homologue de 0,64 m de diamètre sous une charge de 7,62 m? Quelle est la puissance fournie? *Rép.* 245 tours/min; 120 kW.

14.34 Une roue à impulsion de 1,52 m de diamètre fournit un puissance au frein de 466 kW quand elle fonctionne à 360 tours/min sous une charge de 122 m. (*a*) Sous quelle charge doit fonctionner une roue semblable, tournant à la même vitesse, pour fournir 1 865 kW au frein? (*b*) Pour la charge qu'on vient de calculer, quel doit être le diamètre?
Rép. 212 m, 2,0 m.

14.35 Le rapport de vitesse ϕ d'une turbine est de 0,70 et la vitesse spécifique de 75. Calculer le diamètre du rotor pour que 1 864 kW soient fournis sous une charge de 98,8 m. *Rép.* 1,07 m.

14.36 Un essai de turbine a donnée les résultats suivants : puissance au frein = 16,8 kW, charge = 4,9 m, $N = 140$ tours/min, diamètre du rotor 900 mm et $Q = 0{,}40$ m^3/s. Calculer la puissance d'entrée, le rendement, le rapport de vitesse et la vitesse spécifique. *Rép.* 19,0 kW, 88 %, 0,685, 79.

14.37 Une pompe centrifuge tourne à 600 tours/min. On prend les données suivantes : $r_1 = 51$ mm, $r_2 = 203$ mm, A_1 radiale $= 77{,}4\pi$ cm^2, A_2 radiale $= 193\pi$ cm^2, $\beta_1 = 135°$; $\beta_2 = 120°$ écoulement radial à l'entrée des lames. En négligeant les frottements, calculer les vitesses relatives à l'entrée et à la sortie et la puissance fournie à l'eau.
Rép. 4,51 m/s; 1,47 m/s, 11,9 kW.

14.38 Quelle est la taille d'une pompe centrifuge, tournant à 730 tours/min qui pompe 0,25 m^3/s contre une charge de 11 m, prenant pour valeur de $C_N = 66$? *Rép.* 0,3 m.

14.39 Une pompe centrifuge fournit 0,071 m^3/s sous une charge de 7,6 m à 1 450 tours/min, et nécessite 6,7 kW. Si la vitesse est réduite à 1 200 tours/min, calculer le débit, la charge et la puissance en supposant le rendement inchangé. *Rép.* 0,059 m^3/s, 5,2 m, 3,8 kW.

14.40 Une hélice de 2 000 mm de diamètre tourne à 1 200 tours/min dans un courant d'air se déplaçant à la vitesse de 40 m/s. Les essais indiquent une poussée de 3 200 N et une puissance consommée de 164 kW. Calculer, pour une densité de l'air de 1,222 kg/m^3 les coefficients de poussée et de puissance. *Rép.* 0,41; 0,524.

14.41 Une hélice de 1,50 m de diamètre se déplace dans l'eau à 9,1 m/s et fournit une poussée de 15,6 kN. Quelle est l'augmentation de la vitesse dans le courant de glissement? *Rép.* 0,88 m/s.

14.42 Une hélice de 200 mm de diamètre fournit une poussée de 71,2 N à 140 tours/min et une vitesse dans l'eau de 3,66 m/s. Pour une hélice semblable montée sur un bateau se déplaçant à 7,32 m/s, quelle devrait être la taille pour avoir une poussée de 178 kN? À quelle vitesse doit-elle tourner? *Rép.* 5,08 m; 11,2 tours/min.

14.43 Dans une soufflerie un ventilateur produit une vitesse d'air de 22,9 m/s quand il tourne à 1 200 tours/min. (*a*) Quelle sera la vitesse produite si le ventilateur tourne à 1 750 tours/min? (*b*) si un moteur de 2,42 kW l'entraîne à 1 200 tours/min? Quelle est la puissance du moteur nécessaire pour le mouvoir à 1 750 tours/min? *Rép.* 33,3 m/s, 7,53 kW.

14.44 Quelle est la puissance du moteur nécessaire pour fournir 42,5 m^3/s d'air à une soufflerie, si les pertes dans la soufflerie sont de 144 mm d'eau et si le rendement des ventilateurs est de 68 %? Prendre $\rho_{air} = 1{,}200$ kg/m^3. *Rép.* 88,0 kW .

14.45 Une hélice de 2,74 m de diamètre se déplace dans l'air ($\rho = 1{,}222$ kg/m^2) à 91,4 m/s. Si on fournit 895 kW à l'hélice, quelle est la poussée produite et quel est le rendement de l'hélice? *Rép.* 9 030 N, 92,2 %.

Annexe

Tables et diagrammes

Table 1

(*A*) PROPRIÉTÉS APPROXIMATIVES DE CERTAINS GAZ

Gaz	Masse volumique ρ à 20 °C, 1,013 bar en kg/m^3	Constante r du gaz $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Exposant adiabatique	Viscosité cinématique ν à 20 °C, 1,013 bar m^2/s
Air	1,2047	287,1	1,40	$1{,}488 \times 10^{-5}$
Ammoniac	0,7177	481,5	1,32	1,535
Anhydride carbonique	1,8359	187,8	1,30	0,846
Méthane	0,6664	518,5	1,32	1,795
Azote	1,1631	296,8	1,40	1,590
Oxygène	1,3297	260,1	1,40	1,590
Anhydride sulfureux	2,7154	127,1	1,26	$0{,}521 \times 10^{-5}$

(*B*) QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'AIR À LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

Température °C(°F)	Masse volumique ρ kg/m^3	Viscosité cinématique ν m^2/s	Viscosité dynamique Pa · s
−17,8 (0)	1,382	$1{,}171 \times 10^{-5}$	$1{,}57 \times 10^{-5}$
−6,7 (20)	1,326	1,263	1,68
+4,4 (40)	1,274	1,356	1,73
15,6 (60)	1,222	1,468	1,79
20,0 (68)	1,202	1,486	1,80
26,7 (80)	1,176	1,570	1,84
37,8 (100)	1,135	1,672	1,90
48,9 (120)	1,109	$1{,}756 \times 10^{-5}$	$1{,}95 \times 10^{-5}$

(*C*) PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DE L'EAU À LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

Température °C(°F)	Masse volumique kg/m^3	Viscosité dynamique Pa · s	Tension superficielle N/m	Pression de vapeur Pa	Module d'élasticité N/m^2
0 (32)	1 000	$1{,}796 \times 10^{-3}$	0,0756	552	$1{,}98 \times 10^{9}$
4,4 (40)	1 000	1,550	0,0750	827	2,04
10,0 (50)	1 000	1,311	0,0741	1 170	2,10
15,6 (60)	999	1,130	0,0735	1 790	2,16
21,1 (70)	998	0,977	0,0725	2 480	2,20
26,7 (80)	996	0,862	0,0718	3 520	2,24
32,2 (90)	995	0,761	0,0709	4 830	2,27
37,8 (100)	993	0,680	0,0699	6 620	2,28
48,9 (120)	990	$0{,}560 \times 10^{-3}$	0,0680	11 700	$2{,}29 \times 10^{9}$

Table 2

DENSITÉ ET VISCOSITÉ CINÉMATIQUE DE CERTAINS LIQUIDES

(Viscosité cinématique = valeur de la table × 10^{-6})

	Eau**		Dissolvant commercial		Tetrachlorure de carbone		Huile de lubrification moyenne	
Temp. °C	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Viscos. ciném. m^2/s
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0.865	15,4

	Huile à rendre imperméable à la poussière *		Fuel-oil moyen *		Fuel-oil lourd *		Essence *	
Temp. °C	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Visc. ciném. m^2/s	Densité	Visc. ciném. m^2/s
5	0,917	72,9	0,865	6,01	0,918	400	0,737	0,749
10	0,913	52,4	0,861	5,16	0,915	290	0,733	0,710
15	0,910	39,0	0,857	4,47	0,912	201	0,729	0,683
20	0,906	29,7	0,855	3,94	0,909	156	0,725	0,648
25	0,903	23,1	0,852	3,44	0,906	118	0,721	0,625
30	0,900	18,5	0,849	3,11	0,904	89	0,717	0,595
35	0,897	15,2	0,846	2,77	0,901	67,9	0,713	0,570
40	0,893	12,9	0,842	2,39	0,898	52,8	0,709	0,545

Quelques autres liquides

Liquide et température	Densité	Visc. ciném. m^2/s
Térébentine 20 °C	0,862	1,73
Huile de lin à 30 °C	0,925	35,9
Alcool éthylique à 20 °C	0,789	1,54
Benzène à 20 °C	0.879	0,745
Glycérine à 20 °C	1,262	662
Huile de Castor à 20 °C	0,960	1 030
Huile de machine à 16,5 °C	0,907	137

* Kessler et Lenz, Université de Wisconsin, Madison.
** ASCE Manuel 25.

Table 3

COEFFICIENTS DE FROTTEMENT *f* POUR L'EAU SEULE

(Intervalle de température approximatif de 10 °C à 21 °C)

Pour des tuyaux vieux — intervalle approximatif de ε : 1,2 mm à 6,0 mm
Pour des tuyaux usés — intervalle approximatif de ε : 0,6 mm à 0,9 mm
Pour des tuyaux neufs — intervalle approximatif de ε : 0,15 mm à 0,3 mm

(f = valeur de la table $\times 10^{-4}$)

Diamètre et type de tuyau		VITESSE (m/s)										
		0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0	4,5	6,0	9,0
100 mm	Commercial vieux	435	415	410	405	400	395	395	390	385	375	370
	Commercial usé	355	320	310	300	290	285	280	270	260	250	250
	Tuyau neuf	300	265	250	240	230	225	220	210	200	190	185
	Très lisse	240	205	190	180	170	165	155	150	140	130	120
150 mm	Commercial vieux	425	410	405	400	395	395	390	385	380	375	365
	Commercial usé	335	310	300	285	280	275	265	260	250	240	235
	Tuyau neuf	275	250	240	225	220	210	205	200	190	180	175
	Très lisse	220	190	175	165	160	150	145	140	130	120	115
200 mm	Commercial vieux	420	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Commercial usé	320	300	285	280	270	265	260	250	240	235	225
	Tuyau neuf	265	240	225	220	210	205	200	190	185	175	170
	Très lisse	205	180	165	155	150	140	135	130	120	115	110
250 mm	Commercial vieux	415	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Commercial usé	315	295	280	270	265	260	255	245	240	230	225
	Tuyau neuf	260	230	220	210	205	200	190	185	180	170	165
	Très lisse	200	170	160	150	145	135	130	125	115	110	105
300 mm	Commercial vieux	415	400	395	395	390	385	380	375	365	360	355
	Commercial usé	310	285	275	265	260	255	250	240	235	225	220
	Tuyau neuf	250	225	210	205	200	195	190	180	175	165	160
	Très lisse	190	165	150	140	140	135	125	120	115	110	105
400 mm	Commercial vieux	405	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Commercial usé	300	280	265	260	255	250	240	235	225	215	210
	Tuyau neuf	240	220	205	200	195	190	180	175	170	160	155
	Très lisse	180	155	140	135	130	125	120	115	110	105	100
500 mm	Commercial vieux	400	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Commercial usé	290	275	265	255	250	245	235	230	220	215	205
	Tuyau neuf	230	210	200	195	190	180	175	170	165	160	150
	Très lisse	170	150	135	130	125	120	115	110	105	100	95
600 mm	Commercial vieux	400	395	385	380	375	370	365	360	355	350	345
	Commercial usé	285	265	255	250	245	240	230	225	220	210	200
	Tuyau neuf	225	200	195	190	185	180	175	170	165	155	150
	Très lisse	165	140	135	125	120	120	115	110	105	100	95
750 mm	Commercial vieux	400	385	380	375	370	365	360	355	350	350	345
	Commercial usé	280	255	250	245	240	230	225	220	210	205	200
	Tuyau neuf	220	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150
	Très lisse	160	135	130	120	115	115	110	110	105	100	95
900 mm	Commercial vieux	395	385	375	370	365	360	355	355	350	345	340
	Commercial usé	275	255	245	240	235	230	225	220	210	200	195
	Tuyau neuf	215	195	185	180	175	170	165	160	155	150	145
	Très lisse	150	135	125	120	115	110	110	105	100	95	90
1 200 mm	Commercial vieux	395	385	370	365	360	355	350	350	345	340	335
	Commercial usé	265	250	240	230	225	220	215	210	200	195	190
	Tuyau neuf	205	190	180	175	170	165	160	155	150	145	140
	Très lisse	140	125	120	115	110	110	105	100	95	90	90

Table 4

PERTES DE CHARGE DANS LES ACCESSOIRES

(Indice 1 = en amont et indice 2 = en aval)

Accessoire	Perte de charge moyenne
1. De réservoir à conduite – connexion au ras de la paroi (perte à l'entrée)	$0{,}50 \frac{V_2^2}{2g}$
– tuyau entrant	$1{,}00 \frac{V_2^2}{2g}$
– connexion arrondie	$0{,}05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De conduite à réservoir (perte à la sortie)	$1{,}00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Divergent brusque	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Divergent progressif (voir table 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturis, buses et orifices	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Convergent brusque (voir Table 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Coudes, accessoires, vannes* Quelques valeurs courantes de K sont : 45°, coude .... 0,35 à 0,45 90°, coude .... 0,50 à 0,75 Té .... 1,50 à 2,00 Vannes de portes (ouvertes) .... aprox. 0,25 Vannes de contrôle (ouvertes) ..... aprox. 3,0	$K = \frac{V^2}{2g}$

* Voir les manuels d'hydraulique pour plus de détails.

Table 5

VALEURS DE *K**

Convergents et divergents

Convergent brusque		Divergent progressif pour un angle total du cône de						
d_1/d_2	K_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

* Valeurs tirées de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company.

Table 6

QUELQUES VALEURS DU COEFFICIENT *C* DE HAZEN-WILLIAMS

Tuyaux droits et très lisses	140
Tuyaux de fonte lisses et neufs	130
Tuyaux de fonte usés et d'acier riveté neufs	110
Tuyaux d'égouts vitrifiés	110
Tuyaux de fonte ayant quelques années d'usage	100
Tuyaux de fonte en mauvais état	80

Table 7

COEFFICIENTS DE DÉBIT POUR DES ORIFICES CIRCULAIRES À BORD MINCE

Pour l'eau à 15°C ouvrant sur l'air à la même température

Hauteur de charge en mètres	Diamètre de l'orifice en cm					
	0,625	1,250	1,875	2,500	5,00	10,00
0,24	0,647	0,627	0,616	0,609	0,603	0,601
0,42	0,635	0,619	0,610	0,605	0,601	0,600
0,60	0,629	0,615	0,607	0,603	0,600	0,599
1,20	0,621	0,609	0,603	0,600	0,598	0,597
1,80	0,617	0,607	0,601	0,599	0,597	0,596
2,40	0,614	0,605	0,600	0,598	0,596	0,595
3,00	0,613	0,604	0,600	0,597	0,596	0,595
3,60	0,612	0,603	0,599	0,597	0,595	0,595
4,20	0,611	0,603	0,598	0,596	0,595	0,594
4,80	0,610	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
6,00	0,609	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
7,50	0,608	0,601	0,597	0,596	0,594	0,594
9,00	0,607	0,600	0,597	0,595	0,594	0,594
12,00	0,606	0,600	0,596	0,595	0,594	0,593
15,00	0,605	0,599	0,596	0,595	0,594	0,593
18,00	0,605	0,599	0,596	0,594	0,593	0,593

Source : F. W. Medaugh et G.D. Johnson, Civil Engr., juillet 1940, page 424.

Table 8

QUELQUES FACTEURS DE DÉTENTE Y EN ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE À TRAVERS DES BUSES À DÉBIT ET DES VENTURIMÈTRES

p_2/p_1	k	Rapport des diamètres (d_2/d_1)				
		0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
0,95	1,40 1,30 1,20	0,973 0,970 0,968	0,972 0,970 0,967	0,971 0,968 0,966	0,968 0,965 0,963	0,962 0,959 0,956
0,90	1,40 1,30 1,20	0,944 0,940 0,935	0,943 0,939 0,933	0,941 0,936 0,931	0,935 0,931 0,925	0,925 0,918 0,912
0,85	1,40 1,30 1,20	0,915 0,910 0,902	0,914 0,907 0,900	0,910 0,904 0,896	0,902 0,896 0,887	0,887 0,880 0,870
0,80	1,40 1,30 1,20	0,886 0,876 0,866	0,884 0,873 0,864	0,880 0,869 0,859	0,868 0,857 0,848	0,850 0,839 0,829
0,75	1,40 1,30 1,20	0,856 0,844 0,820	0,853 0,841 0,818	0,846 0,836 0,812	0,836 0,823 0,798	0,814 0,802 0,776
0,70	1,40 1,30 1,20	0,824 0,812 0,794	0,820 0,808 0,791	0,815 0,802 0,784	0,800 0,788 0,770	0,778 0,763 0,745

Pour $p_2/p_1 = 1{,}00$, $Y = 1{,}00$.

Table 9

QUELQUES VALEURS MOYENNES DE *n* EMPLOYÉES DANS LES FORMULES DE KUTTER ET MANNING ET DE *m* DANS LA FORMULE DE BAZIN

Type du canal ouvert	n	m
Ciment très lisse, bois bien raboté	0,010	0,11
Bois raboté, rigoles de bois neuves, fonte revêtue	0,012	0,20
Bon tuyau d'égout vitrifié, bonne maçonnerie de brique, tuyau de béton moyen, bois non raboté, caniveaux de métal lisse.	0,013	0,29
Tuyau d'égout de terre moyen et tuyau de fonte moyen, garniture de ciment moyenne.	0,015	0,40
Canaux à même la terre droits et en bon état	0,023	1,54
Canaux à même la terre, d'état moyen	0,027	2,36
Canaux découpés dans le roc	0,040	3,50
Rivières en bon état	0,030	3,00

Table 10

VALEURS DU COEFFICIENT *C* DE LA FORMULE DE KUTTER

Pente *S*	*n*	Rayon hydraulique *R* en mètres														
		0,06	0,09	0,12	0,18	0,24	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,20	1,80	2,40	3,00	4,50
0,00005	0,010	48	54	60	68	73	77	85	91	95	98	103	110	114	118	121
	0,012	38	43	49	54	59	62	70	75	78	82	87	93	97	100	104
	0,015	29	32	36	42	46	49	55	59	62	65	70	76	80	83	88
	0,017	24	28	31	36	40	43	47	51	54	57	62	67	71	74	78
	0,020	19	23	25	29	33	35	40	44	46	49	52	58	61	64	69
	0,025	14	17	19	23	25	27	31	34	36	39	43	47	51	53	57
	0,030	12	14	15	18	20	22	26	28	30	32	36	41	43	46	50
0,0001	0,010	54	60	65	72	77	81	87	92	95	98	103	108	112	114	117
	0,012	42	47	52	58	62	66	72	76	79	82	86	91	94	96	99
	0,015	31	35	40	45	49	51	57	60	63	65	69	74	77	79	83
	0,017	26	30	34	39	41	44	49	52	55	57	61	65	69	71	75
	0,020	21	25	28	31	35	37	41	45	47	49	52	56	59	61	65
	0,025	15	19	21	24	26	28	33	35	37	39	43	46	49	51	54
	0,030	13	15	17	19	22	23	26	29	30	33	35	40	41	44	47
0,0002	0,010	58	63	69	76	80	83	89	93	96	98	102	107	109	112	114
	0,012	46	51	55	61	65	68	73	77	79	82	85	89	92	94	97
	0,015	34	38	42	46	50	53	58	61	63	65	68	73	76	77	80
	0,017	29	33	36	40	43	46	50	54	55	57	61	65	67	69	72
	0,020	23	26	29	33	36	38	42	45	47	49	52	55	58	60	62
	0,025	17	19	22	25	28	30	33	36	38	39	42	46	47	50	52
	0,030	14	15	18	20	22	24	27	29	31	33	35	38	41	43	45
0,0004	0,010	61	67	71	77	82	84	91	94	96	98	102	106	108	110	112
	0,012	48	52	57	62	66	69	74	78	80	82	84	89	91	93	95
	0,015	35	40	43	48	51	54	59	62	63	65	68	72	74	76	78
	0,017	30	34	38	41	44	46	51	54	56	57	61	64	66	68	71
	0,020	24	28	30	34	37	39	43	46	47	49	52	55	57	59	61
	0,025	18	20	23	26	28	30	33	36	38	39	41	45	47	49	51
	0,030	14	17	18	21	23	24	28	30	31	33	35	38	40	41	44
0,001	0,010	62	68	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	108	109	111
	0,012	49	54	58	63	67	70	75	78	80	82	85	88	91	92	94
	0,015	36	41	44	49	52	54	59	62	64	66	68	72	73	75	78
	0,017	30	35	38	42	45	47	51	54	56	58	61	63	66	67	70
	0,020	25	28	31	34	38	39	43	46	48	49	51	54	57	58	60
	0,025	18	21	24	26	29	30	34	36	38	39	41	45	46	48	50
	0,030	15	17	19	21	23	25	28	30	31	33	35	38	40	41	43
0,01	0,010	63	69	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	107	108	110
	0,012	49	55	59	64	67	71	75	78	80	82	85	88	90	92	94
	0,015	37	42	45	49	52	55	59	62	64	66	68	71	73	75	77
	0,017	31	35	38	43	45	47	51	55	57	58	60	63	65	67	70
	0,020	25	29	31	35	38	40	43	46	48	49	51	54	56	58	60
	0,025	19	22	24	27	29	31	34	36	38	39	41	44	46	47	50
	0,030	15	17	19	22	24	25	28	30	32	33	35	37	39	40	43

Table 11*

VALEURS DU COEFFICIENT D'ÉCOULEMENT K DANS $Q = (K/n)y^{8/3}S^{1/2}$ POUR DES CANAUX TRAPÉZOÏDAUX

(y = profondeur du courant, b = largeur du lit du canal)

Pente des talus du canal (horizontale à verticale)

y/b	Vertical	$\frac{1}{4}:1$	$\frac{1}{2}:1$	$\frac{3}{4}:1$	1 : 1	$1\frac{1}{2}:1$	2 : 1	$2\frac{1}{2}:1$	3 : 1	4 : 1
0,01	98,7	99,1	99,3	99,6	99,8	100,1	100,4	100,6	100,9	101,3
0,02	48,7	49,1	49,4	49,6	49,8	50,1	50,4	50,7	50,9	51,3
0,03	32,0	32,4	32,7	33,0	33,2	33,5	33,8	34,1	34,3	34,7
0,04	23,8	24,1	24,4	24,6	24,8	25,2	25,4	25,7	26,0	26,4
0,05	18,8	19,1	19,4	19,7	19,9	20,2	20,5	20,8	21,0	21,5
0,06	15,5	15,8	16,1	16,4	16,6	16,9	17,2	17,5	17,7	18,2
0,07	13,12	13,46	13,73	14,0	14,2	14,5	14,8	15,1	15,3	15,9
0,08	11,31	11,64	11,98	12,18	12,38	12,72	13,06	13,33	13,59	14,13
0,09	9,96	10,30	10,57	10,83	11,04	11,37	11,71	11,98	12,25	12,79
0,10	8,88	9,22	9,49	9,69	9,96	10,30	10,57	10,90	11,17	11,71
0,11	7,96	8,30	8,59	8,82	9,03	9,35	9,69	10,03	10,30	10,83
0,12	7,22	7,56	7,84	8,08	8,28	8,61	8,95	9,29	9,56	10,09
0,13	6,60	6,92	7,21	7,44	7,65	8,01	8,34	8,61	8,95	9,49
0,14	6,06	6,39	6,67	6,90	7,11	7,47	7,81	8,08	8,41	9,02
0,15	5,60	5,92	6,20	6,44	6,65	7,00	7,34	7,67	7,94	8,55
0,16	5,20	5,52	5,79	6,03	6,24	6,60	6,92	7,23	7,54	8,14
0,17	4,84	5,16	5,44	5,67	5,88	6,25	6,58	6,88	7,19	7,81
0,18	4,53	4,85	5,12	5,36	5,57	5,93	6,26	6,57	6,87	7,47
0,19	4,25	4,56	4,84	5,07	5,28	5,65	5,98	6,29	6,60	7,20
0,20	4,00	4,31	4,58	4,82	5,03	5,39	5,72	6,04	6,35	6,93
0,22	3,57	3,88	4,15	4,38	4,59	4,95	5,29	5,61	5,92	6,53
0,24	3,21	3,51	3,78	4,01	4,22	4,59	4,93	5,24	5,56	6,18
0,26	2,91	3,21	3,47	3,71	3,92	4,29	4,62	4,95	5,26	5,88
0,28	2,66	2,95	3,21	3,45	3,65	4,02	4,36	4,68	5,00	5,63
0,30	2,44	2,73	2,99	3,22	3,43	3,80	4,14	4,46	4,78	5,41
0,32	2,25	2,54	2,79	3,02	3,23	3,60	3,94	4,27	4,59	5,22
0,34	2,08	2,36	2,62	2,85	3,06	3,43	3,77	4,10	4,41	5,05
0,36	1,94	2,21	2,47	2,70	2,90	3,28	3,62	3,94	4,27	4,90
0,38	1,80	2,08	2,34	2,56	2,77	3,14	3,48	3,81	4,13	4,77
0,40	1,69	1,97	2,21	2,44	2,64	3,01	3,36	3,69	4,01	4,65
0,42	1,59	1,86	2,11	2,33	2,54	2,91	3,25	3,58	3,90	4,54
0,44	1,49	1,76	2,01	2,23	2,44	2,81	3,15	3,48	3,81	4,44
0,46	1,41	1,67	1,92	2,14	2,34	2,72	3,06	3,39	3,71	4,35
0,48	1,33	1,59	1,83	2,06	2,26	2,63	2,98	3,31	3,63	4,27
0,50	1,26	1,52	1,76	1,98	2,19	2,56	2,90	3,24	3,56	4,20
0,55	1,11	1,36	1,59	1,82	2,02	2,39	2,74	3,07	3,40	4,04
0,60	0,983	1,23	1,46	1,68	1,88	2,25	2,60	2,93	3,26	3,90
0,70	0,794	1,03	1,26	1,47	1,67	2,04	2,39	2,72	3,05	3,69
0,80	0,661	0,882	1,10	1,31	1,51	1,88	2,23	2,56	2,89	3,54
0,90	0,559	0,774	0,989	1,20	1,39	1,76	2,11	2,44	2,77	3,42
1,00	0,481	0,686	0,895	1,10	1,30	1,66	2,01	2,34	2,67	3,32
1,20	0,369	0,563	0,767	0,962	1,16	1,52	1,86	2,20	2,53	3,18
1,40	0,293	0,476	0,672	0,868	1,06	1,42	1,76	2,10	2,42	3,08
1,60	0,240	0,415	0,604	0,794	0,983	1,35	1,69	2,02	2,35	2,99
1,80	0,201	0,367	0,552	0,740	0,929	1,29	1,63	1,96	2,29	2,93
2,00	0,171	0,330	0,511	0,700	0,882	1,24	1,58	1,91	2,24	2,89
2,25	0,143	0,295	0,471	0,655	0,834	1,19	1,53	1,86	2,19	2,84

* Valeurs tirées de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4e ed., McGraw-Hill Co.

Table 12*

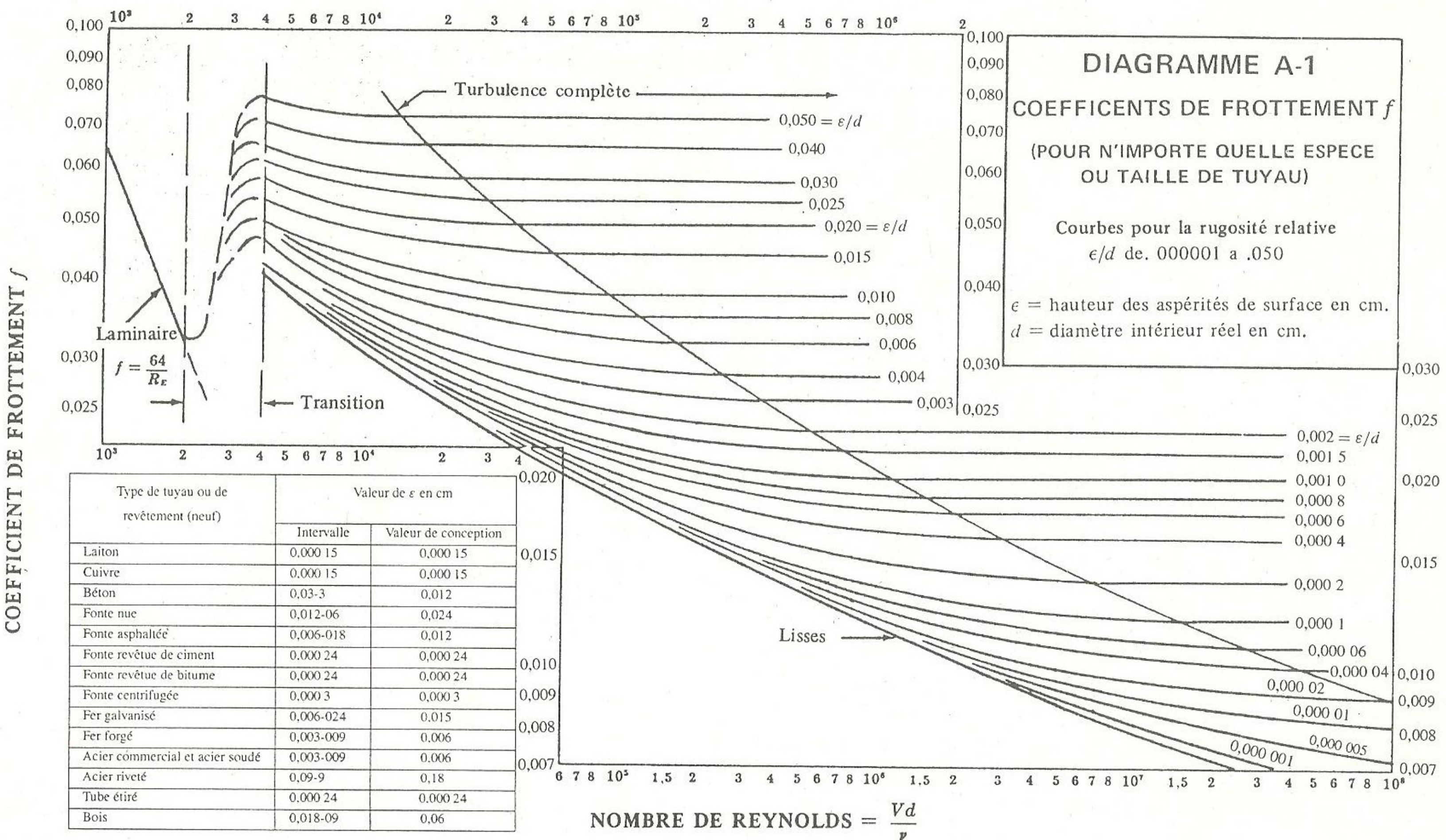
VALEURS DU COEFFICIENT D'ÉCOULEMENT K' DANS $Q = (K'/n)b^{8/3}S^{1/2}$ POUR LES CANAUX TRAPÉZOÏDAUX

(y = profondeur du courant, b = largeur du lit du canal)

Pentes des talus du canal (horizontale à verticale)

y/b	Vertical	¼ : 1	½ : 1	¾ : 1	1 : 1	1½ : 1	2 : 1	2½ : 1	3 : 1	4 : 1
0,01	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00047	0,00047
0,02	0,00143	0,00145	0,00145	0,00146	0,00147	0,00148	0,00149	0,00149	0,00150	0,00151
0,03	0,00279	0,00282	0,00285	0,00287	0,00288	0,00291	0,00293	0,00295	0,00298	0,00302
0,04	0,00444	0,00451	0,00457	0,00461	0,00465	0,00471	0,00476	0,00482	0,00489	0,00495
0,05	0,00637	0,00649	0,00659	0,00667	0,00674	0,00686	0,00695	0,00705	0,00713	0,00731
0,06	0,00855	0,00875	0,00888	0,00902	0,00915	0,00929	0,00949	0,00962	0,00976	0,01009
0,07	0,01090	0,01117	0,01144	0,01164	0,01178	0,01211	0,01231	0,01258	0,01277	0,01326
0,08	0,01346	0,0139	0,0142	0,0145	0,0147	0,0151	0,0155	0,0159	0,0162	0,0168
0,09	0,0162	0,0168	0,0172	0,0176	0,0180	0,0185	0,0190	0,0194	0,0199	0,0209
0,10	0,0191	0,0198	0,0205	0,0209	0,0214	0,0221	0,0228	0,0234	0,0241	0,0253
0,11	0,0221	0,0231	0,0238	0,0245	0,0251	0,0260	0,0269	0,0278	0,0285	0,0301
0,12	0,0253	0,0264	0,0275	0,0283	0,0290	0,0303	0,0314	0,0324	0,0334	0,0355
0,13	0,0286	0,0300	0,0312	0,0323	0,0332	0,0347	0,0361	0,0374	0,0387	0,0413
0,14	0,0320	0,0338	0,0353	0,0365	0,0376	0,0395	0,0412	0,0428	0,0443	0,0475
0,15	0,0355	0,0376	0,0394	0,0409	0,0422	0,0445	0,0466	0,0485	0,0504	0,0542
0,16	0,0392	0,0417	0,0437	0,0455	0,0471	0,0498	0,0523	0,0546	0,0569	0,0614
0,17	0,0429	0,0458	0,0482	0,0503	0,0522	0,0554	0,0583	0,0610	0,0637	0,0690
0,18	0,0468	0,0501	0,0529	0,0553	0,0575	0,0612	0,0646	0,0678	0,0710	0,0773
0,19	0,0507	0,0544	0,0577	0,0605	0,0630	0,0764	0,0713	0,0750	0,0787	0,0859
0,20	0,0546	0,0590	0,0627	0,0659	0,0687	0,0738	0,0783	0,0826	0,0868	0,0952
0,22	0,0629	0,0683	0,0734	0,0774	0,0808	0,0875	0,0935	0,0989	0,1043	0,1151
0,24	0,0714	0,0781	0,0841	0,0895	0,0942	0,1023	0,1097	0,1164	0,1238	0,1373
0,26	0,0801	0,0882	0,0956	0,1023	0,1077	0,1178	0,1272	0,1359	0,1447	0,1622
0,28	0,0888	0,0989	0,108	0,116	0,122	0,135	0,146	0,157	0,168	0,189
0,30	0,0983	0,1097	0,120	0,130	0,138	0,153	0,167	0,180	0,193	0,218
0,32	0,1077	0,1211	0,134	0,145	0,155	0,172	0,189	0,205	0,220	0,250
0,34	0,1171	0,133	0,147	0,160	0,172	0,193	0,213	0,231	0,256	0,285
0,36	0,1272	0,145	0,162	0,177	0,190	0,215	0,238	0,259	0,280	0,322
0,38	0,137	0,157	0,177	0,194	0,210	0,238	0,264	0,289	0,313	0,361
0,40	0,147	0,170	0,192	0,212	0,229	0,262	0,292	0,320	0,349	0,404
0,42	0,157	0,184	0,208	0,230	0,251	0,287	0,322	0,354	0,386	0,450
0,44	0,167	0,197	0,225	0,250	0,273	0,314	0,353	0,390	0,426	0,498
0,46	0,178	0,211	0,242	0,270	0,295	0,343	0,386	0,428	0,468	0,549
0,48	0,188	0,225	0,259	0,291	0,319	0,372	0,421	0,468	0,513	0,604
0,50	0,199	0,239	0,277	0,312	0,344	0,402	0,457	0,509	0,561	0,662
0,55	0,225	0,276	0,324	0,369	0,410	0,486	0,556	0,623	0,690	0,821
0,60	0,252	0,315	0,375	0,431	0,483	0,577	0,666	0,752	0,834	1,003
0,70	0,308	0,398	0,485	0,568	0,645	0,787	0,922	1,050	1,178	1,427
0,80	0,365	0,488	0,610	0,725	0,834	1,036	1,231	1,413	1,595	1,952
0,90	0,423	0,585	0,747	0,902	1,050	1,332	1,588	1,844	2,093	2,577
1,00	0,480	0,688	0,895	1,104	1,299	1,662	2,012	2,342	2,672	3,318
1,20	0,600	0,915	1,245	1,568	1,878	2,470	3,035	3,580	4,112	5,162
1,40	0,720	1,171	1,649	2,127	2,591	3,479	4,320	5,141	5,949	7,537
1,60	0,841	1,454	2,113	2,786	3,445	4,704	5,908	7,079	8,210	10,498
1,80	0,962	1,763	2,645	3,553	4,441	6,157	7,806	9,421	10,969	14,065
2,00	1,083	2,100	3,244	4,428	5,599	7,873	10,027	12,180	14,266	18,371
2,25	1,238	2,564	4,098	5,693	7,268	10,363	13,324	16,218	19,112	24,697

* Valeurs tirées de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4e ed., McGraw-Hill Co.



Type de tuyau ou de revêtement (neuf)	Valeur de ε en cm	
	Intervalle	Valeur de conception
Laiton	0,000 15	0,000 15
Cuivre	0,000 15	0,000 15
Béton	0,03-3	0,012
Fonte nue	0,012-06	0,024
Fonte asphaltée	0,006-018	0,012
Fonte revêtue de ciment	0,000 24	0,000 24
Fonte revêtue de bitume	0,000 24	0,000 24
Fonte centrifugée	0,000 3	0,000 3
Fer galvanisé	0,006-024	0,015
Fer forgé	0,003-009	0,006
Acier commercial et acier soudé	0,003-009	0,006
Acier riveté	0,09-9	0,18
Tube étiré	0,000 24	0,000 24
Bois	0,018-09	0,06

Note : Pour des raisons typographiques, on a conservé la notation décimale de l'édition anglaise.

DIAGRAMME A-2*

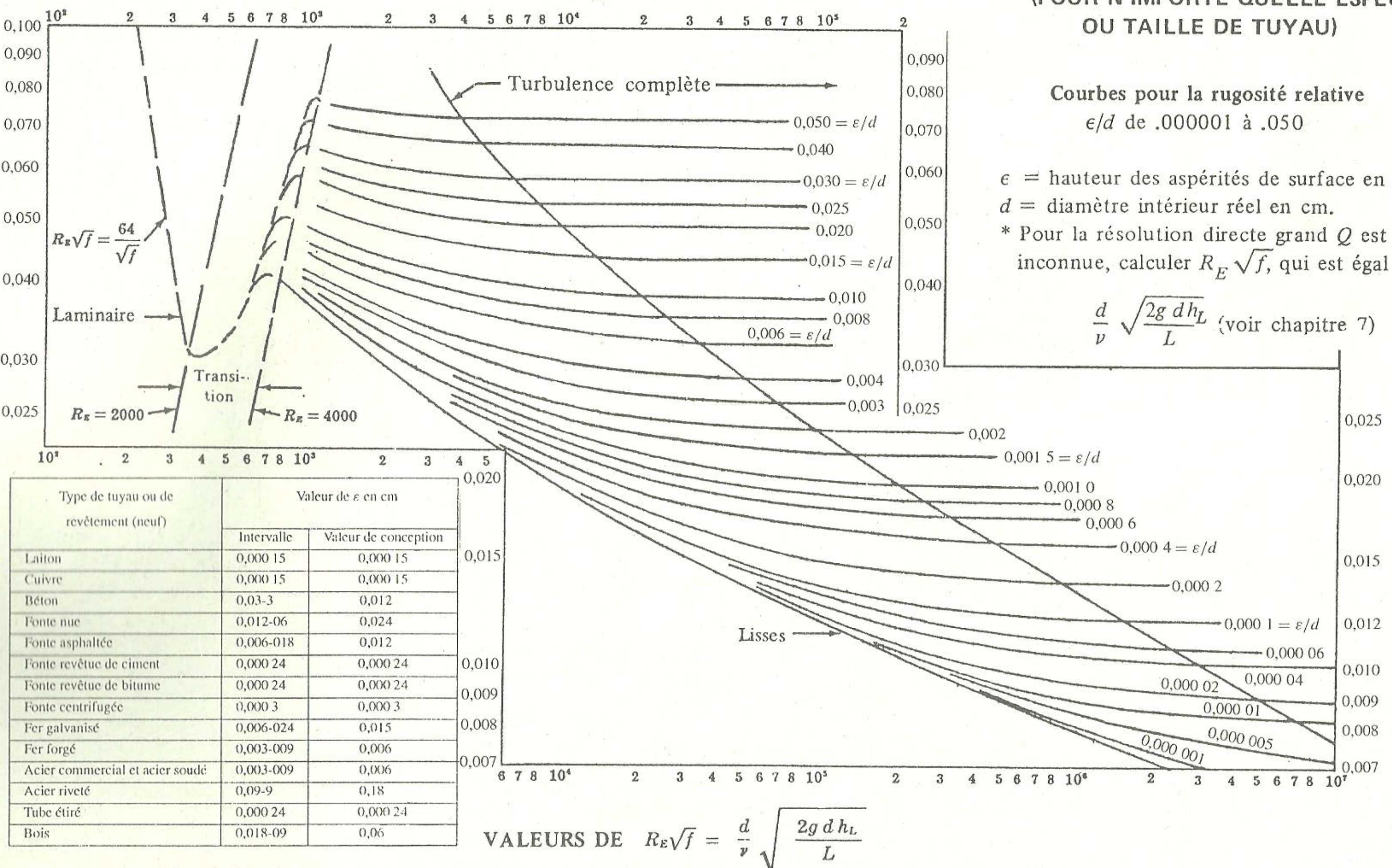
COEFFICIENTS DE FROTTEMENT f

(POUR N'IMPORTE QUELLE ESPECE OU TAILLE DE TUYAU)

Courbes pour la rugosité relative
ϵ/d de .000001 à .050

ϵ = hauteur des aspérités de surface en cm.
d = diamètre intérieur réel en cm.
* Pour la résolution directe grand Q est inconnue, calculer $R_E\sqrt{f}$, qui est égal à

$$\frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{2g\,d\,h_L}{L}}$$ (voir chapitre 7)



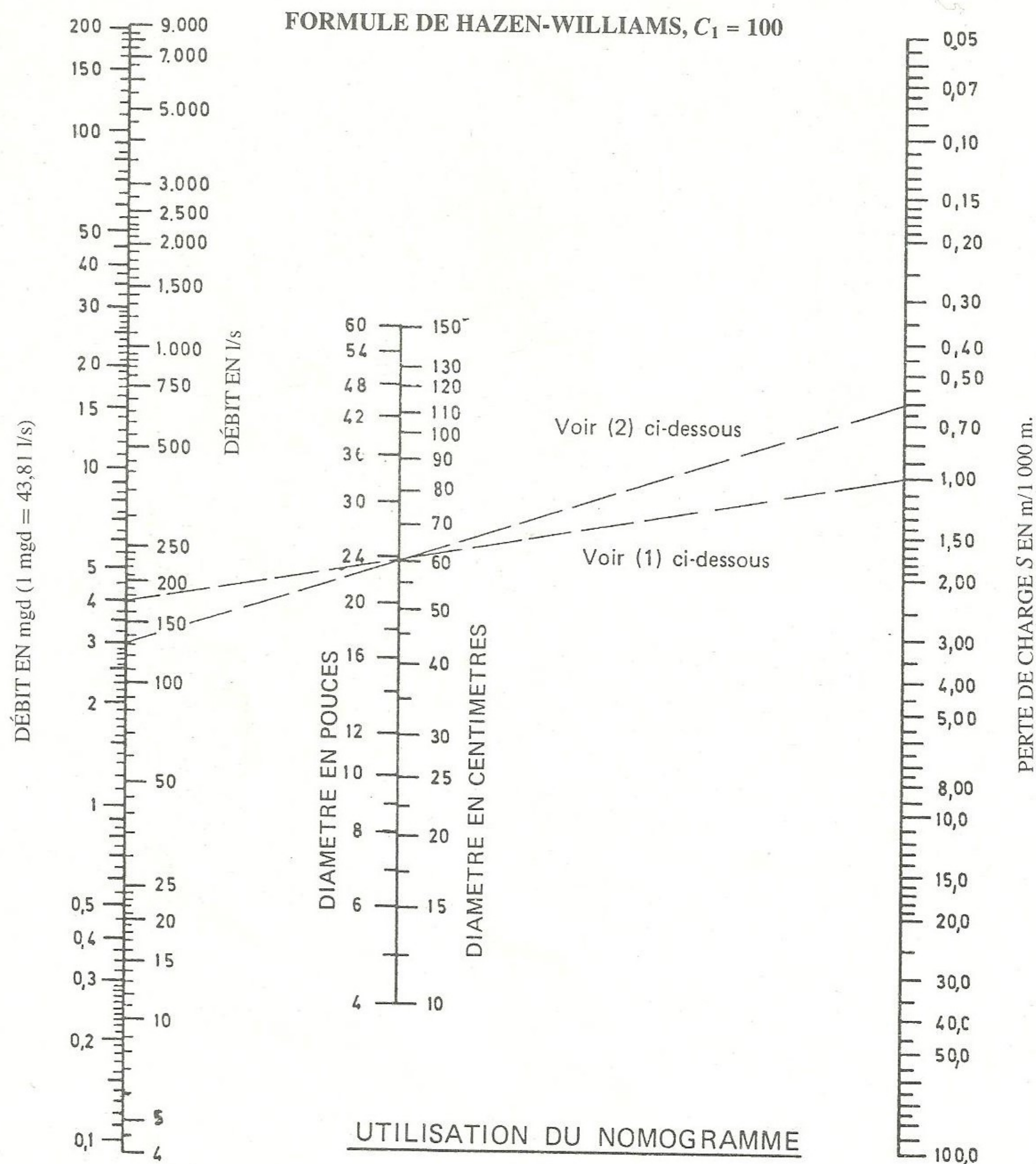
Type de tuyau ou de revêtement (neuf)	Valeur de ε en cm	
	Intervalle	Valeur de conception
Laiton	0,000 15	0,000 15
Cuivre	0,000 15	0,000 15
Béton	0,03-3	0,012
Fonte nue	0,012-06	0,024
Fonte asphaltée	0,006-018	0,012
Fonte revêtue de ciment	0,000 24	0,000 24
Fonte revêtue de bitume	0,000 24	0,000 24
Fonte centrifugée	0,000 3	0,000 3
Fer galvanisé	0,006-024	0,015
Fer forgé	0,003-009	0,006
Acier commercial et acier soudé	0,003-009	0,006
Acier riveté	0,09-9	0,18
Tube étiré	0,000 24	0,000 24
Bois	0,018-09	0,06

Note : Pour des raisons typographiques, on a conservé la notation décimale de l'édition anglaise.

DIAGRAMME B-1

NOMOGRAMMES DES DÉBITS

FORMULE DE HAZEN-WILLIAMS, $C_1 = 100$



(1) Étant donné $D = 60$ cm, $S = 1{,}0$ m/1 000, $C_1 = 120$; déterminer le débit Q.
Le nomogramme donne $Q_{100} = 170$ l/s.
Pour $C_1 = 120$, $Q = (120/100)170 = 204$ l/s.

(2) Étant donné $Q = 156$ l/s, $D = 60$ cm, $C_1 = 120$; déterminer la perte de charge passant de Q_{120} à $Q_{100} = (100/120)156 = 130$ l/s.
Le nomogramme donne $S = 0{,}60$ m/1 000 m.

DIAGRAMME B-2

DIAGRAMME DE CONDUIT : ÉQUATION DE HAZEN-WILLIAMS (C = 120)

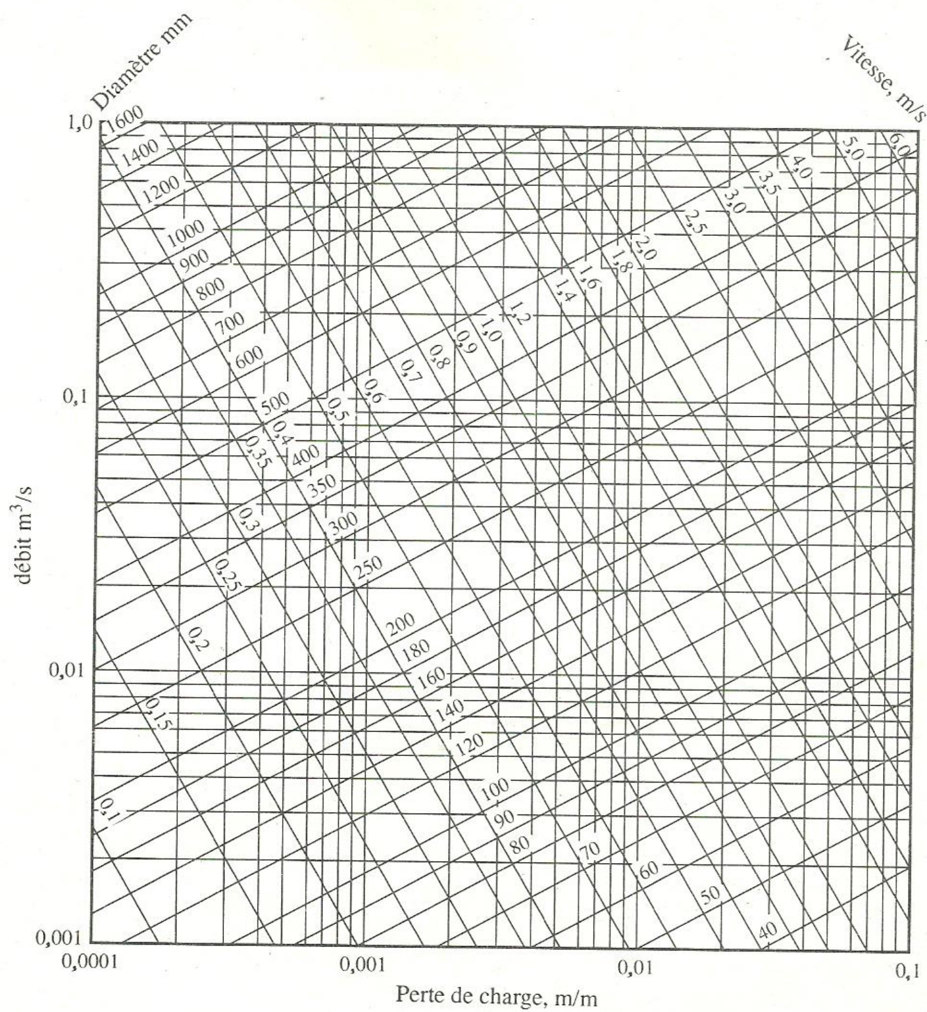
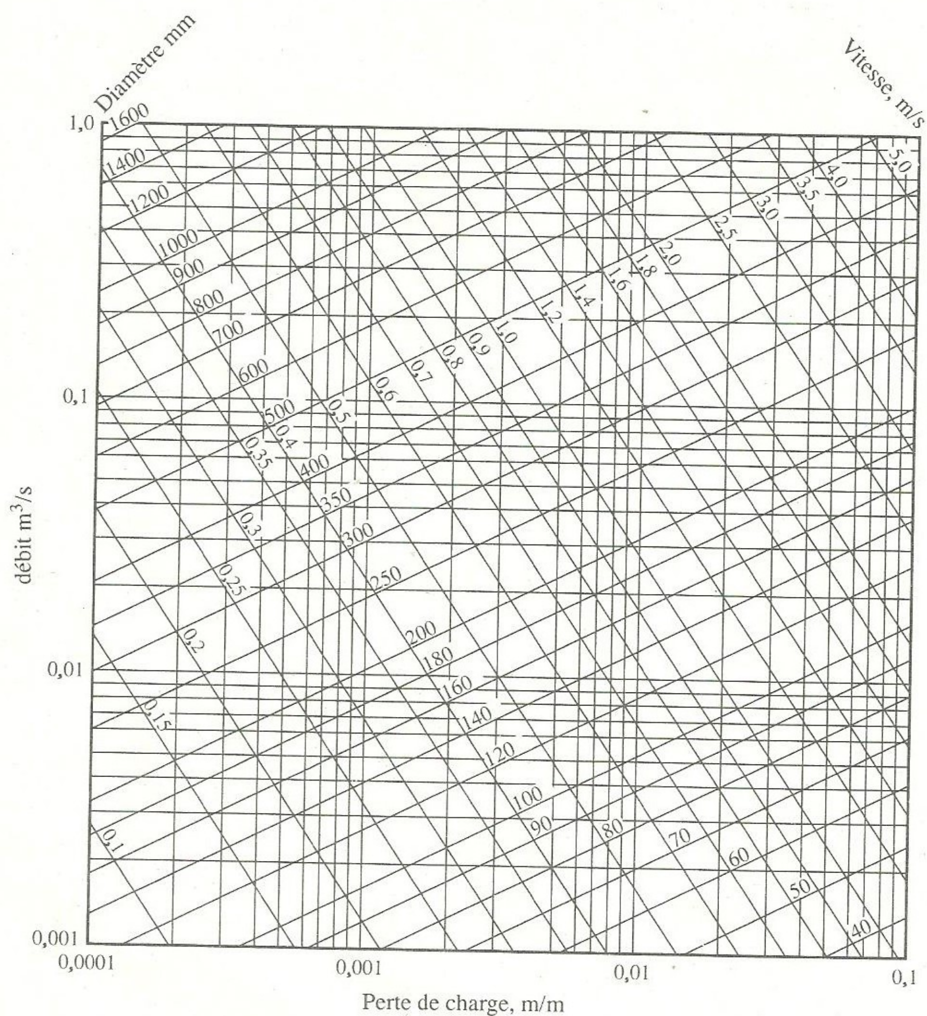
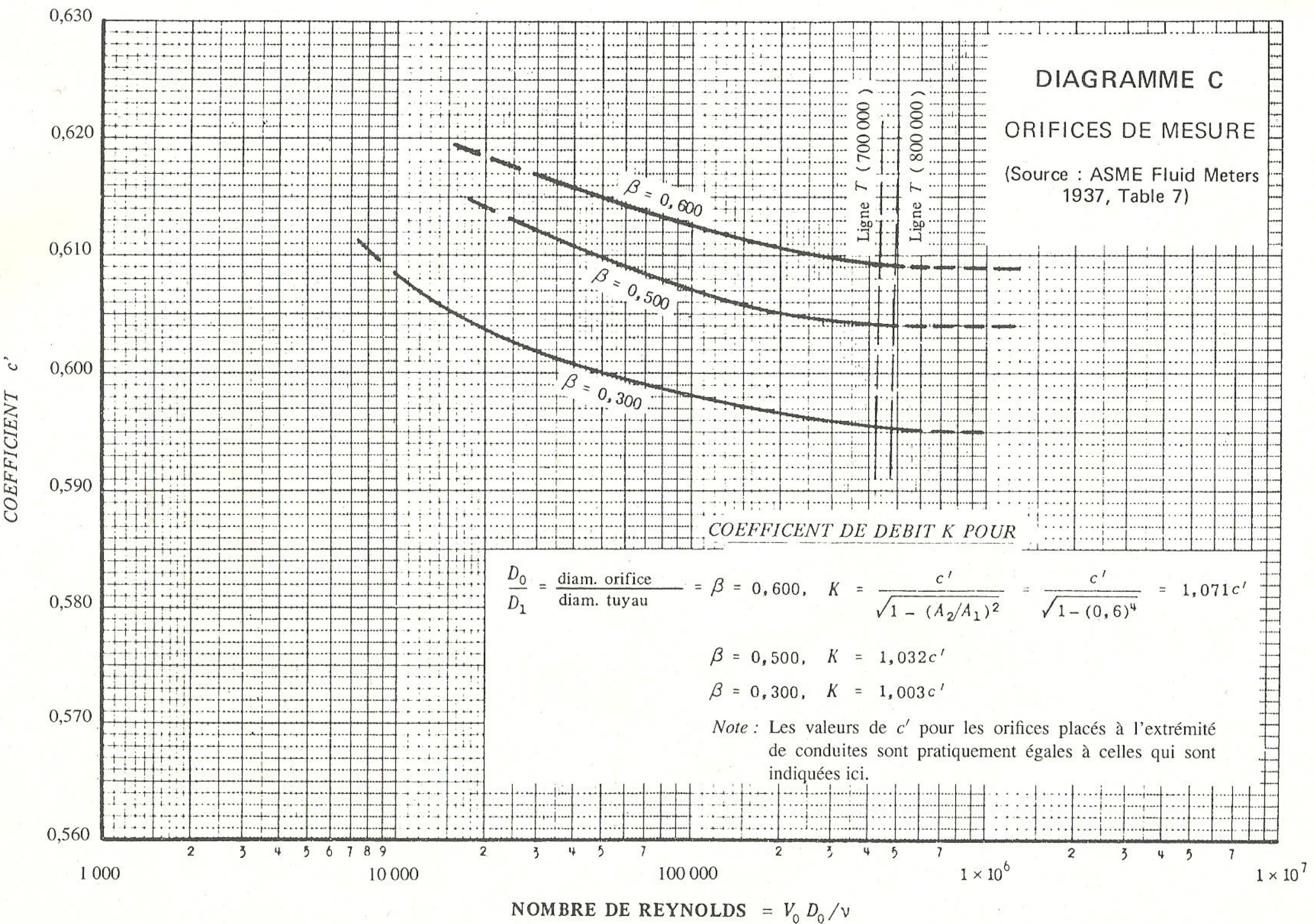
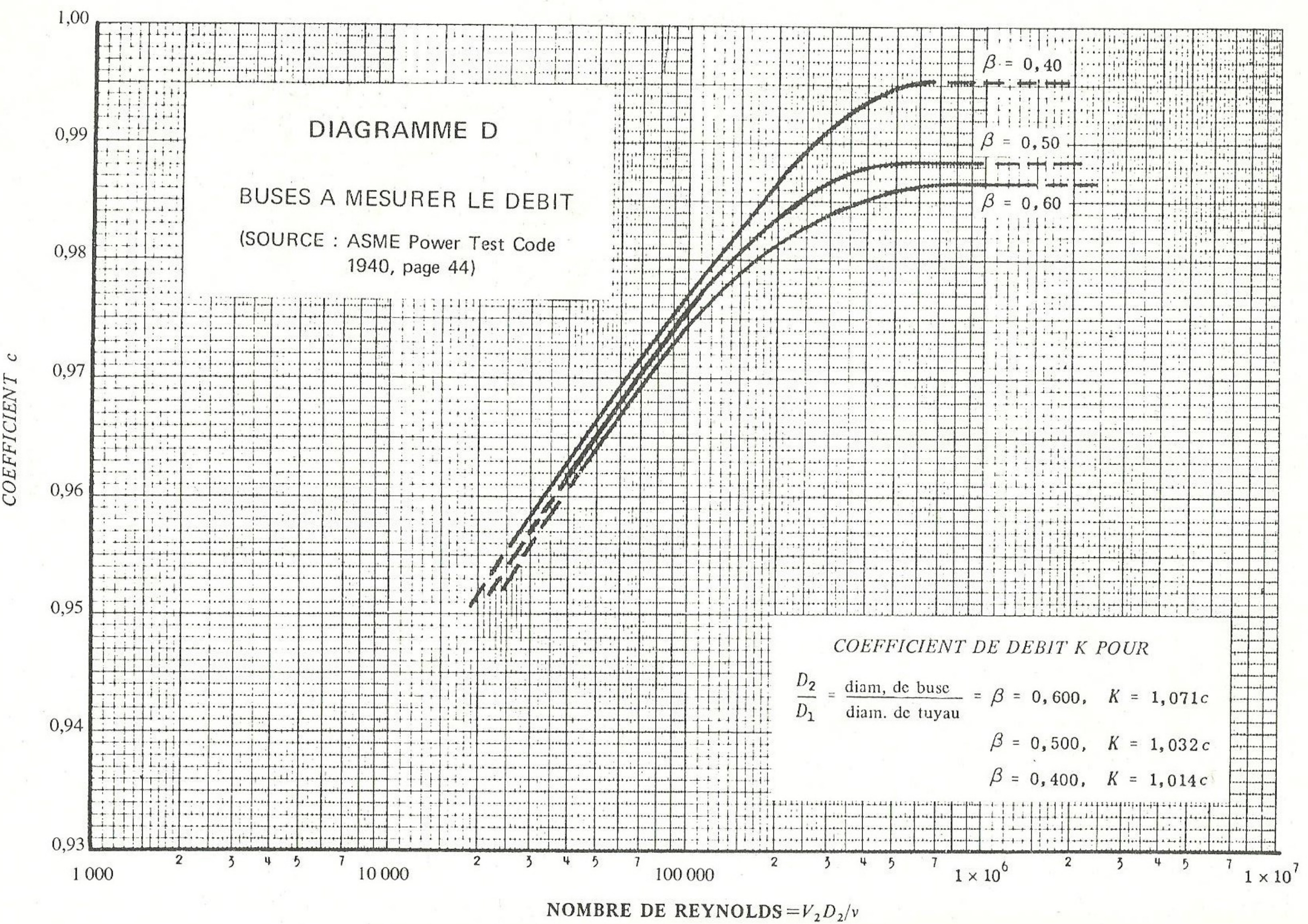


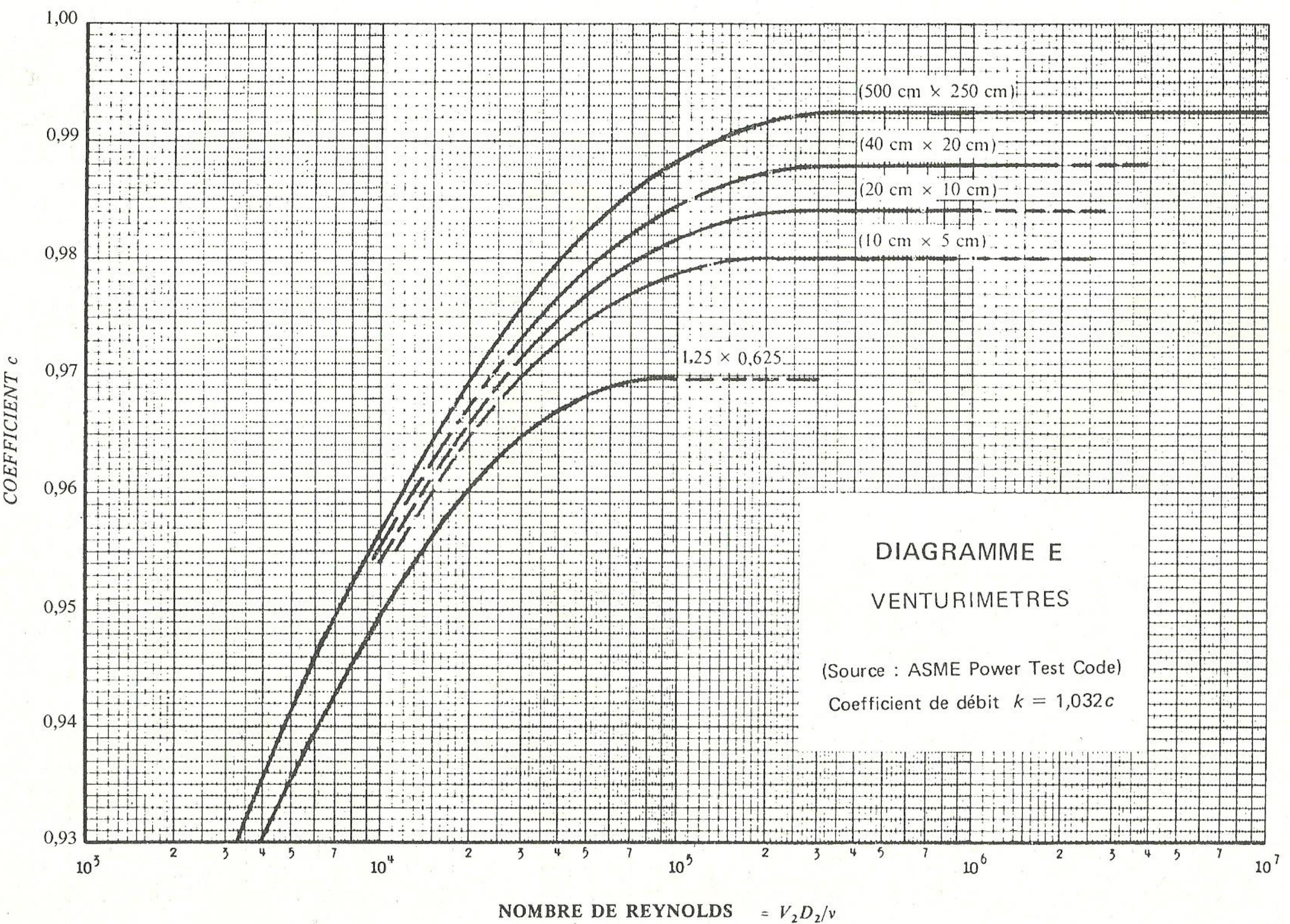
DIAGRAMME B-3

DIAGRAMME DE CONDUIT : ÉQUATION DE MANNING (n = 0,013)




DIAGRAMME C
ORIFICES DE MESURE
(Source : ASME Fluid Meters 1937, Table 7)
Ligne T (700 000)
Ligne T (800 000)
β = 0,600
β = 0,500
β = 0,300
COEFFICENT DE DEBIT K POUR
$\frac{D_0}{D_1} = \frac{\text{diam. orifice}}{\text{diam. tuyau}} = \beta = 0,600, \quad K = \frac{c'}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}} = \frac{c'}{\sqrt{1-(0,6)^4}} = 1,071c'$
$\beta = 0,500, \quad K = 1,032c'$
$\beta = 0,300, \quad K = 1,003c'$
Note : Les valeurs de c' pour les orifices placés à l'extrémité de conduites sont pratiquement égales à celles qui sont indiquées ici.
0,630
0,620
0,610
0,600
0,590
0,580
0,570
0,560
COEFFICIENT c'
1 000
2
3
4
5
6
7
8
9
10 000
2
3
4
5
7
100 000
2
3
4
5
7
1 × 10^6
2
3
4
5
7
1 × 10^7
NOMBRE DE REYNOLDS = $V_0 D_0/\nu$


DIAGRAMME D
BUSES A MESURER LE DEBIT
(SOURCE : ASME Power Test Code
1940, page 44)
β = 0,40
β = 0,50
β = 0,60
COEFFICIENT DE DEBIT K POUR
$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\text{diam, de buse}}{\text{diam. de tuyau}} = \beta = 0,600, \quad K = 1,071c$
$\beta = 0,500, \quad K = 1,032c$
$\beta = 0,400, \quad K = 1,014c$
1,00
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,93
COEFFICIENT c
1 000
10 000
100 000
1×10^6
1×10^7
NOMBRE DE REYNOLDS $= V_2 D_2/\nu$


DIAGRAMME E
VENTURIMETRES
(Source : ASME Power Test Code)
Coefficient de débit $k = 1{,}032c$
(500 cm × 250 cm)
(40 cm × 20 cm)
(20 cm × 10 cm)
(10 cm × 5 cm)
1,25 × 0,625
COEFFICIENT c
1,00
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,93
NOMBRE DE REYNOLDS $= V_2D_2/\nu$
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7

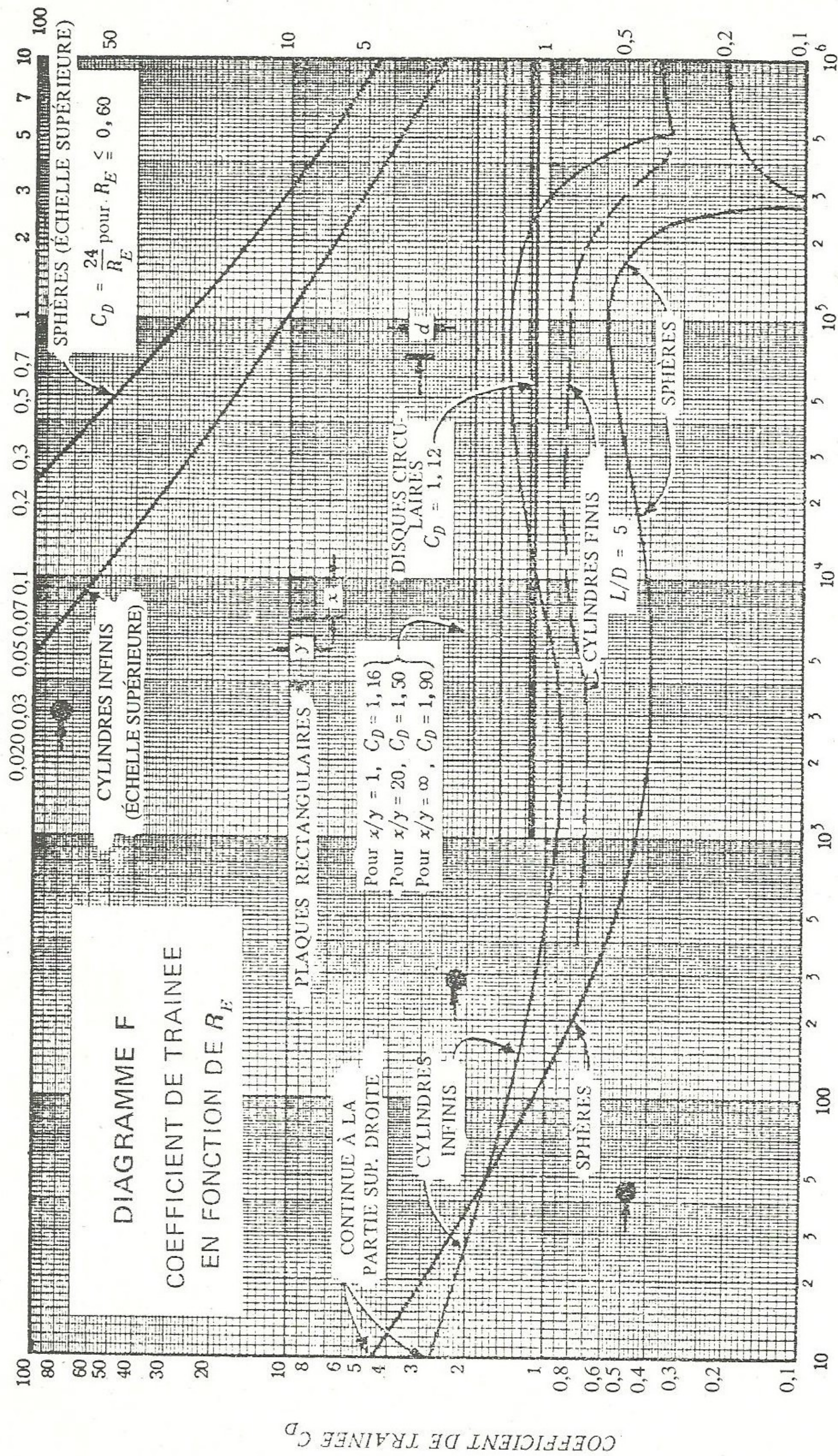


DIAGRAMME F
COEFFICIENT DE TRAINEE
EN FONCTION DE R_E
SPHÈRES (ÉCHELLE SUPÉRIEURE)
$C_D = \frac{24}{R_E}$ pour $R_E \leq 0,60$
CYLINDRES INFINIS
(ÉCHELLE SUPÉRIEURE)
PLAQUES RECTANGULAIRES
Pour $x/y = 1$, $C_D = 1,16$
Pour $x/y = 20$, $C_D = 1,50$
Pour $x/y = \infty$, $C_D = 1,90$
DISQUES CIRCULAIRES
$C_D = 1,12$
CYLINDRES FINIS
$L/D = 5$
SPHÈRES
CONTINUE À LA PARTIE SUP. DROITE
CYLINDRES INFINIS
SPHÈRES
NOMBRE DE REYNOLDS (VD/ν)
COEFFICIENT DE TRAINEE C_D

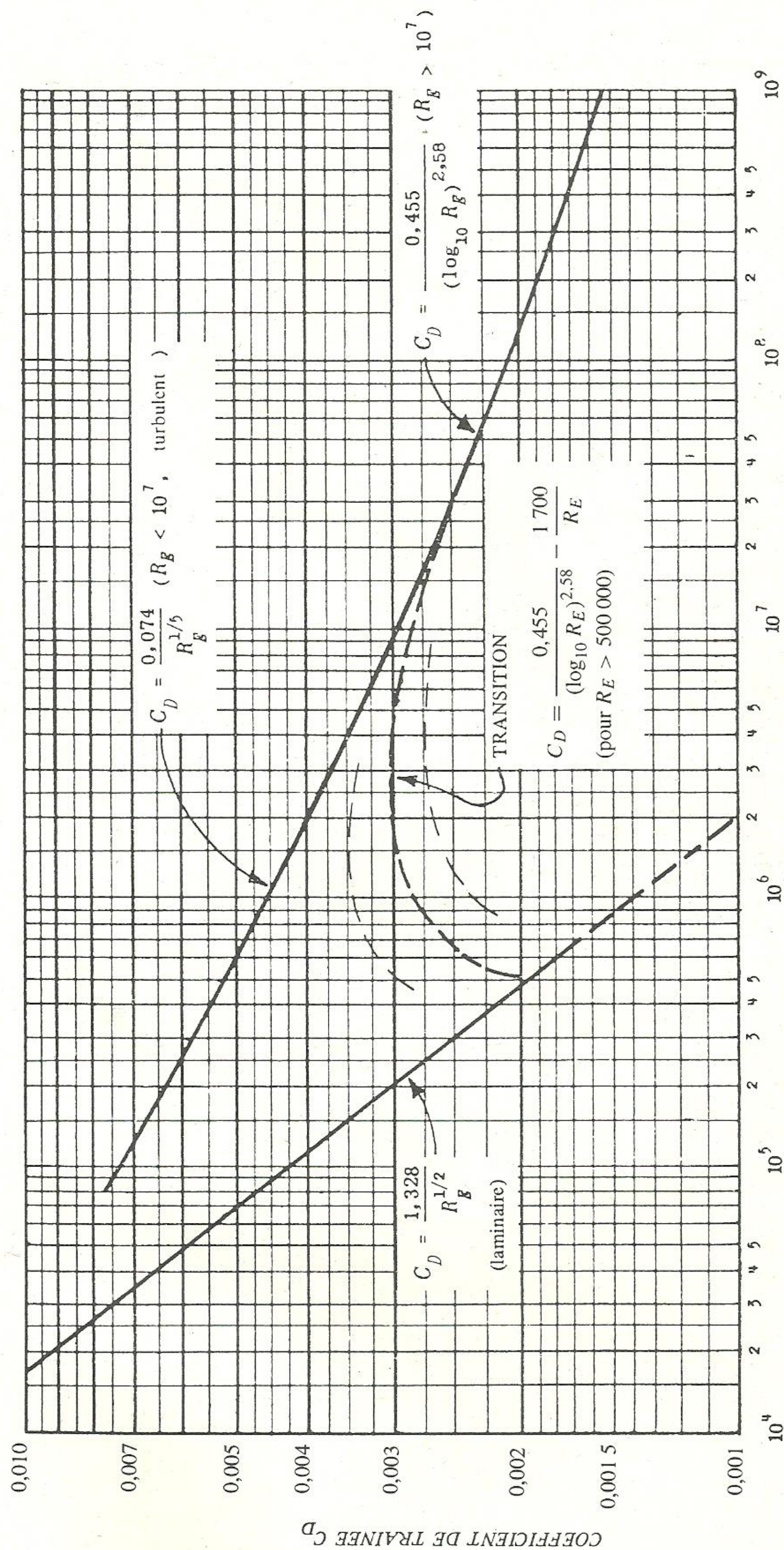
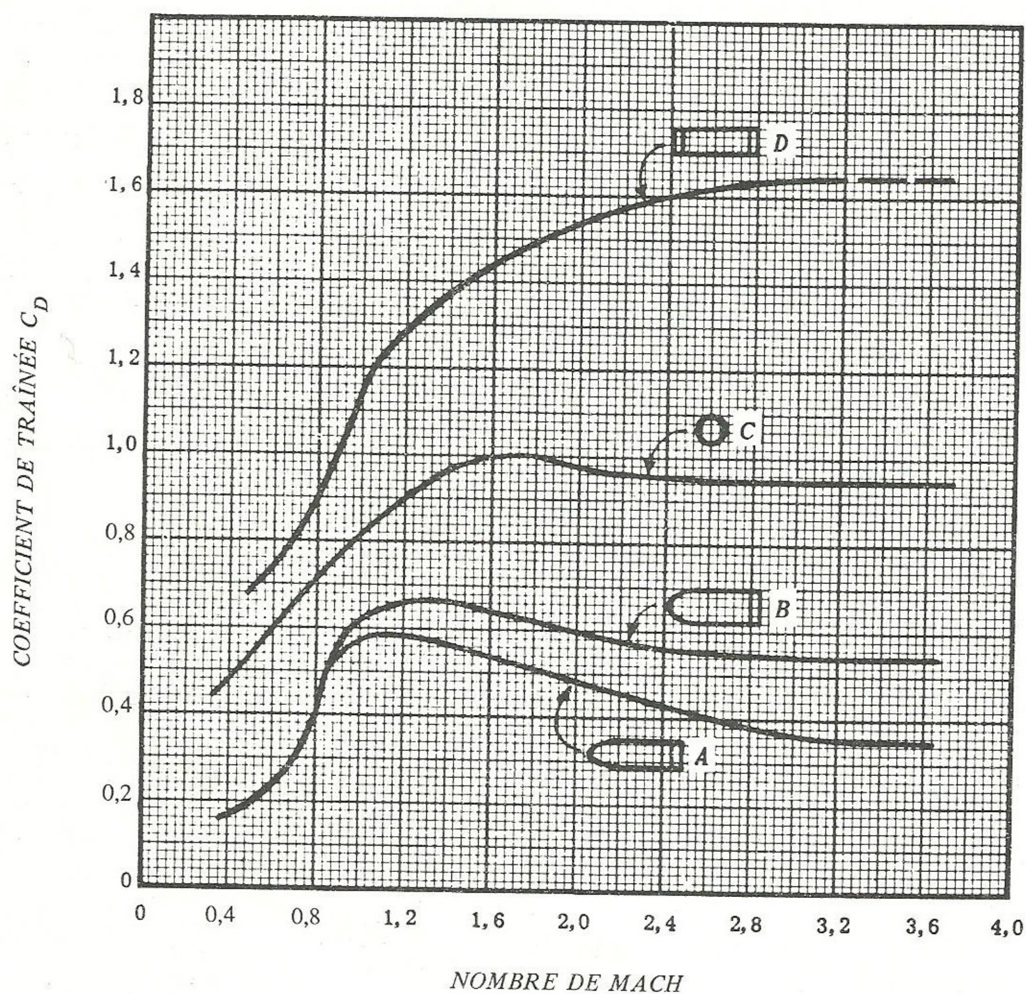

DIAGRAMME G
COEFFICIENTS DE TRAINEE POUR LES PLAQUES PLANES ET LISSES
$C_D = \frac{0,074}{R_E^{1/5}}$ ($R_E < 10^7$, turbulent)
$C_D = \frac{0,455}{(\log_{10} R_E)^{2,58}}$ ($R_E > 10^7$)
TRANSITION
$C_D = \frac{0,455}{(\log_{10} R_E)^{2.58}} - \frac{1\,700}{R_E}$
(pour $R_E > 500\,000$)
$C_D = \frac{1,328}{R_E^{1/2}}$
(laminaire)
COEFFICIENT DE TRAINEE C_D
0,010
0,007
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001 5
0,001
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
NOMBRE DE REYNOLDS (Vx/ν)

DIAGRAMME H

COEFFICENTS DE TRAÎNÉE AUX VITESSES SUPERSONIQUES



Index

I-L

M

N-O

P-Q

R

LOUIS-JEAN
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 04.92.53.17.00
Dépôt légal : 708 — Septembre 1997
Imprimé en France